# 12 часов №19 Школково

*Подробный конспект*

## Содержание

# 1 Основная теорема арифметики и ее применение

## 1.1 Необходимые определения и ОТА

**Определение** Натуральное число $p$ является *простым*, если оно имеет ровно два различных делителя: 1 и $p$.

**NB** Заметим, из данного определения следует, что число 1 **не является** простым. К тому же число 2 является **единственным четным простым** числом.

**Определение** *Наибольшим общим делителем* (НОД) двух чисел $m$ и $n$ называется наибольшее натуральное число, на которое делятся и $m$, и $n$. Допустимые обозначения: НОД$(m, n)$; $(m, n)$.

Аналогом слова "делится" является значок $\vdots$, то есть запись $a \vdots b$ означает, что $a$ делится на $b$. Например, из определения выше очевидно, что $m \vdots (m, n)$ и $n \vdots (m, n)$.

**Определение** *Наименьшим общим кратным* (НОК) двух чисел $m$ и $n$ называется наименьшее натуральное число, которое делится и на $m$, и $n$. Допустимые обозначения: НОК$(m, n)$; $[m, n]$.

Иными словами НОК — это наименьшее натуральное $k$ такое, что $k \vdots m$ и $k \vdots n$.

**Теорема** *(Основная теорема арифметики или ОТА)*

Любое натуральное число $n > 1$ единственным образом представимо в виде

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}, \text{ где } p_1 < p_2 < \ldots < p_k \text{ — простые числа, } \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ — натуральные.}$$

Менее формально можно сказать, что по ОТА любое натуральное число, кроме 1, раскладывается на простые множители единственным образом.

**NB** Разложение числа по ОТА, записанное выше, также называют *каноническим*.

**Определение** Два числа $a$ и $b$ называются *взаимно простыми*, если в их разложениях нет ни одного общего простого множителя.

Очевидно, что данное определение взаимно простых эквивалентно следующему:

**Определение** Два числа $a$ и $b$ называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1.

## 1.2 Задачи на ОТА

**2.** Существует ли натуральное число с произведением цифр 2310?

**Ответ**

Не существует

**Решение**

Разложим число 2310 на простые множители, получим $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Допустим, что существует некоторое простое число, произведение цифр которого равно 2310, тогда, как видно по разложению на простые множители, произведение цифр должно делиться на 11. Однако ни одна ненулевая цифра не делится на 11, значит, такое невозможно.

**NB** Заметим, что нам было важно, что 11 является простым и не может быть разложено на более мелкие множители $\Rightarrow$ одна из цифр должна быть кратна 11, что приведит к противоречию.

**3.** Сколько существует пар простых чисел, которые отличаются друг от друга на 15?

**Ответ**

Единственная пара 2 и 17

**Решение**

Уже было замечено, что 2 — единственное четное простое число. Воспользуемся этим.

Пусть мы имеем $p_1 + 15 = p_2$. Допустим, $p_1$ нечетно, тогда левая часть равенства четна $\Rightarrow p_2$ — некоторое четное простое, большее 15. Получаем противоречие. Остается случай, когда $p_1$ четно, то есть фактически равно 2. Получаем пару 2 и 17.

**6.** Разделите числа 2, 4, 6, 10, 22, 25, 40, 66 на две группы так, чтобы произведения в двух группах были равны. Сколькими способами это можно сделать?

**Ответ**

Единственный допустимый способ:

$\mathrm{I} : 22 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 4$

$\mathrm{II} : 66 \cdot 10 \cdot 40$

**Решение**

Разложим каждое из чисел на простые множители:

$$2 = 2$$
$$4 = 2^2$$
$$6 = 2 \cdot 3$$
$$10 = 2 \cdot 5$$
$$22 = 2 \cdot 11$$
$$25 = 5^2$$
$$40 = 2^3 \cdot 5$$
$$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Заметим, что равенство произведений чисел в группах равносильно тому, что равны наборы простых множителей в них одинаковые. Будем постепенно формировать группы.

