№1

Найдите корень уравнения $\log_{11}(16+x) = \log_{11} 12$. $\Longleftrightarrow 16+x=12 \Longleftrightarrow x = -4$

№2

На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме “Вписанная окружность”, равна 0, 15. Вероятность того, что это вопрос по теме “Тригонометрия”, равна 0, 3. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

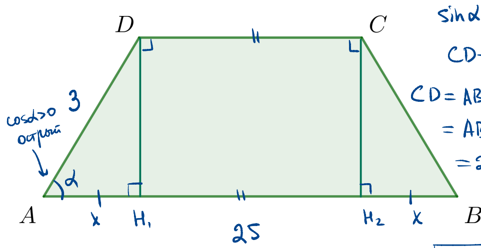
A

B

$P(A \text{ или } B) = p(A) + p(B) = 0{,}45$

№3

Большее основание равнобедренной трапеции равно 25. Боковая сторона равна 3. Синус острого угла равен $\frac{\sqrt{11}}{6}$. Найдите меньшее основание.



$\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$

CD-?

$CD = AB - AH_1 - H_2B =$
$= AB - 2x =$
$= 25 - 2\cdot 2{,}5 =$
$= 20$

$AH_1 = AD\cos\alpha =$
$= 3\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

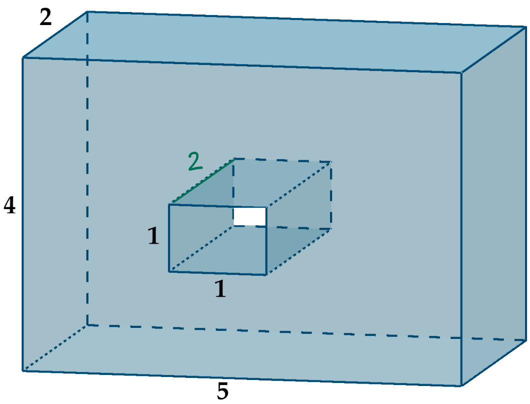
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} =$
$= \sqrt{1-\frac{11}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$

№4

Найдите значение выражения $\underbrace{(49a^2-9)}_{(7a)^2-3^2} \cdot \left(\frac{1}{7a-3} - \frac{1}{7a+3}\right)$. $= \cancel{(7a-3)}\cancel{(7a+3)} \cdot \frac{7a+3-(7a-3)}{\cancel{(7a+3)}\cancel{(7a-3)}} = 3-(-3) = 6$

№5

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



$S_{пов}$-?

параллелепипед

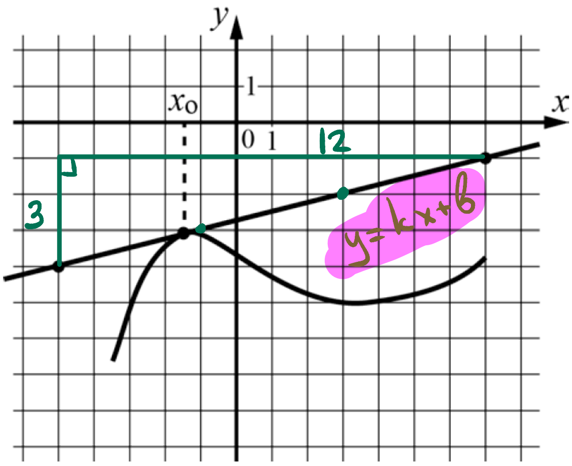
$S = 2(ab+bc+ac) =$
$= 2(2\cdot 4 + 2\cdot 5 + 5\cdot 4) =$
$= 2(8+10+20) = 38\cdot 2 = 76$

$\Delta S = -2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2 +$
$+ 2\cdot 1\cdot 2 = -2+4+4 = 6$

$S_{пов} = S + \Delta S = 82$

№6

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



$f'(x_0) = k = \frac{3}{12} = 0{,}25$

y - возраст-я ф-ия $\rightarrow k>0$

№7

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы:

$$T(t) = T_0 + bt + at^2,$$

где t – время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -\frac{14}{3}$ К/мин^2, $b = 98$ К/мин.
Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

№8

Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 4%. На сколько процентов шесть таких же рубашек дороже куртки?

