ТОП-3 гробов в №19

Задача 1. *(МИОО, 2016)* Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_7$ ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел

$$a_1, a_2, ..., a_{2n}$$

больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$?

Задача 2.

а) Сколько существует способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \leq a_i \leq 99, i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \leq a_i \leq 99, i = 0; 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \leq a_i \leq 99, i = 0; 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

Задача 3. На доске записаны числа 1 и 2. За один ход два числа m и n, записанные на доске, заменяются на два числа $2m + 2n - 1$ и $3m + n - 4$ или $2m + 2n - 1$ и $3n + m - 4$.

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел на доске окажется числом 29.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел на доске быть равно 10^{30}?

в) Сделали 2017 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?