Числа 22 и 66 — единственные, содержащие в разложении множитель 11 $\Rightarrow$ они должны быть помещены в разные группы. Для удобства назовем I группу с числом 22 и II группу с числом 66.

$$\mathrm{I} : 2 \cdot 11$$
$$\mathrm{II} : 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Заметим, что из оставшихся чисел только 6 содержит в разложении 3, причем группа II уже содержит 3, а I не содержит. Значит, число 6 должно оказаться в I группе.

$$\mathrm{I} : (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3)$$
$$\mathrm{II} : 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Посмотрим на множитель 5. 10 и 40 содержат его в первой степени, 25 — во второй $\Rightarrow$ в одной из групп должно оказаться число 25, а в другой — пара чисел 10 и 40. Чтобы понять, что в какой группе, рассмотрим простой множитель 2. Во все числа в совокупности 2 входит в 10 степени, значит, итоговая степень 2 в каждой из групп должны быть равна 5. Пара 10 и 40 содержит 2 в 4 степени, если мы поместим ее в первую группу, степень двойки в ней составит уже 2+4=6, т.е. превысит 5. Остается единственный допустимый способ расположения по группам чисел, кратных 5.

$$\mathrm{I} : (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (5^2)$$
$$\mathrm{II} : (2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2^3 \cdot 5)$$

Остались числа 2 и 4, их располагаем единственным подходящим способом в группу I, получаем итоговое разбиение. Заметим, что нигде не было альтернатив, мы просто "восстанавливали"ситуацию, т.е. способ является единственным по построению.

$$\mathrm{I} : (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (5^2) \cdot 2 \cdot (2^2) = 22 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 4$$
$$\mathrm{II} : (2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2^3 \cdot 5) = 66 \cdot 10 \cdot 40$$

**8.** Прямоугольник с целыми длинами сторон разбит на двенадцать квадратов со следующими длинами сторон: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Каков периметр прямоугольника?

**Ответ**

90

**Решение**

Найдем площадь $S$ прямоугольника, она равна сумме площадей квадратов, на которые он разбит

$$S = 2 \cdot (2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2) = 2 \cdot (4 + 9 + 25 + 49 + 64 + 81) = 464$$

Разложим на простые, получим $464 = 2^4 \cdot 29$. Площадь равна произведению сторон, рассмотрим все возможные способы представления числа 464 в виде произведения двух множителей, пользуясь его разложением: $1 \cdot 464$; $2 \cdot 232$; $4 \cdot 116$; $8 \cdot 58$; $16 \cdot 29$. Заметим, что в каждом представлении, кроме последнего, один из множителей меньше 9, т.е. одна из сторон такого прямоугольника меньше 9. Это противоречит тому, что такой прямоугольник в своем разбиении содержит квадрат со стороной 9, значит, единственный возможный вариант достигается при длинах сторон 16 и 29. Периметр в таком случае равен 90.

## 1.3 Важные факты про НОК и НОД

**Факт 1** $a$ и $b$ — натуральные числа. Их НОД обозначим $(a, b)$, НОК обозначим $[a, b]$. Тогда выполняется соотношение

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b],$$

то есть произведение НОК и НОД равно произведению чисел.

**Доказательство**

Возьмем произвольное простое число $p$ и докажем, что оно содержится в разложениях на простые левой и правой частей в одинаковой степени. Из этого будет сразу следовать равенство.

Пусть степень вхождения $p$ в разложение на простые множители числа $a$ равна $\alpha$, в разложение $b$ — $\beta$ ($\alpha$ и $\beta$ могут быть равны нулю). Тогда степень вхождения $p$ в левую часть равна $\alpha + \beta$.

Степень вхождения $p$ в $(a, b)$ равна $\min(\alpha, \beta)$. Действительно, больше она быть не может, т.к. в этом случае одно из чисел не будет делиться на НОД, что противоречит определению, меньше она быть не может, т.к. возникает противоречие с максимальностью НОД. По аналогичным соображениям степень вхождения $p$ в $[a, b]$ равна $\max(\alpha, \beta)$.

Итого имеем, что в левую часть $p$ входит в степени $\alpha + \beta$, а в правую в степени $\min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$, но очевидно, что $\alpha + \beta = \min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$ для любых $\alpha,\ \beta$. Следовательно для любого простого $p$ верно, что оно входит в разложения обеих частей в равной степени, значит, равенство выполняется.