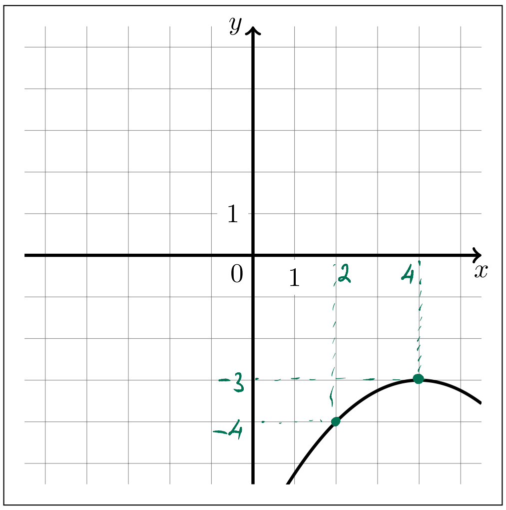
x руб. – цена куртки
0,96x руб. – цена 4 рубашек.

1 рубашка $0{,}96x : 4 = 0{,}24x$ руб.
6 рубашек $0{,}24x \cdot 6 = 1{,}44x$ руб.

$\frac{1{,}44x - x}{x} \cdot 100\% = 44\%$

№9

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — действительные. Найдите значение $f(-1)$.



$y = a(x - x_0)^2 + y_0$

коэф. сжатия/растяж.

$(x_0; y_0)$ – коорд. вершины параболы

$\left.\begin{array}{l} x_0 = 4 \\ y_0 = -3 \end{array}\right) \rightarrow y = a(x-4)^2 - 3$

$(2; -4)$:

$-4 = a(2-4)^2 - 3$

$4a = -1$

$y = -\frac{1}{4}(x-4)^2 - 3$

$y(-1) = -\frac{1}{4}(-1-4)^2 - 3 =$

$= -\frac{25}{4} - 3 = -6{,}25 - 3 = -9{,}25$

№10

В коробке лежат четыре лампочки мощностью 40 Вт, пять мощностью 60 Вт и шесть мощностью 75 Вт. Лампочки вынимают из коробки вслепую одну за другой до тех пор, пока не будет вынута хотя бы одна мощностью 75 Вт. Какова вероятность того, что будет вынуто хотя бы две лампочки?

№11

Найдите наименьшее значение функции $y = 13 + 75x - x^3$ на отрезке $[-5; 5]$.

№12

а) Решите уравнение

$$\log_3 \sqrt{x^2 - 2x} = 2$$

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $[-8; 11]$.

№13

В основании четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $AD = 15$. При этом известны длины некоторых боковых рёбер: $MA = \sqrt{26}$, $MB = \sqrt{10}$, $MC = \sqrt{235}$.

а) Докажите, что MB — высота пирамиды $MABCD$.

б) Найдите угол между MD и плоскостью (ABM).

№14

Решите неравенство

$$2^{2x+4} - 16 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+1} + 16 \leqslant 0$$

№15

15 мая планируется взять кредит в банке сроком на 23 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $t\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 36% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите t.

№16

Окружность, вписанная в треугольник MNK, касается сторон MN, NK и MK в точках A, B и C соответственно.

а) Докажите, что $NB = \dfrac{MN + NK - MK}{2}$.

б) Найдите отношение $MA : AN$, если известно, что $NB : NK = 1 : 3$ и $\angle MNK = 60^\circ$.

№17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(3x^2 - 3x + a^2 + 9)^2 = 12a^2(x^2 - x + 3)$$

имеет ровно один корень.

№18

Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 60 монет достоинством 1 дукат и 60 монет достоинством 5 дукатов.

