Признаки делимости. Теория

Когда речь заходит о числах и делимости, полезно знать так называемые *признаки делимости*, или *признаки равноостаточности*. Обычно их формулируют для степеней двойки, 3, 9, степеней пятерки, 11. Также можно сформулировать признаки делимости на 7 и 13, что мы сейчас и сделаем. Будем формулировать именно признаки равноостаточности, из них очевидно следуют признаки делимости.

bullet

Пример 1

Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

◄ **Ответ.** Нет, не может. **Решение.** Такое число будет делиться на 3, но не будет делиться на 9, чего для квадрата быть не может. ►

Чтобы лучше разобраться, как работают признаки делимости, можно вместе подумать над задачей, в которой нужно будет самим придумать этот признак делимости.

Пример 2

Шестизначное число делится на 37. Все его цифры различны. Доказать, что из тех же цифр можно составить и другое шестизначное число, кратное 37.

Сначала разберемся, в каком случае число делится на 37. Есть замечательное число 111, которое делится на 37. Поэтому $1000 = 9 \cdot 111 + 1$ *дает остаток 1 при делении на 37. Значит, шестизначное число делится на 37 тогда и только тогда, когда сумма двух трехзначных чисел, образованных его цифрами, делится на 37. Отсюда следует*

◄ **Решение.** Переставим цифру единиц и цифру тысяч в этом числе. Тогда новое число, во-первых, будет другим, так как все цифры в числе различны, а во-вторых, по доказанному выше признаку делимости на 37, тоже будет кратно 37. ►

В целом тема должна быть детям знакома, но если возникают трудности с доказательством, то разумно вспомнить про десятичную запись числа и хотя бы часть признаков вместе доказать.

Переходим к задачам для самостоятельного решения.

Признаки делимости. Задачи

1. Найдите все такие трёхзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

2. На доске написано число 8^{2017}. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число?

3. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, то есть делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

4. Дано восемь трехзначных чисел. Выписываются все возможные шестизначные числа, получаемые приписыванием одного из наших трехзначных чисел к другому. Докажите, что хотя бы одно из полученных шестизначных чисел делится на 7.

5. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, кратное 11.

6. *Палиндромом* называется натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево. Докажите, что для любой натуральной степени двойки найдётся натуральный палиндром, который на неё делится.

7. Найдётся ли такое десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырёхзначное число?

8. К некоторому натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трёх исходных чисел. Найдите все возможные тройки исходных чисел.

Признаки делимости

1. Найдите все такие трёхзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

Ответ. 108. **Решение.** По условию число кратно 3. Значит, сумма его цифр также делится на 3. Поэтому само число делится на 9. Кроме того, оно делится на 4. Следовательно, нужно искать среди чисел, которые делятся на 36. Сумма цифр трёхзначного числа не превосходит 27, но число 999 на 12 не делится. Значит, сумма цифр нашего числа не больше 18, а само число не больше $18 \cdot 12 = 216$. Осталось перебрать числа 108, 144, 180, 216.

2. На доске написано число 8^{2017}. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число?

Ответ. 8. **Решение.** Заметим, что при таких операциях не изменяется остаток при делении числа на 9. А у исходного числа этот остаток равен 8, значит, и итоговое число будет давать такой же остаток, то есть равно 8.

3. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, то есть делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Все двузначные числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 или 8, чётны, а оканчивающиеся на 5 кратны пяти. Поэтому такие числа не будут простыми, и писать эти цифры на карточках не имеет смысла. Остаются цифры 1, 3, 7 и 9. Если цифры 3 и 9 записаны на разных карточках, то из них можно сложить составное число 39. Если же они записаны на одной карточке, то на второй записаны 1 и 7, и тогда можно сложить составное число $91 = 7 \cdot 13$.

4. Дано восемь трехзначных чисел. Выписываются все возможные шестизначные числа, получаемые приписыванием одного из наших трехзначных чисел к другому. Докажите, что хотя бы одно из полученных шестизначных чисел делится на 7.

Решение. Заметим, что среди восьми написанных чисел найдутся два числа a и b, дающих одинаковый остаток при делении на 7. Рассмотрим число, получающееся приписыванием именно из этих двух чисел одного к другому. Полученное число равно $1000a + b$, что дает такой же остаток, что и $b - a$ при делении на 7, то есть делится на 7 нацело.

5. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, кратное 11.

Ответ. 987654321. **Решение.** Если в десятичной записи числа есть цифра 0 или две одинаковые цифры, то, вычеркнув остальные цифры, мы получим число, кратное 11. Значит, искомое число не более чем девятизначное, и все его цифры различны. Наибольшее из таких чисел — 987654321. Осталось лишь показать, что любое число, получаемое из этого вычеркиванием цифр, не делится на 11.

6. *Палиндромом* называется натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево. Докажите, что для любой натуральной степени двойки найдётся натуральный палиндром, который на неё делится.

Решение. Подойдет число $x \cdot 10^n + 2^n$, где x — запись числа 2^n в обратном порядке.

7. Найдётся ли такое десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырёхзначное число?

Ответ. Да, найдется. **Решение.** Таково, например, число 1397245680. В самом деле, если не вычеркнута хотя бы одна из последних шести цифр, то оставшееся четырёхзначное число чётно или делится на 5, а если все они вычеркнуты, то осталось число 1397, кратное 11.

Другой пример: 1379245680, поскольку 1379 кратно 7.

8. К некоторому натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трёх исходных чисел. Найдите все возможные тройки исходных чисел.