**Факт 2** $a$ и $b$ — натуральные числа, их НОД равен $d$. Тогда

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1,$$

то есть такие числа взаимно просты.

**Доказательство**

Допустим противное, пусть $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ делится на некоторое простое $p$. Тогда $\frac{a}{d} \vdots p$ и $\frac{b}{d} \vdots p$. Положим $d_1 = p \cdot d$. Тогда $a \vdots d_1,\ b \vdots d_1,\ d_1 > d$, получили противоречие с тем, что $d$ — НОД $a$ и $b$.

## 1.4 Формула для количества делителей числа

**Лемма** Пусть натуральное число $n$ имеет канонический вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}, \text{ где } p_1 < p_2 < \ldots < p_k \text{ — простые числа, } \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ — натуральные.}$$

Тогда общее количество $D_n$ различных делителей числа $n$ выражается формулой

$$D_n = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$$

**Доказательство**

Определим произвольный делитель $d$ числа $n$ как некоторое число, в разложение которого каждый простой множитель входит в степени не большей, чем степень вхождения этого простого множителя в разложение числа $n$. Это можно записать так

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots p_k^{\beta_k}, \text{ где } 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, 0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2, \ldots, 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$$

Таким образом, набор соответствующих $\beta$ единственным образом задает делитель. Посчитаем количество таких наборов. Есть $\alpha_i + 1$ способов выбрать $b_i$ из набора $0, 1, \ldots, \alpha_i$, каждое $b_i$ выбирается независимо, перемножив, получаем нужную формулу.

## 1.5 Определения НОК и НОД для произвольного количества чисел и №19 из ЕГЭ

**Определение** *Наибольшим общим делителем* для набора из $n$ чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое число из набора.

**Определение** *Наименьшим общим кратным* для набора из $n$ чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое число из набора.

**Задание 19**

а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.

б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трех подряд идущих чисел равнялся 1?

в) Какое наибольшее количество различных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

**Ответ**

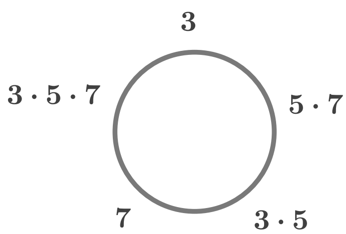
а) 3, 35, 15, 7, 105

б) Нет

в)

**Решение**

а) Разложим 105 на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Зная разложение, несложно подобрать нужные 5 чисел, например




б) Допустим, это возможно.

Возьмем произвольные соседние числа $a$ и $b$, тогда $[a, b] = 300$. По определению $[a, b] \vdots a \Rightarrow 300 \vdots a$, аналогично для $b$. Значит, каждое число в кругу является делителем числа 300.

Разложим 300 на простые множители, получим $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Попробуем выделить среди делителей числа 300 те, которые точно не могут быть использованы.

Сразу можем исключить 1, т.к. с обеих сторон от нее может стоять число 300, чтобы не нарушать условие про НОК соседей. Однако числа не могут повторяться.

Далее, рассмотрим делители 300, которые содержат 2 ровно в первой степени. Допустим, некоторое число $2t$, где $t$ нечетно, стоит в кругу. Рассмотрим соседа $s$ числа $2t$. По условию $[s, 2t] = 300 \vdots 4$, причем $2t$ не делится на $4 \Rightarrow s \vdots 4$. Аналогично и второй сосед $r$ числа $2t$ также делится на 4. По условию должно выполняться $(s, 2t, r) = 1$, однако $s \vdots 4$, $2t \vdots 2$, $r \vdots 4$, т.е. их НОД должен быть четным. Получаем противоречие, значит, ни один из делителей числа 300 вида $2t$, где $t$ нечетно, не мог быть использован.

Выпишем все оставшиеся делители, их 11

$$3,\ \underline{5},\ 2^2,\ 5^2,\ \underline{3\cdot 5},\ 2^2\cdot 3,\ \underline{2^2\cdot 5},\ 3\cdot 5^2,\ 2^2\cdot 5^2,\ \underline{2^2\cdot 3\cdot 5},\ 2^2\cdot 3\cdot 5^2$$

Выделены те делители, которые содержат 5 ровно в первой степени. Их мы можем исключить по соображениям, аналогичным приведенным выше. Заметим, что нам было совершенно несущественно, что именно 2 входит в первой степени, и при замене 2 на произвольное простое число ничего не изменится. Итого, неисключенными остались $11 - 4 = 7$ чисел, а по кругу должны быть расставлены 8. Противоречие.

