

Девятнадцатое задание ЕГЭ

1. (a) Придумайте три натуральных числа так, чтобы никакие два не делились друг на друга, но произведение любых двух делилось на оставшееся число.

(b) А существует ли 10 таких чисел?

2. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

3. (a) Приведите пример натурального числа, половина которого — квадрат, а треть — куб. (b) Приведите пример натурального числа, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

(c) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, а треть — куб.

4. Расставьте в вершинах куба натуральные числа, так, что числа в соседних вершинах будут иметь общий делитель, а другие пары чисел будут взаимно просты.

5. Придумайте четыре натуральных числа так, чтобы произведение любых двух не делилось ни на какое из остальных, а произведение любых трех делилось на оставшееся число.

6. Докажите, что найдутся 100 последовательных составных чисел.

7. Существуют ли 10 различных натуральных чисел, таких что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?

8. (a) Существуют ли 5 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на другое, но квадрат любого числа делится на каждое из остальных?

(b) А если потребовать, чтобы квадрат делился на произведение остальных?

9. Можно ли расставить по кругу 10 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

10. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 > a_2 > \dots > a_{10}$, что

$$\text{НОД}(a_1, a_2) < \text{НОД}(a_2, a_3) < \dots < \dots \text{НОД}(a_9, a_{10})?$$

11. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 100. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестертых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стёрты на последнем этапе?