а) Получится ли поделить все деньги поровну между 18 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все деньги поровну между 40 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

№7

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы:

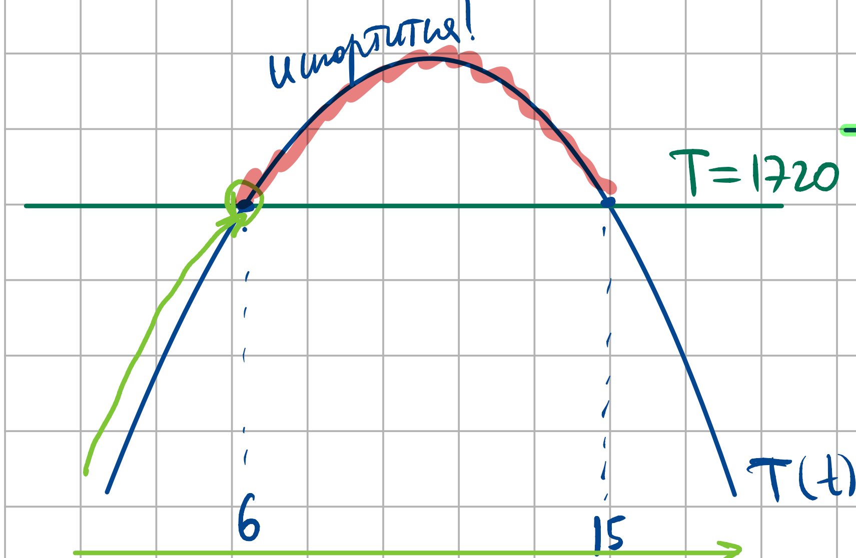
$$T(t) = T_0 + bt + at^2,$$

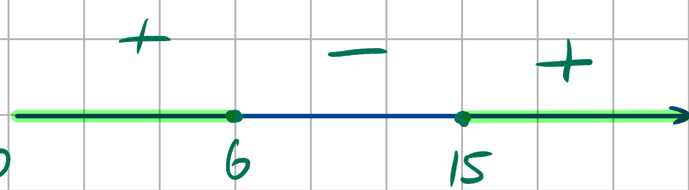
где t – время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -\frac{14}{3}$ К/мин^2, $b = 98$ К/мин.
Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

$$T(t) = -\frac{14}{3}t^2 + 98t + 1300 \leq 1720$$

$$-\frac{14}{3}t^2 + 98t - 420 \leq 0 \quad \Big| \cdot \left(-\frac{3}{14}\right)$$

$$t^2 - 21t + 90 \geq 0 \iff (t-6)(t-15) \geq 0. \quad t \in (-\infty; 6] \cup [15; +\infty)$$





6

№10

В коробке лежат четыре лампочки мощностью 40 Вт, пять мощностью 60 Вт и шесть мощностью 75 Вт. Лампочки вынимают из коробки вслепую одну за другой до тех пор, пока не будет вынута хотя бы одна мощностью 75 Вт. Какова вероятность того, что будет вынуто хотя бы две лампочки?

A С первого раза 75Вт — 1 лампочка

B Со второго, третьего, и т.д. — хотя бы 2 лампочки

$B = \bar{A}$

$$\boxed{p(A)+p(\bar{A}) = 1}$$

$$p(\text{вытяну 75Вт с} \geq 2 \text{ попытки}) = 1 - p(\text{с первого раза}) = 1 - \frac{6}{15} = 1 - 0{,}4 =$$

$$= 0{,}6$$

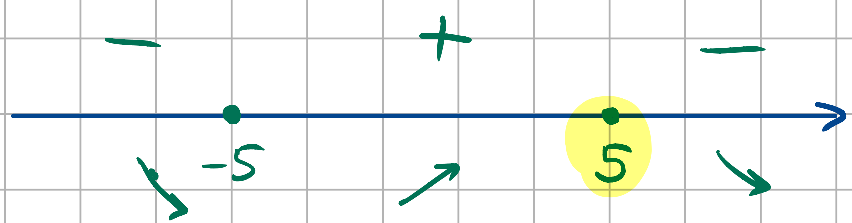
№11

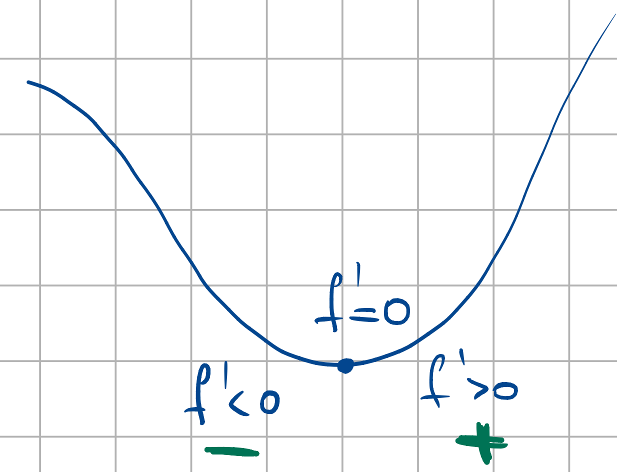
Найдите наименьшее значение функции $y = 13 + 75x - x^3$ на отрезке $[-5; 5]$.