в) Допустим, мы имеем корректную расстановку на некоторое количество чисел. Возьмем произвольные соседние числа $a$ и $b$, тогда $[a, b] = 60$. По определению $[a, b] \vdots a \Rightarrow 60 \vdots a$, аналогично для $b$. Значит, каждое число в кругу является делителем числа 60.

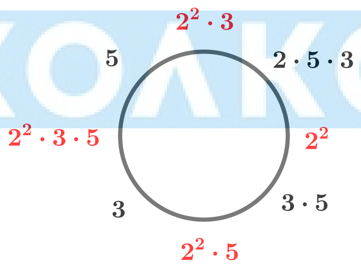
Разложим 60 на простые множители, получим $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$. Выпишем все его делители

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 2^2,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5$$

Получили 12 различных делителей. Проверить себя можно, посчитав количество делителей по формуле: $3\cdot 2\cdot 2 = 12$.

В каждой паре соседей НОК должен быть равен 60, а значит, кратен $4 \Rightarrow$ в каждой паре соседних хотя бы одно из чисел должно быть кратно $4 \Rightarrow$ не должно быть такого, что два числа подряд по кругу не делятся на 4. Получили, что хотя бы половина чисел в кругу кратна 4. Всего в нашем списке 4 числа, кратных $4 \Rightarrow$ общее количество чисел в кругу не превосходит 8.

Построим пример на 8 (красным для удобства восприятия обозначены числа, кратные 4).



# 2 "Очки по модулю". Сравнения по модулю в задачах ЕГЭ

## 2.1 Важнейшие свойства сравнений

**Определение** Целые числа $a$ и $b$, разность которых делится на натуральное число $m$, называют *сравнимыми по модулю $m$*. Записывают так: $a \equiv b \pmod{m}$

**NB** Для неотрицательных чисел определение можно интерпретировать так, что $a$ и $b$ дают равные остатки при делении на $m$.

**Свойства сравнений**

Везде ниже все числа целые, модуль $m$ — натуральный.

1. Сравнения можно умножать на число

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ak \equiv bk \pmod{m}$$

2. Сравнения можно складывать

$$\left.\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a + b \equiv c + d \pmod{m}$$

3. Сравнения можно перемножать

$$\left.\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ab \equiv cd \pmod{m}$$

4. Сравнения можно возводить в степень

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

## 2.2 А зачем нам вообще это нужно?

Фактически вышеперечисленные свойства позволяют нам удобнее работать с остатками и делимостью. К примеру, раньше, если нам нужно было вычислить остаток, который дает какое-то сложное выражения (содержащее операции умножения, сложения, вычитания и возведения в степень, скобки, все это в произвольном порядке) при делении на некоторое число, мы бы стали вычислять значение это выражения и лишь в конце искать остаток результата. Теперь же мы можем заменить все числа на их остатки, что может существенно упростить вычисления, а также заменять результат на его остаток по ходу вычисления. Теперь это легально! Следующая задача иллюстрирует, что здесь имеется в виду.

**1.** Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится на 999.

**Решение**

По сути, нам нужно доказать, что

$$1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24 \equiv 0 \pmod{999}$$

Мы можем заменить любое число на сравнимое с ним по модулю 999, значит,

$$1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 24 \equiv 0 \pmod{999}$$

## 2.3 Признаки равноостаточности по модулям 9 и 3

**Лемма** Любое натуральное число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 9.

**Доказательство**
Представим число в виде его десятичной записи $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$. Хотим доказать, что

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_0 \pmod 9$$

Распишем

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_0 \cdot 10^0$$

Несложно понять, что для любого целого неотрицательного $i : 10^i \equiv 1 \pmod 9$. Это следует, например, из свойства сравнений про возведение в степень. Тогда

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_0 \cdot 10^0 \equiv a_k \cdot 1 + a_{k-1} \cdot 1 + \ldots + a_0 \cdot 1 \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_0 \pmod 9$$

**Лемма** Любое натуральное число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 3.

**Доказательство**
Аналогично предыдущей лемме, оставим в качестве упражнения читателю.

## 2.4 Остатки отрицательных чисел

Остановимся чуть подробнее на остатках отрицательных чисел, потому что иногда на первый взгляд то, как они устроены, может показаться неинтуитивным.

