Устная пробная олимпиада №19: ОММО!

16 января

1. Решите в натуральных числах уравнение

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

Ответ. $x = 1, y = 2, z = 3$.

Решение. Второе слагаемое положительно, но меньше единицы. Поскольку $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, то $x = 1$, а $y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$. По тем же соображениям $y = 2$, $z = 3$.

2. На острове живет племя лжецов, которые всегда лгут, племя хитрецов, которые говорят правду или ложь по своему желанию, и племя рыцарей, которые всегда говорят только правду. Однажды 10 аборигенов спросили, который час. Шестеро ответили: “Час дня”, остальные: “полвторого”. На тот же вопрос, заданный через полчаса, двое ответили: “два часа дня”, остальные: “полтретьего”. Еще через полчаса четверо сказали: “три часа дня”, остальные: “полчетвертого”. Сколько представителей каждого племени было среди опрошенных, если известно, что каждый из опрошенных хитрецов сказал правду ровно один раз?

Ответ. Рыцырей нет, хитрецов либо нет, либо их 6. **Решение.** Заметим, что если правдивых ответов нет, то нет ни одного рыцаря и ни одного хитреца, поэтому все — лжецы. Если же правдивые ответы есть, то это либо группа из 6 ответов в первый раз, либо группа из 6 ответов в третий раз, либо группа в 4 ответа в первый раз и 2 ответа во второй раз (они лживы или правдивы одновременно), или группа в 8 ответов во второй раз и 4 ответов в третий раз. Таким образом, нет ни одного случая, когда правдивые ответы были даны во всех трёх опросах, поэтому рыцарей нет совсем. Теперь заметим, что во всех вариантах, кроме одного, 6 правильных ответов (а в оставшемся варианте 12 правильных ответов, а хитрецы дают ровно один верный ответ, поэтому вариант не подходит), поэтому ровно 6 хитрецов в опрошенной группе.

3. Решите уравнение $2 + \sqrt{3}\cos x + |\sin x| = 4\sin^2 x$.

Ответ. $x \in \{2\pi k + \frac{5\pi}{6}, 2\pi k - \frac{5\pi}{6}, 2\pi k + \frac{7\pi}{18}, 2\pi k - \frac{7\pi}{18}\}$.

Решение. Заметим, что если нам подойдет число x, то подойдут и числа $x + 2\pi$ и $-x$, поэтому достаточно искать $x \in [0, \pi]$. В этом интервале $\sin(x) \geqslant 0$, значит нужно решить уравнение $2 + \sqrt{3}\cos x + \sin x = 4\sin^2 x$. Разделим все на 2 и перенесем 1 в правую часть.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \cos(\frac{\pi}{6} - x) = 2\sin^2 x - 1 = -\cos(2x)$$

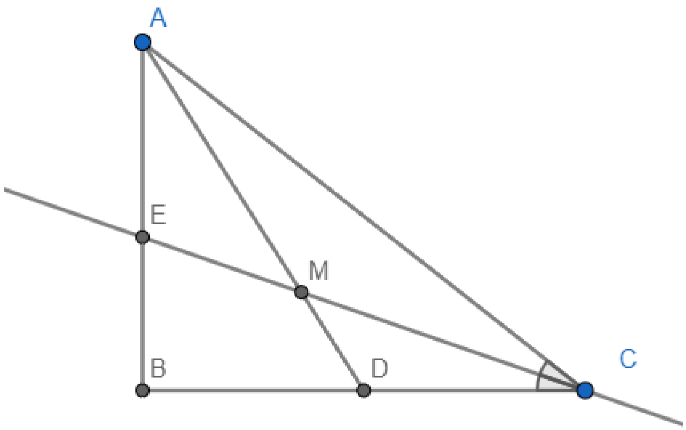
2 косинуса равны по модулю, но отличаются знаком, если их разность или сумма равна $2\pi k + \pi$.

Если $2x + \frac{\pi}{6} - x = x + \frac{\pi}{6} = 2\pi k + \pi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \pi]$, то $x + \frac{\pi}{6} = \pi$ или $x = \frac{5\pi}{6}$

Если $2x - (\frac{\pi}{6} - x) = 3x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k + \pi \in [-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} + 3\pi]$, то $3x - \frac{\pi}{6} = \pi$ или $3x - \frac{\pi}{6} = 3\pi$ и $x = \frac{7\pi}{18}$ или $x = \frac{19\pi}{18}$. $x = \frac{19\pi}{18}$ нам не подходит, так как мы ищем $x \in [0, \pi]$.

