

1. Известно, что функция $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \rightarrow b-} \int_a^h f(x)dx = \lim_{h \rightarrow a+} \int_h^b f(x)dx ,$$

то есть что обычный интеграл Римана действительно можно понимать как частный случай несобственного.

2. Найдите несобственный интеграл

$$\int_0^1 \ln x \, dx .$$

3. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin^a x} .$$

4. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx .$$

5. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \arcsin \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} \right) dx .$$

6. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{x^4 - x^3 \sin x} dx .$$

7. Почему несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

не такой уж несобственный?

8. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \sin \left(\sin \frac{\ln x}{e^x} \right) dx .$$

9. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \ln |x|}{e^{\sqrt{x}}} dx .$$

10. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^a |\cos x| dx .$$

11. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty} x^a \ln^b x dx .$$

12. Известно, что $f: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ интегрируема на любом отрезке вида $[0; h]$ при $h > 0$ и несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

сходится. Значит ли это, что обязательно

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 ?$$