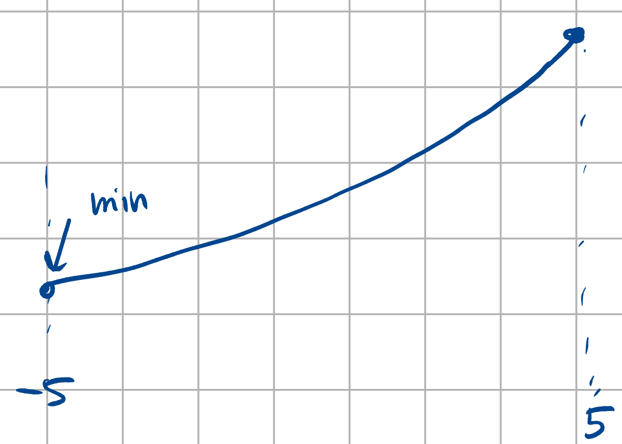
$y' = 75 - 3x^2 \vee 0$

$-3(x^2 - 25) \vee 0$

$-3(x-5)(x+5) \vee 0$







$y(-5) = 13 + 75 \cdot (-5) - (-5)^3 = 13 - 375 + 125 =$

$= 13 - 250 = -237$

№12

а) Решите уравнение

$$\log_3 \sqrt{x^2 - 2x} = 2$$

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $[-8; 11]$.

$\log_3 \sqrt{x^2-2x} = 2$

ОДЗ: $x^2-2x>0 \iff x(x-2)>0$

$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

$\sqrt{n} = n^{1/2}, \ n>0$

$\log_3 (x^2-2x) = 4$

$\log_3 (x^2-2x) = \log_3 81$

$x^2-2x-81=0$

$D = 4+4\cdot 81 = 4\cdot 82 = (2\sqrt{82})^2$

$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{82}}{2} = 1 \pm \sqrt{82}$ – это те числа,

где $x^2-2x=81 \Rightarrow x^2-2x>0$

б) $-8 < 1+\sqrt{82} < 1+\sqrt{100} = 11$

$\Rightarrow 1+\sqrt{82} \in [-8; 11]$

$1-\sqrt{82} < 1-\sqrt{81} = -8$

$\Rightarrow 1-\sqrt{82} \notin [-8; 11]$.