4. Медиана AD и биссектриса CE прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABC, если $CM = 8, ME = 5$.

Ответ. $\frac{1352}{15}$.
Решение.



Напишем теорему Менелая для треугольника BCE и прямой AD.

$$\frac{CM}{ME}\cdot\frac{EA}{AB}\cdot\frac{BD}{DC}=1=\frac{8}{5}\cdot\frac{EA}{AB}$$

Значит $\frac{EA}{AB}=\frac{5}{8}$. Отсюда $\frac{AE}{EB}=\frac{5}{3}=\frac{AC}{CB}$ (последнее равенство верно, так как CE — биссектриса). Пусть $AC=5a$, $BC=3a$. Тогда $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=4a$, $EB=\frac{3AB}{8}=\frac{3a}{2}$, $EC=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{11.25}a=13$ и $a=\frac{169}{11.25}=\frac{676}{45}$.

Площадь ABC равна $\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{12\cdot 676}{90}=\frac{1352}{15}$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1,\\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3.\end{cases}$$

Ответ. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$. **Решение.** $11x-y\geqslant 0$ и $y-x\geqslant 0$

Выразим $6y-26x$, как $a(11x-y)+b(y-x)$. Тогда $11a-b=-26$ и $b-a=6$. Отсюда $a=-2$ и $b=4$. Значит $6y-26x=-2(11x-y)+4(y-x)$.

Сделаем замену $z=\sqrt{11x-y}\geqslant 0$, $t=\sqrt{y-x}\geqslant 0$.

$$\begin{cases}z-t=1,\\ 7t-2z^2+4t^2=3.\end{cases}$$

Тогда $7t-2(t+1)^2+4t^2=2t^2+3t-2=3$.

$$2t^2+3t-5=(t-1)(2t+5)$$

$t>0$, поэтому $t=1$ и $z=t+1=2$.

Теперь $11x-y=z^2=4$, $y-x=t^2=1$. Отсюда $10x=5$, $x=0{,}5$ и $y=1{,}5$.

Под ОДЗ подходит.

6. Найдите все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x, y и z выполняется равенство

$$f(xyz) = f(x)f(y)f(z) - 6xyz.$$

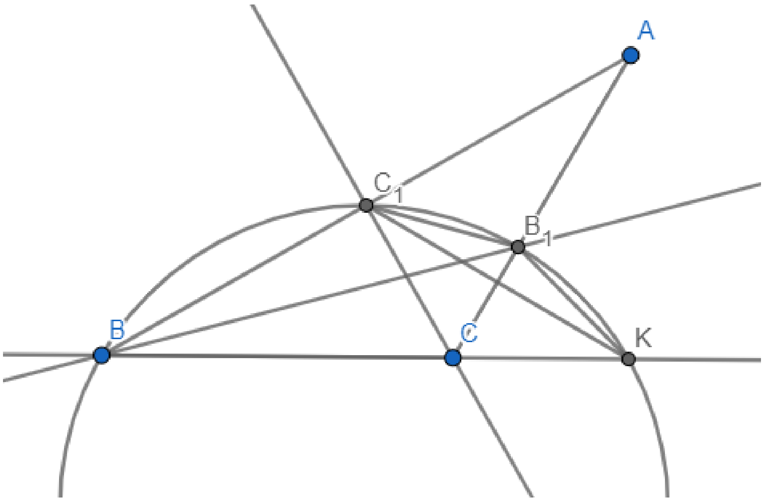
Ответ. $f(x) = 2x$. **Решение.**

• Подставим $x = y = z = 1$. Тогда $f(1) = f^3(1) - 6$ или $f^3(1) - f(1) - 6 = (f(1)-2)(f^2(1)+2f(1)+3) = (f(1)-2)((f(1)+1)^2+2) = 0$. Значит $f(1) = 2$.

• Подставим $x = y = 1$. Тогда $f(z) = 4f(z) - 6z$ или $f(z) = 2z$. Подставим и проверим решение $f(z) = 2z$ и оно подходит при всех x, y, z.

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника.

Ответ. 120°.