**Определение** Определим *остаток* числа $a$ по модулю $m$ как наименьшее целое неотрицательное число, которое нужно **вычесть** из $a$, чтобы разность делилась на $m$.

Можно заметить связь этого определения с определением сравнимых по модулю чисел. По данному только что определению $-7$ дает остаток 3 по модулю 10 (т.к. из $-7$ нужно вычесть минимум 3, чтобы разность делилась на 10), $-99$ дает остаток 1 по модулю 100, а $-1$ дает остаток $m-1$ по любому модулю $m$.

**5.** На какую цифру оканчивается число $9^{2015} + 7^{2016}$?

**Решение**
Нам нужно найти, с чем сравнима данная сумма по модулю 10.

$$9 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \pmod{10}$$
$$7 \equiv -3 \pmod{10} \Rightarrow 7^{2016} \equiv (-3)^{2016} \equiv 9^{1008} \equiv (-1)^{1008} \equiv 1 \pmod{10}$$

Получили что сумма сравнима с $-1 + 1 = 0$ по модулю 10, а значит, оканчивается нулем. Если какие-то сравнения в цепочках не до конца понятны, рекомендуется обратиться к основным свойствам и проверить по определению.

## 2.5 №19 из ЕГЭ

**Задание 19**

На доске были написаны несколько натуральных чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 70, если изначально на доске по одному разу были написаны все натуральные числа от 27 до 38 включительно?

б) Могло ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 6, если изначально на доске по одному разу были написаны квадраты целых чисел от 112 до 217 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты целых чисел от 112 до 217 включительно. Какое наибольшее значение может иметь отношение оставшихся на доске чисел?

**Ответ**

а) Да

б) Нет

в) $\left(\frac{215}{112}\right)^2$

**Решение**

а) Фактически нам разрешено стирать пары чисел, сравнимых по модулю 5. Можно стирать числа, например, следующим образом:

$$\{31; 36\},\quad \{30; 35\},\quad \{29; 34\},\quad \{28; 38\},\quad \{27; 32\},$$

тогда на доске останутся 33 и 37, сумма которых и есть 70.

б) Рассмотрим отдельно процесс стирания чисел, кратных числу 5. Так как 5 — простое, квадрат числа делится на 5 тогда и только тогда, когда само это число делится на 5. Итак, пусть $n \in \mathbb{N}$, $(5n)^2$ — одно из чисел на доске ($112 \leqslant 5n \leqslant 217$). Пусть при этом число $(5n)^2$ было стёрто вместе с некоторым числом $a^2$, тогда

$$(5n)^2 - a^2 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow a^2 \equiv (5n)^2 \equiv 0 \pmod 5,$$

откуда следует, что $a^2$ делится на 5, следовательно, и само $a$ должно делиться на 5.

Мы только что доказали, что числа, кратные пяти, могут стираться только в паре друг с другом. Но сколько их на доске? Их количество равно $(215-115)/5+1 = 21$, то есть все числа, кратные 5, в принципе нельзя стереть, так как одному из них обязательно не найдётся пары, ведь их количество нечётно.

Произведение двух чисел, одно из которых кратно пяти, может оканчиваться на 0 или на 5, но не на 6, следовательно, на доске не могло остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 6.

в) Очевидно, что отношение не может превышать $\left(\frac{217}{112}\right)^2$, но мы знаем из решения пункта б), что из двух оставшихся чисел ровно одно делится на 5. Тогда наибольшее отношение может равняться $\left(\frac{215}{112}\right)^2$, либо $\left(\frac{217}{115}\right)^2$. Какое из этих чисел больше? Нетрудно убедиться, что

$$\frac{215}{112} > \frac{217}{115} \Rightarrow \left(\frac{215}{112}\right)^2 > \left(\frac{217}{115}\right)^2.$$

Итак, большего отношения, чем $\left(\frac{215}{112}\right)^2$, нам не получить. Попробуем получить хотя бы его.