Ответ: а) $1 \pm \sqrt{82}$

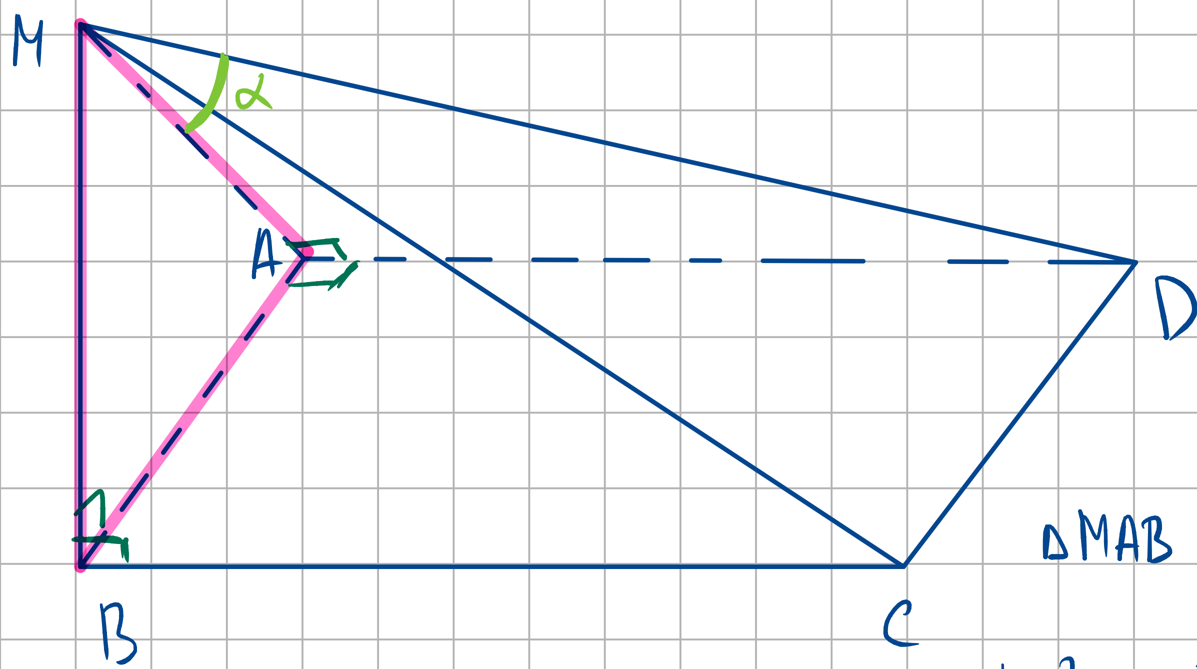
б) $1+\sqrt{82}$.

№13

В основании четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $AD = 15$. При этом известны длины некоторых боковых рёбер: $MA = \sqrt{26}$, $MB = \sqrt{10}$, $MC = \sqrt{235}$.

а) Докажите, что MB — высота пирамиды $MABCD$.

б) Найдите угол между MD и плоскостью (ABM).



$AB = 4$

$AD = 15$

$MA = \sqrt{26}$

$MB = \sqrt{10}$

$MC = \sqrt{235}$

ΔMAB: $MA^2 = 26$

$MB^2 + AB^2 = 10 + 16$

$MA^2 = MB^2 + AB^2 \to$ по обр. т. Пифагора $\angle ABM = 90°$

ΔMBC: $MC^2 = 235 = BC^2 + MB^2 = AD^2 + MB^2 = 15^2 + 10 = 225 + 10 = 235 \to$ по обр. т. Пифагора $\angle MBC = 90°$. Т.к. $\angle ABM = \angle MBC = 90° \to MB \perp (ABC) \to MB$ – высота. Чтд.

б) $\angle MAD = 90°$ по ТТП $(MB \perp (ABC),\ BA \perp AD)$. $\angle MAD = 90°,\ \angle BAD = 90° \to AD \perp (BAM)$

A - проекция D на $(BAM) \to$ искомый угол $\angle AMD$. $\operatorname{tg}\alpha = AD / AM = \dfrac{15}{\sqrt{26}}$

$\angle AMD = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{15}{\sqrt{26}}\right)$

14. $2^{2x+4} - 16\cdot 2^{x+3} - 2^{x+1} + 16 \leqslant 0$

$2^x = t,\quad 2^{2x} = t^2$

$2^{2x+4} = 2^4\cdot 2^{2x} = 16t^2.\quad -16\cdot 2^{x+3} = -16\cdot 2^3\cdot 2^x = -128t.\quad -2^{x+1} = -2t$

$16t^2 - 128t - 2t + 16 \leq 0 \Longleftrightarrow 16t^2 - 130t + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 8t^2 - 65t + 8 \leq 0$

$8t^2 - 65t + 8 = 0.\quad D = 65^2 - 4\cdot 8\cdot 8 = 65^2 - 16^2 = (65-16)(65+16) = 49\cdot 81 =$

$= (7\cdot 9)^2 = 63^2.\qquad t = \dfrac{65\pm 63}{16} = \dfrac{1}{8};\ 8.$

$8\left(t - \frac{1}{8}\right)(t-8) \leq 0 \Longleftrightarrow (8t-1)(t-8) \leq 0$

