Школково

Второй семестр по высшей математике.

Интегралы.

14 февраля 2021 г.

Содержание

1 Приложение по вычислению интегралов.

Таблица интегралов:

$$\int dx = x + C; \tag{1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C(n \neq -1) \tag{2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \tag{3}$$

$$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C \tag{4}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{5}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \tag{6}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \tag{7}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+1}\right| + C \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \tag{12}$$

Полезные формулы, которые стоит иметь в виду:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x, \text{где} \sec x = \frac{1}{\cos x}; \tag{13}$$

$$d(\sec x) = \operatorname{tg} x \sec x dx, \quad d(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x dx; \tag{14}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x, \quad d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x \tag{15}$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{16}$$

Есть достаточно легкий метод интегрирования по частям, выручающий в случае, когда правило приходится применять к функции большое количество раз, который заключается в том, что нужно нарисовать две колонки – в одной часть подинтегральной функции дифференцируется, в другой интегрируется. Знаки + и − при этом чередуются. Тяжело запутаться, легко запомнить. Ниже приведен пример решения $\int x^2 e^x dx$.

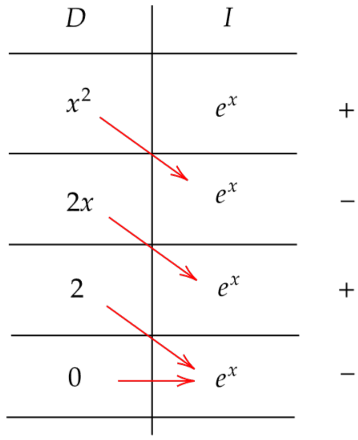

Рис. 1: DI-метод. Ответ: $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - \int 0 \cdot e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

Даже не пытайтесь.

Данные функции не интегрируются в конечном виде:

$$\int e^{-x^2} dx \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \tag{18}$$

$$\int \cos(x^2) dx \tag{19}$$

$$\int \sin(x^2) dx \tag{20}$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \tag{21}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx \tag{22}$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx \tag{23}$$

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx \tag{24}$$

$$\int \frac{\sin x}{x^n} dx \tag{25}$$

$$\int \frac{\cos x}{x^n} dx \tag{26}$$

Тем не менее, данные интегралы довольно полезны в физике, теории вероятностей, теории чисел. Не стоит отчаиваться, если в интеграле проглядывается одна из этих функций – весьма возможно, что подходящая замена вытащит вас из омута (см. задачу 2).

Метод неопределенных коэффициентов.

Суть метода проще всего отразить в решении практических задач. Тут мы отметим, что интегралы ниже мы уже способны решать так или иначе, сводя их к табличным:

$$\int \frac{Adx}{x-a} \qquad \int \frac{Adx}{(x-a)^k}, \quad k = 2, 3... \qquad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \qquad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx, \quad m = 2, 3.. \tag{27}$$

По теореме из анализа, любая функция вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к сумме каких-то простых дробей из четырех, написанных выше.

Подстановки Эйлера.

Пусть необходимо вычислить интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}dx) \tag{28}$$

Тогда:
1) если $a > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x \tag{29}$$

2) если $c > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \tag{30}$$

3) если $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \nu), \quad \lambda, \nu \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda) \tag{31}$$

Метод рационализации подынтегрального выражения.

Пусть необходимо вычислить интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}), m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \tag{32}$$

Тогда заменой

$$t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \tag{33}$$

задача сводится к интегрированию рациональной функции.

Дифференциальный бином.

Пусть необходимо вычислить интеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \tag{34}$$

1) если p – целое

$$t = \sqrt[\lambda]{x}, \quad \lambda = \text{НОК(m, n)} \tag{35}$$

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое

$$t = \sqrt[\nu]{a + bx^n}, \quad \nu \text{ – знаменатель дроби } p \tag{36}$$

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое

$$t = \sqrt{ax^{-n} + b} \tag{37}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Задачу проинтегрировать выражение вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{38}$$

можно свести к интегрированию рациональной функции (всегда) заменой $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{39}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{40}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{41}$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{42}$$

2 Интегралы для решения.

Следующие задачи решаются методом замены переменной.

1. $\int \sin^2 x dx$

2. $\int xe^{x^2}dx$

3. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x-3}}dx$

4. $\int (10x-13)^{19}dx$

5. $\int \operatorname{tg} x dx$

6. $\int \cos^4 x \sin x dx$

7. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$

Сделайте вывод из заданий 6, 7 касательно замены в некоторых (не всех – это слишком сложно!) функциях вида $R(\cos x, \sin x)$

8. $\int \sqrt{x^2-3}\, dx$

9. $\int \sqrt{\dfrac{x-4}{x+4}}\, dx$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ и решите общую задачу $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

Следующие задачи решаются методом интегрирования по частям.

11. $\int \ln x dx$

12. $\int x \cos x dx$

13. $\int \operatorname{arctg} x dx$

14. Воспользовавшись $DI-$методом, либо при помощи обычного продолжительного интегрирования по частям найдите $\int x^6 e^x dx$.

15. $\int x^3 \cos x dx$

16. $\int (\arcsin x)^2 dx$
17. $\int \cos(\ln x) dx$
18. Найти интеграл в общем виде $\int e^{\alpha x} \cos(bx) dx$.
19. Найти интеграл в общем виде $\int x^k \ln^m x dx$.
20. $\int \sec^3 x dx$

Разные задачи (подстановки Эйлера, дифференциальный бином, метод неопределенных коэффициентов, универсальная тригонометрическая подстановка, смешанные задачи, определенные интегралы).

21. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$
22. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$
23. $\int \frac{dx}{x^3+1}$
24. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}, \quad k = 2, 3..$
25. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$
26. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$
27. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$
28. $\int \frac{dx}{x(x^10+2)}$
29. Решить $\int \sqrt{x^2-a^2} dx$ эйлеровыми подстановками.
30. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
31. $\int x\sqrt{x^2-2x+2} dx$
32. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx$
33. $\int\limits_0^\pi \cos^2 x dx$
34. Решить $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} dx$ наиболее быстрый способом.
35. $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin \operatorname{tg} x \cdot \cos(2 \operatorname{tg} x) dx$
36. Решите двумя способами $\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x} dx$
37. Что не так?

$$\int\limits_0^\pi \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = y \\ dy = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int\limits_?^? \frac{dy}{1+y^2}$$

38. $\int\limits_0^{10} [x] dx$
39. $\int max(1, x^2) dx$
40. Гамма-функцией от а называется выражение

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \qquad (43)$$

Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!$$