

Устная пробная олимпиада №19: ОММО!

16 января

Специфика устной олимпиады:

- Олимпиада длится до 18:30. Сдача задач будет проходить в Дискорде (ссылка на сервер <https://discord.gg/eGf8n8fS>). Если вы думаете, что решили задачу и хотите ее сдать, заходите в одну из “Отслушек”, там вас будет ждать преподаватель.
- Сдавать задачи можно не только устно, но и письменно. Для этого отправляйте фотографии решений в личные сообщения сообщества <https://vk.me/perechen2020all>.
- На каждую задачу у вас есть три попытки ее сдать. Поэтому проверяйте свое решение аккуратно, особенно если идете сдавать не в первый раз. Если сомневаетесь, правильно ли поняли условие — лучше уточните условие до того, как идти сдавать.
- Ваше решение оценивается в 0 или 1 балл. Преподаватель, конечно, имеет право задавать вам вопросы.
- И, наконец, инструкция по Дискорду для тех, кто им еще ни разу не пользовался: <https://drive.google.com/file/d/1BN3PdN0zYDQu724IjHsxv3FuigDnApMP/view>
- Разбор олимпиады будет сразу же после олимпиады, то есть в 18:30 на той же трансляции <https://youtu.be/cMNU1a7qHas>. Желаем успехов!

1. Решите в натуральных числах уравнение

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

2. На острове живет племя лжецов, которые всегда лгут, племя хитрецов, которые говорят правду или ложь по своему желанию, и племя рыцарей, которые всегда говорят только правду. Однажды 10 аборигенов спросили, который час. Шестеро ответили: “Час дня”, остальные: “полвторого”. На тот же вопрос, заданный через полчаса, двое ответили: “два часа дня”, остальные: “полтретьего”. Еще через полчаса четверо сказали: “три часа дня”, остальные: “полчетвертого”. Сколько представителей каждого племени было среди опрошенных, если известно, что каждый из опрошенных хитрецов сказал правду ровно один раз?

3. Решите уравнение $2 + \sqrt{3} \cos x + |\sin x| = 4 \sin^2 x$.

4. Медиана AD и биссектриса CE прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке M . Найти площадь треугольника ABC , если $CM = 8$, $ME = 5$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{11x - y} - \sqrt{y - x} = 1, \\ 7\sqrt{y - x} + 6y - 26x = 3. \end{cases}$$

6. Найдите все функции f , определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x , y и z выполняется равенство

$$f(xyz) = f(x)f(y)f(z) - 6xyz.$$

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC . Найдите угол C треугольника.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_3 x + (a^2 - 4) \log_{3x} \frac{1}{3} - 3 = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 8?

9. В школе учится меньше 100 человек. Часть учеников являются отличниками, а остальные — хорошистами. После сложной контрольной работы $2/7$ отличников стали хорошистами, а $2/7$ хорошистов — троечниками. При этом отличников и хорошистов стало поровну. Сколько учеников могло быть в школе?

10. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, в котором $AB = AA_1 = 12$, $AD = 30$. Точка M расположена в грани $ABB_1 A_1$ на расстоянии 1 от середины AB и на равных расстояниях от A и B . Точка N принадлежит грани $DCC_1 D_1$ и расположена симметрично точке M относительно центра параллелепипеда. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда между точками M и N .