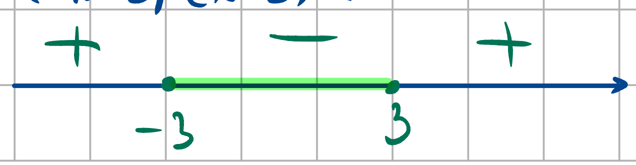
$(2^3\cdot 2^x - 1)(2^x - 2^3) \leq 0$

$(2^{x+3} - 2^0)(2^x - 2^3) \leq 0$

Т.к. 2^x монот. возрастает, то $2^{x+3} - 2^0$ будет иметь тот же знак, что и $x+3-0$

Аналогично $2^x - 2^3$ будет иметь тот же знак, что и $x-3$

$(x+3)(x-3) \leq 0$



Ответ: $x \in [-3;3]$

№15

15 мая планируется взять кредит в банке сроком на 23 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $t\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

дифференц. платёж.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 36% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите t.

S руб. – сумма кр.

$p = t/100$ – на какую часть долг увеличивается каждый месяц.

Т.к. долг равномерно уменьшается, то каждый мес. долг уменьш. на $\frac{S}{23}$ руб.

№	Долг до начисл. %	Долг после начисл. %	Выплаты
1	S	$S+Sp$	$\frac{1}{23}S+Sp$
2.	$\frac{22}{23}S$	$\frac{22}{23}S+\frac{22}{23}Sp$	$\frac{1}{23}S+\frac{22}{23}Sp$
3.	$\frac{21}{23}S$	$\frac{21}{23}S+\frac{21}{23}Sp$	$\frac{1}{23}S+\frac{21}{23}Sp$
…	…	…	…
23.	$\frac{1}{23}S$	$\frac{1}{23}S+\frac{1}{23}Sp$	$\frac{1}{23}S+\frac{1}{23}Sp$

Образуют арифм. прогрессию с $d=-\frac{1}{23}Sp$

$\Rightarrow$ Сумма выплат:

$$\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{\frac{1}{23}S+Sp+\frac{1}{23}S+\frac{1}{23}Sp}{2}\cdot 23 = \frac{S+23Sp+S+Sp}{2} = S+12Sp$$

Т.к. общая сумма выплат на 36% больше, чем S:

$$S+12Sp = 1{,}36S$$

$$12Sp = 0{,}36S$$

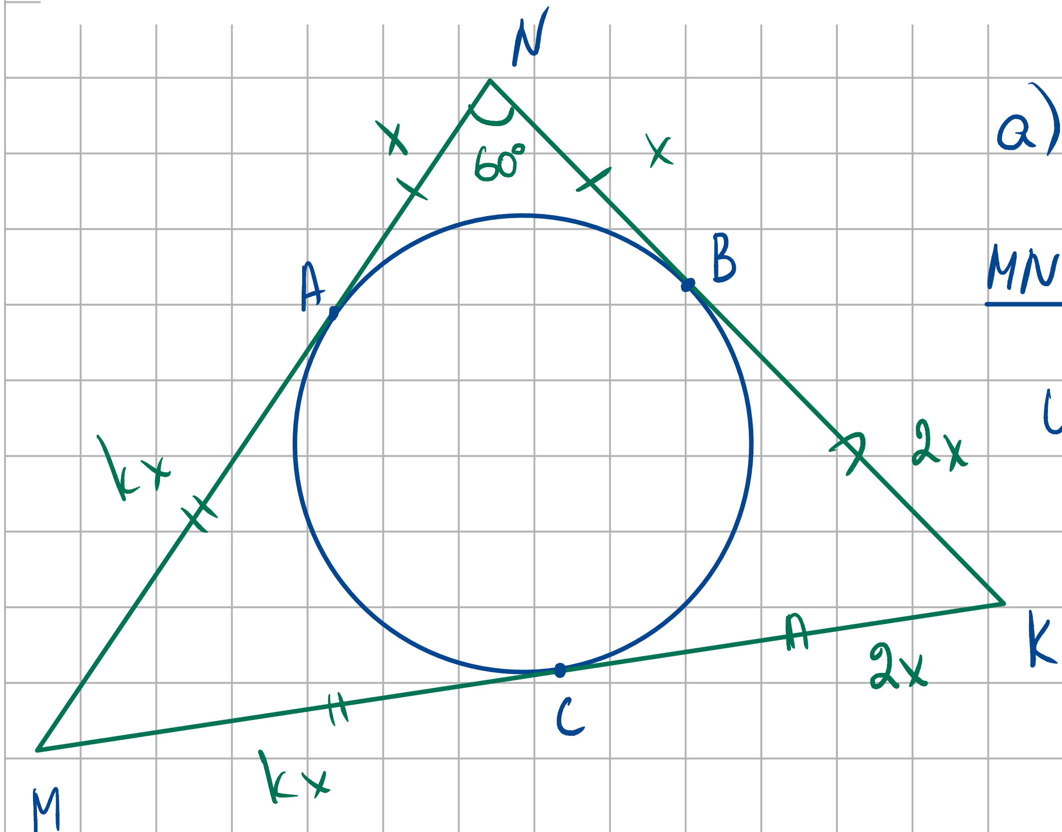
$$p=\frac{0{,}36}{12}=0{,}03 \rightarrow t=100p = 3\%$$