Решение. Продолжив луч BC до пересечения с описанной окружностью треугольника BB_1C_1, получим точку K. Вписанные углы $\angle C_1BB_1$ и $\angle KBB_1$ равны (так как BB_1 — биссектриса), значит, равны дуги, на которые они опираются, $B_1C_1 = B_1K$. При этом точки K и C_1 лежат на окружности (описанной вокруг треугольника BB_1C_1), центр которой принадлежит прямой AC. Следовательно, K и C_1 симметричны друг другу относительно прямой AC. Получаем равенство трёх углов $\angle BCC_1 = \angle C_1CB_1 = \angle B_1CK$. Сумма этих углов равна 180°, стало быть, каждый из них равен 60°, и $\angle ACB = \angle BCC_1 + \angle C_1CB_1 = 120^\circ$.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_3 x + \left(a^2 - 4\right)\log_{3x}\frac{1}{3} - 3 = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 8?

Ответ. $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$.

Решение. Начнем с ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{3}$.

Преобразуем на ОДЗ второе слагаемое:

$$\log_{3x}\frac{1}{3} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 3x} = -\frac{1}{\log_3 3x} = -\frac{1}{1 + \log_3 x}.$$

Теперь при домножении обеих частей на $1 + \log_3 x \neq 0$ (на ОДЗ), мы получим квадратное уравнение относительно $\log_3 x$:

$$\log_3^2 x - 2\log_3 x - (a^2 - 1) = 0$$

.

Решая его, найдем два корня $\log_3 x = a + 1$ и $\log_3 x = 1 - a$. Таким образом, корни относительно x — это $x = 3^{a+1}$ и $x = 3^{1-a}$. Осталось учесть ОДЗ: $x > 0$ при всех значениях a, но также есть условие $x \neq \frac{1}{3}$. Значение $x = \frac{1}{3}$ достигается при $a = -2$ и при $a = 2$ (при этих значениях a в итоге корень только один). Таким образом, окончательный ответ такой: $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$.

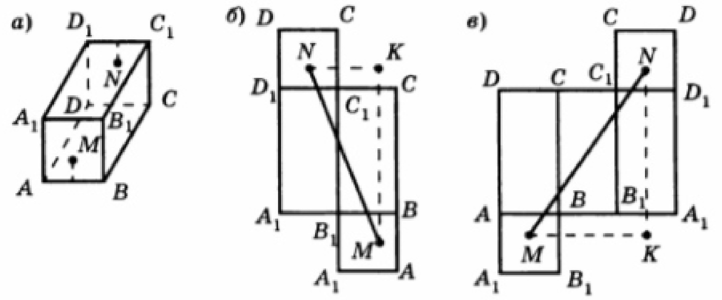
Рассмотрим функцию $f(a) = 3^{a+1} - 3^{1-a}$. Эта функция возрастающая, кроме того, $f(-1) = -8$, $f(1) = 8$. Значит, разность между корнями больше 8 при $a < -1$ и при $a > 1$.

9. В школе учится меньше 100 человек. Часть учеников являются отличниками, а остальные — хорошистами. После сложной контрольной работы 2/7 отличников стали хорошистами, а 2/7 хорошистов — троечниками. При этом отличников и хорошистов стало поровну. Сколько учеников могло быть в школе?

Ответ. 56. **Решение.** Пусть отличников до контрольной было x человек, а хорошистов — y человек. После контрольной отличниками остались $\frac{5x}{7}$ человек, а хорошистов стало $\frac{5y}{7} + \frac{2x}{7}$ человек. Так как по условию их стало поровну, полученные числа равны, а значит $\frac{3x}{7} = \frac{5y}{7}$. Отсюда x делится на 35, то есть $x = 35k$. Тогда из этого же равенства $y = 21k$. Поэтому учащихся в школе $x + y = 35k + 21k = 56k$. Если $k \geqslant 2$, то учащихся получится больше 100. Значит, $k = 1$ и в школе учится 56 человек.

10. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, в котором $AB = AA_1 = 12$, $AD = 30$. Точка M расположена в грани ABB_1A_1 на расстоянии 1 от середины AB и на равных расстояниях от A и B. Точка N принадлежит грани $\mathrm{DCC_1}D_1$ и расположена симметрично точке M относительно центра параллелепипеда. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда между точками M и N.

Ответ. 40. **Решение.**



Рассмотрим 3 варианта:

- Путь пересекает A_1B_1 и D_1C_1. Тогда длина всего пути будет равна $1 + 30 + 11 = 42$.

- Путь пересекает BB_1 и B_1C_1 и C_1D_1. Сделаем развертку (рисунок 2). Тогда длина всего пути (на развертке) $MN = \sqrt{MK^2 + KN^2} = \sqrt{37^2 + 17^2} > 40$
- Путь пересекает AB, BC, B_1C_1, C_1D_1. Сделаем развертку (рисунок 3). Тогда длина всего пути (на развертке) $MN = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$