1. Докажите, что отображение $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ не может быть линейным оператором, если известно, что для $f_1 = (1,0,1)$, $f_2 = (2,0,0)$, $f_3 = (1,0,2)$ выполнено

$$A(f_1) = (\sqrt{2}, 1)\,, \qquad A(f_2) = (\sqrt{3}, 1)\,, \qquad A(f_3) = (1, \sqrt{2})\,.$$

Замените значение $A(f_3)$ в условии так, чтобы существовал линейный оператор A, удовлетворяющий новому условию.

2. Известно, что $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ – линейный оператор, причём для $f_1 = (1,0,1)$, $f_2 = (2,0,0)$, $f_3 = (0,3,0)$ выполнено

$$A(f_1) = (\sqrt{2}, 1, 0, 0)\,, \qquad A(f_2) = (\sqrt{3}, 1, 0, 0)\,, \qquad A(f_3) = (1, \sqrt{2}, 0, 0)\,.$$

Чему равно $A(v)$, где $v = (1,1,e)$? Выпишите матрицу оператора A в стандартных базисах $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$.

3. Какие из функций $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x + a$ являются линейными операторами?

4. Обозначим через $\mathbb{R}_n[x]$ пространство многочленов с действительными коэффициентами, степени не более n. Задаёт ли формула

$$A(p) = xp' - p$$

а) линейный оператор из $\mathbb{R}_n[x]$ в себя?
б) линейный оператор из $\mathbb{R}_n[x]$ в $\mathbb{R}_{n+1}[x]$?
в) Линейный оператор из $\mathbb{R}_n[x]$ в $\mathbb{R}_{n-1}[x]$?
Там, где это возможно, выпишите матрицы соответствующих операторов в каких-нибудь базисах для $n = 4$.

5. Какой из операторов $A_i\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ является линейным, если

$$A_1(p) = p'' \cdot \int_0^1 e^x p(x)\,dx\,, \qquad A_2(p) = p'' + \int_0^1 e^x p(x)\,dx?$$

Выпишите его матрицу в каких-нибудь базисах.

6. Выпишите в каком-нибудь базисе матрицу оператора $A\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$, заданного соотношениями

$$A(x^k) = (x+1)^k\,, \quad A(1) = 1\,.$$