№19 из ЕГЭ прошлых лет

Составитель: Онлайн Марафон
Дата: 2020-11-19 21:50:54
Файл сгенерирован: 2020-11-19 21:51:35
Количество заданий: 13

Задание 1

На окружности некоторым способом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Задание 2

Известно, что a, b, c, d – попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{7}{23}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 12 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 7d$?

(ЕГЭ 2017, официальный пробный 21.04.2017)

Задание 3

Пусть q – наименьшее общее кратное, а d – наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$. а) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 204? б) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 2? в) Найдите наименьшее значение $\dfrac{q}{d}$.

(ЕГЭ 2018, СтатГрад, 19 апреля 2018)

Задание 4

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причем $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?
б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?
в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1} = (n^2+24)a_n$?

(ЕГЭ 2018, СтатГрад, 26 января 2018)

Задание 5

На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в 3 раза.

а) Может ли на доске быть написано 5 чисел, сумма которых равна 47?

б) Может ли на доске быть написано 10 чисел, сумма которых равна 94?

в) Сколько чисел может быть написано на доске, если их произведение равно 8000?

(ЕГЭ 2017, досрочная волна, резерв)

Задание 6

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Задание 7

Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geqslant 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 60.

б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 8$?

Задание 8

На доске написаны числа $1, 2, 3, ..., 30$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Задание 9

Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; ...; 199\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$?

Задание 10

Для последовательности целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и натурального числа $k \leqslant 8$ верно неравенство $a_k + a_{k+2} < 2a_{k+1}$.

а) Приведите пример последовательности для $a_1 = a_{10} = 1$.

б) Существует ли такая последовательность при $a_1 + a_{10} = 2a_6$?

в) Найдите наибольшее значение выражения $a_1 - a_4 - a_7 + a_{10}$.

Задание 11

Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, ..., a_n, ...$ и $b_1, ..., b_n, ...$ состоят из целых положительных чисел.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_2b_2 + 3a_4b_4 = 5a_3b_3$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $3a_2b_2 + a_6b_6 = 4a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $3a_2b_2 + a_6b_6 \leqslant 108$?

Задание 12

Пусть n – трёхзначное натуральное число, в десятичной записи которого нет нулей.

а) Приведите пример такого n, что его отношение к произведению его цифр равно $\dfrac{109}{18}$.

б) Может ли отношение n к произведению его цифр быть равно $\dfrac{113}{18}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать отношение n к произведению его цифр, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 18?

Задание 13

Дано трехзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 20?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 81?

в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

(ЕГЭ 2013, основная волна)

Ответы

Задача №1: а) нет

б) да

в) 6

Задача №2: а) да

б) нет

в) $4\frac{16}{17}$

Задача №3: а) да

б) нет

в) 5

Задача №4: а) да

б) нет

в) 5

Задача №5: а) да

б) нет

в) 2 или 3

Задача №6: а) $32 \times 92 + 26$, где запись 32×92 означает сумму из 32 слагаемых, каждое из которых равно 92.

б) Нет.

в) 693.

Задача №7: а) $10, 13, 14, 13, 10$.

б) Да.

в) 36.

Задача №8: а) $(1; 3; 30), (2; 4; 27), (5; 7; 20), (6; 8; 17), (9; 11; 10)$.

б) Нет.

в) 6.

Задача №9: а) Да.

б) Нет.

в) 8.

Задача №10: а) $1, 5, 8, 10, 11, 11, 10, 8, 5, 1$

б) нет

в) -18

Задача №11: а) $4, 5, 6, 7, ...$ и $2, 3, 4, 5, ...$

б) Нет

в) 24

Задача №12: а) 763

б) Нет

в) $\dfrac{631}{18}$

Задача №13: а) да

б) нет

в) 11