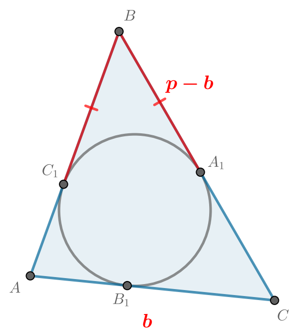
Секретные формулы площади. Тригонометрия в планиметрии

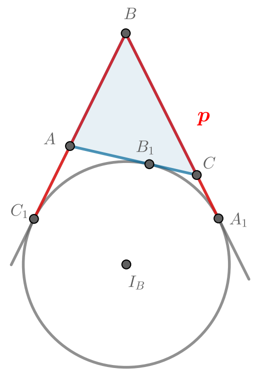
Факт 1 Дан треугольник ABC. $A_1,\ B_1$ и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами $BC = a,\ CA = b$ и $AB = c$ соответственно, p — полупериметр треугольника. Тогда длина касательных из вершины B равна

$$BC_1 = BA_1 = p - b$$



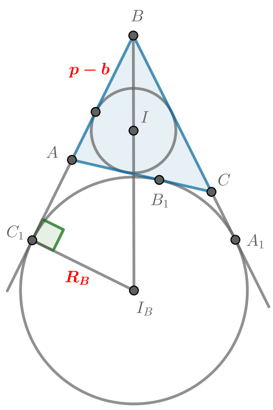
Факт 2 Дан треугольник ABC и его вписанная окружность, касающаяся стороны AC. $A_1,\ B_1$ и C_1 — точки касания окружности с прямыми $BC,\ CA$ и AB соответственно, p — полупериметр треугольника. Тогда длина касательных из вершины B равна

$$BC_1 = BA_1 = p$$



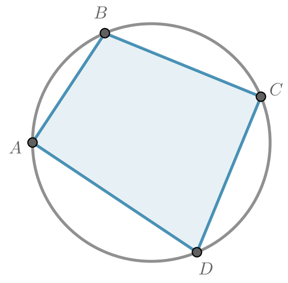
Факт 3 Дан треугольник ABC, p — его полупериметр, $AC = b$, R_B — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Тогда площадь треугольника

$$S = (p - b) \cdot R_B$$



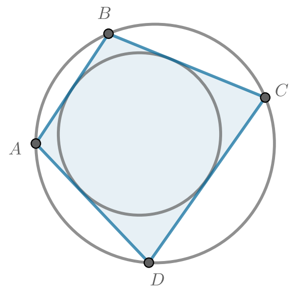
Факт 4 *(Формула Брахмагупты)* Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, p — его полупериметр. Тогда площадь четырехугольника

$$S = \sqrt{(p - AB)(p - BC)(p - CD)(p - DA)}$$



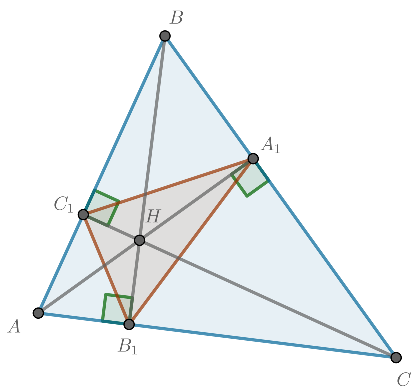
Факт 5 Дан четырехугольник $ABCD$ со сторонами, равными a, b, c и d, который является вписанным и описанным одновременно. Тогда его площадь

$$S = \sqrt{abcd}$$



Факт 6 Дан треугольник ABC, R — радиус его описанной окружности. A_1, B_1 и C_1 — основания высот, опущенных на стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть p_H — полупериметр треугольника $A_1B_1C_1$ (ортотреугольника). Тогда площадь треугольника ABC

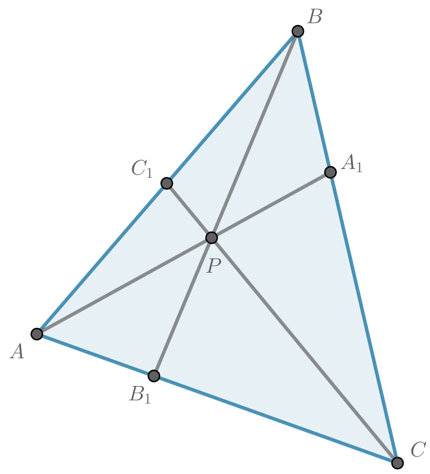
$$S = R \cdot p_H$$



Факт 7 На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Тогда

1. *(Теорема Чевы)* AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется соотношение
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

2. *(Синусная теорема Чевы)* AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется соотношение
$$\frac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle A_1AB} \cdot \frac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle B_1BC} \cdot \frac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle C_1CA} = 1$$



Факт 8 Площадь треугольника со сторонами a, b, c и радиусом описанной окружности R

$$S = \frac{abc}{4R}$$