

ШКОЛКОВО

ВТОРОЙ СЕМЕСТР ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ.

Интегралы.

21 февраля 2021 г.

Содержание

1 Приложение по вычислению интегралов.	2
2 Интегралы для решения.	5



1 Приложение по вычислению интегралов.

Таблица интегралов:

$$\int dx = x + C; \quad (1)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1) \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (3)$$

$$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C \quad (4)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (6)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (12)$$

Полезные формулы, которые стоит иметь в виду:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x, \text{ где } \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad (13)$$

$$d(\sec x) = \operatorname{tg} x \sec x dx, \quad d(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x dx; \quad (14)$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x, \quad d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x \quad (15)$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (16)$$

Есть достаточно легкий метод интегрирования по частям, выручающий в случае, когда правило приходится применять к функции большое количество раз, который заключается в том, что нужно нарисовать две колонки – в одной часть подинтегральной функции дифференцируется, в другой интегрируется. Знаки $+$ и $-$ при этом чередуются. Тяжело запутаться, легко запомнить. Ниже приведен пример решения $\int x^2 e^x dx$.

D	I	
x^2	e^x	+
$2x$	e^x	-
2	e^x	+
0	e^x	-

Рис. 1: DI-метод. Ответ: $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - \int 0 \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

Даже не пытайтесь.

Данные функции не интегрируются в конечном виде:

$$\int e^{-x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \quad (18)$$

$$\int \cos(x^2) dx \quad (19)$$

$$\int \sin(x^2) dx \quad (20)$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{\sin x}{x^n} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{\cos x}{x^n} dx \quad (26)$$

Тем не менее, данные интегралы довольно полезны в физике, теории вероятностей, теории чисел. Не стоит отчаиваться, если в интеграле проглядывается одна из этих функций – весьма возможно, что подходящая замена вытащит вас из омуты (см. задачу 2).

Метод неопределенных коэффициентов.

Суть метода проще всего отразить в решении практических задач. Тут мы отметим, что интегралы ниже мы уже способны решать так или иначе, сводя их к табличным:

$$\int \frac{A dx}{x-a} \quad \int \frac{A dx}{(x-a)^k}, \quad k=2,3,\dots \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx, \quad m=2,3,\dots \quad (27)$$

По теореме из анализа, любая функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к сумме каких-то простых дробей из четырех, написанных выше.

Подстановки Эйлера.

Пусть необходимо вычислить интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (28)$$

Тогда:

1) если $a > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax} \quad (29)$$

2) если $c > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \quad (30)$$

3) если $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \nu)$, $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda) \quad (31)$$

Метод рационализации подынтегрального выражения.

Пусть необходимо вычислить интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}), m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \quad (32)$$

Тогда заменой

$$t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \quad (33)$$

задача сводится к интегрированию рациональной функции.

Дифференциальный бином.

Пусть необходимо вычислить интеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (34)$$

1) если p – целое

$$t = \sqrt[n]{x}, \quad \lambda = \text{НОК}(m, n) \quad (35)$$

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое

$$t = \sqrt[n]{a + bx^n}, \quad \nu - \text{знаменатель дроби } p \quad (36)$$

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое

$$t = \sqrt{ax^{-n} + b} \quad (37)$$

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Задачу проинтегрировать выражение вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (38)$$

можно свести к интегрированию рациональной функции (всегда) заменой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (39)$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (40)$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \quad (41)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (42)$$

2 Интегралы для решения.

Следующие задачи решаются методом замены переменной.

1. $\int \sin^2 x dx$
2. $\int x e^{x^2} dx$
3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-3}} dx$
4. $\int (10x - 13)^{19} dx$
5. $\int \operatorname{tg} x dx$
6. $\int \cos^4 x \sin x dx$
7. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$

Сделайте вывод из заданий 6, 7 касательно замены в некоторых (не всех – это слишком сложно!) функциях вида $R(\cos x, \sin x)$

8. $\int \sqrt{x^2 - 3} dx$
9. $\int \sqrt{\frac{x-4}{x+4}} dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ и решите общую задачу $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

Следующие задачи решаются методом интегрирования по частям.

11. $\int \ln x dx$
12. $\int x \cos x dx$
13. $\int \operatorname{arctg} x dx$
14. Воспользовавшись DI –методом, либо при помощи обычного продолжительного интегрирования по частям найдите $\int x^6 e^x dx$.
15. $\int x^3 \cos x dx$

16. $\int (\arcsin x)^2 dx$
 17. $\int \cos(\ln x) dx$
 18. Найти интеграл в общем виде $\int e^{\alpha x} \cos(bx) dx$.
 19. Найти интеграл в общем виде $\int x^k \ln^m x dx$.
 20. $\int \sec^3 x dx$

Разные задачи (подстановки Эйлера, дифференциальный бином, метод неопределенных коэффициентов, универсальная тригонометрическая подстановка, смешанные задачи, определенные интегралы).

21. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$

22. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$

23. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

24. $\int \frac{A dx}{(x-a)^k}, \quad k=2, 3..$

25. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$

26. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

27. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$

28. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$

29. Решить $\int \sqrt{x^2-a^2} dx$ эйлеровыми подстановками.

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

31. $\int x\sqrt{x^2-2x+2} dx$

32. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx$

33. $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

34. Решить $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ наиболее быстрый способом.

35. $\int_{-\pi}^0 \sin \operatorname{tg} x \cdot \cos(2 \operatorname{tg} x) dx$

36. Решите двумя способами $\int \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$

37. Что не так?

$$\int_0^{\pi} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = y \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dy \end{array} \right| = \int_{?}^? \frac{dy}{1+y^2}$$

38. $\int_0^{10} [x] dx$

39. $\int \max(1, x^2) dx$

40. Гамма-функцией от a называется выражение

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (43)$$

Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