№16

Окружность, вписанная в треугольник MNK, касается сторон MN, NK и MK в точках A, B и C соответственно.

а) Докажите, что $NB = \dfrac{MN + NK - MK}{2}$.

б) Найдите отношение $MA : AN$, если известно, что $NB : NK = 1 : 3$ и $\angle MNK = 60°$.



а) $\overset{x}{AN = NB}$, $\overset{y}{CK = BK}$, $\overset{z}{AM = MC}$

$$\frac{MN + NK - MK}{2} = \frac{x + z + x + y - y - z}{2} = x = NB$$

Чтд.

б) $NB : NK = x : (x + y) = \frac{1}{3} \to$

$y = 2x$. Пусть $z = kx$. Т. cos для ΔMNK:

$$MK^2 = MN^2 + NK^2 - 2MN \cdot NK \cos\angle N \Leftrightarrow (k+2)^2 \cancel{x^2} = (k+1)^2 \cancel{x^2} + 9\cancel{x^2} - \cancel{2}\cancel{x^2}(k+1) \cdot 3 \cdot \cancel{1/2}$$

$$(k+2)^2 - (k+1)^2 = 9 - 3(k+1)$$

$$2k + 3 = 9 - 3k - 3$$

$$5k = 3 \Leftrightarrow k = 0{,}6 \to MA : AN = k.$$

0,6

Найти все a, при котором $(3x^2 - 3x + a^2 + 9)^2 = 12a^2(x^2 - x + 3)$ имеет 1 корень.

$\underbrace{3x^2-3x+9}_{3t}$, $\underbrace{x^2-x+3}_{t}$

$$(3t+a^2)^2 = 12a^2t \Leftrightarrow 9t^2 + a^4 + \underbrace{6a^2t - 12a^2t}_{-6a^2t} = 0$$

$$(3t-a^2)^2 = 0 \Leftrightarrow 3t = a^2$$

$$3x^2 - 3x + 9 - a^2 = 0 \quad - \text{ 1 корень} \Leftrightarrow D = 0$$

$$D = 9 - 4\cdot 3\cdot(9-a^2) = 12a^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{\cancel{99}^{33}}{\cancel{12}_4} \Leftrightarrow \boxed{a = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}}$$

№18

Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 60 монет достоинством 1 дукат и 60 монет достоинством 5 дукатов.

а) Получится ли поделить все деньги поровну между 18 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все деньги поровну между 40 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

1д × 60
5д × 60

а) $1 \cdot 60 + 5 \cdot 60 = 6 \cdot 60 = 360$д – всего.
$360 : 18 = 20$д – каждому.

Ответ: да, 15 пиратам – 4 по 5д., 3 пиратам – 20 по 1д.

б) $360 : 40 = 9$д. → пирату можно выдать не более 1 монеты 5д. → всего мы выдадим не более 40 монет по 5д., а всего 60 ⟹ нельзя.

в) Рассмотреть остатки, которые дают выплачиваемые суммы при дел. на 5.

Сумма этих остатков $\equiv_5$ кол-во 1д. монет   n пиратов $4n = 60 \to n = 15$

16? $\cancel{16 \cdot 4 = 64 > 60}$, но $360 \vdots 5$ → кол-во выданных 1д. монет $\vdots 5$.   60.