Разложение на множители. Теория

В школе вы уже познакомились с разложением числа на простые множители. Алго-ритм заключается в поиске простых делителей. Начиная с меньшего из простых чисел мы ищем делитель нашего числа. Когда мы его находим, мы делим число на делитель и уже с новым числом производим ту же операцию, пока в частном тоже не получим простое число. Наша задача сегодня посмотреть, как этот алгоритм может помочь нам в решении многих олимпиадных задач.

Пример 1

Разложите число 1001 на два натуральных множителя всеми возможными способами.

◄ **Ответ.** $1 \cdot 1001$, $7 \cdot 143$, $11 \cdot 91$, $13 \cdot 77$. **Решение.** Сначала разложим число 1001 на простые множители: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Итак, у этого числа 3 различных простых множителя. Значит, когда мы раскладываем число на два натуральных множителя, возможны два варианта: либо в одном числе оказываются 3 простым сомножителя, в другом 0, либо в одном числе оказываются 2 простых сомножителя, в другом 1.

В первом случае мы получаем только разложение $1 \cdot 1001$. Во втором случае одно из чисел простое, и у нас есть 3 разложения: $7 \cdot 143$, $11 \cdot 91$, $13 \cdot 77$. ►

В первой задаче было мало простых делителей и нахождение разложения на простые делители было очевидным действием. Во второй задаче тоже будет полезным не пытаться подбирать нужное решения, а попытаться рассуждать отталкиваясь от разложения на простые множители.

Пример 2

Можно ли числа от 1 до 10 разбить на две группы так, чтобы произведение чисел в одной группе равнялось произведению чисел в другой группе?

◄ **Ответ.** Нет, нельзя. **Решение.** Рассмотрим простое число 7. Никакое другое число от 1 до 10 на него не делится, и более того, так как 7 простое, то никакое произведение остальных чисел от 1 до 10 не будет делиться на 7. При любом разбиении чисел от 1 до 10 на две группы число 7 попадет только в одну группу. Тогда произведение чисел в этой группе будет делиться на 7, а в другой — не будет. Таким образом, произведения чисел в двух группах не могут быть равны. ►

Здесь мы использовали полезную идею, посмотреть на большое простое число, которое в этой задаче использовалось лишь раз и отсюда нашли противоречие. Обратите внимание на этот подход, он может пригодится вам в дальнейшем. И в последней задаче нам тоже пригодится посмотреть на разложение и то как множители в нем можно комбинировать.

Пример 3

Найдите наименьшее число, произведение цифр которого равно 200.

◄ **Ответ.** 558. **Решение.** Разложим число 200 на множители: $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Число тем меньше, чем меньше в нем знаков. При этом произведение цифр делится на 25, значит, в нем обязательно есть цифры, которые делятся на 5. Это либо 0, либо 5. В числе не может быть нулей, так как тогда произведение цифр будет равно 0. Значит, в числе обязательно есть две пятерки. Произведение оставшихся цифр равно 8. Чтобы получить такое произведение, нужна либо одна восьмерка, либо хотя бы две цифры. Так как цифр должно быть как можно меньше, мы используем одну восьмерку.

Итак, число состоит из цифр 5, 5 и 8. Нам нужно найти наименьшее число, значит, в начало нужно поставить меньшие цифры, а в конец большие. Получается число 558, это и является ответом. ►

В следующих задачах вам предстоит применить все те же идеи - посмотреть на разложение числа на простые множители и то как их можно будет группировать. Успехов!

Разложение на множители. Задачи

1. Придумайте число, произведение цифр которого равно 1944.

2. Существует ли натуральное число с произведением цифр 2310?

3. Сколько существует пар простых чисел, которые отличаются друг от друга на 15?

4. На доске написаны два натуральных числа. Их произведение делится на 1000, но ни одно из них не делится на 10. Какие числа записаны на доске?

5. Придумайте стозначное число, произведение цифр которого равно 630.

6. Разделите числа 2, 4, 6, 10, 22, 25, 40, 66 на две группы так, чтобы произведения в двух группах были равны. Сколькими способами это можно сделать?

7. Какое из чисел больше и на сколько: $\underbrace{333\ldots33}_{\text{20 троек}}\cdot\underbrace{444\ldots445}_{\text{40 цифр}}$ или $\underbrace{666\ldots66}_{\text{20 шестерок}}\cdot\underbrace{222\ldots223}_{\text{40 цифр}}$?

8. Прямоугольник с целыми длинами сторон разбит на двенадцать квадратов со следующими длинами сторон: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Каков периметр прямоугольника?