Посмотрим, что происходит с остатком по модулю 5 при возведении числа в квадрат

$$0^2 \equiv 0 \pmod 5$$
$$1^2 \equiv 1 \pmod 5$$
$$2^2 \equiv 4 \pmod 5$$
$$3^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod 5$$
$$4^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$$

То есть все числа, которые давали остатки 1 и 4 по модулю 5, станут давать остаток 1, а те, которые давали остатки 2 и 3, станут давать остаток 4. Посчитаем их количество.

$112 \equiv 217 \pmod 5 \Rightarrow$ числа от 112 до 216 можно разбить на некоторое количество полных циклов длины 5. Несложно посчитать их количество: $\frac{216-111}{5} = 21$. Значит, каждого из остатков от 0 до 4 будет по 21 штуке, плюс еще 217, которое мы не учли, даст остаток 2. Оставить мы хотим числа 215 и 112, которым соответствуют остатки 0 и 2. Помимо них у нас останется (это те, которые нам нужно будет вычеркнуть, 215 и 112 не учтены):

$21 - 1 = 20$ остатков 0,

21 остаток 1,

$21 + 1 - 1 = 21$ остаток 2,

21 остаток 3,

21 остаток 4.

Нулей четное число, после возведения в квадрат они останутся нулями, значит, мы сможем их выкинуть по парам.

Двойки и тройки дадут нам 42 остатка 4, 42 четное, значит, сможем от них избавиться.

Единицы и четверки дадут нам 42 остатка 1, 42 четное, значит, сможем и от них избавиться.

Таким образом доказали, что отношение $\left(\frac{215}{112}\right)^2$ достижимо.



# 3 Практическая часть. Решаем №19 из ЕГЭ

## 3.1 Задача на перебор снизу

**Задание 19** (*ЕГЭ, 2017*)

На доске написано 100 различных натуральных чисел, причем известно, что сумма этих чисел равна 5120.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 230?

б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

**Ответ**

а) Нет, не может

б) Нет, не может

в) 3

**Решение**

Известно, что сумма первых $n$ последовательных натуральных чисел $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

а) Рассмотрим наименьшую возможную сумму $S$, содержащую число 230. Она состоит из наименьших 99 натуральных чисел и числа 240. $S = \frac{99\cdot 100}{2} + 230 = 5180 > 5130 \Rightarrow$ получаем противоречие.

б) Допустим, число 14 не написано на доске, возьмём 100 минимальных натуральных чисел, которые еще доступны. Их сумма равна $S = \frac{101\cdot 102}{2} - 14 = 5137$. Очевидно, что какие бы числа ни были написаны на доске, их сумма будет не меньше $S$. Но $S > 5130 \Rightarrow$ получаем противоречие.

в) В пункте б) мы доказали, что как минимум одно число, кратное 14, написано на доске. Допустим, на доске оказалось написано ровно два числа $a$ и $b$, кратных 14. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S + a + b$, где $S$ — наименьшая возможная сумма 98 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 98 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{105 \cdot 106}{2} - (14 + 28 + 42 + 56 + 70 + 84 + 98) = 5173 > 5120 \Rightarrow S + a + b > 5120$$

Получаем противоречие.

Допустим, на доске оказалось написано ровно три числа $a$, $b$ и $c$, кратных 14. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S + a + b + c$, где $S$ — наименьшая возможная сумма 97 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 97 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{104 \cdot 105}{2} - (14 + 28 + 42 + 56 + 70 + 84 + 98) = 5068$$

Это на 52 меньше, чем сумма в условии, но $a+b+c \geqslant 14+28+42 = 84$. Снова получаем, что $S+a+b+c > 5120$. Таким образом мы доказали, что чисел, кратных 14, должно быть хотя бы 4.

Приведём пример, когда на доске написано четыре числа, кратных 14 (14, 28, 42 и 56):
$1, 2, \dots, 69, 71, \dots, 83, 85, \dots, 97, 99, 100, 101, 102, 119$. Их сумма равна

$$\frac{102 \cdot 103}{2} - (70 + 84 + 98) + 119 = 5120$$



## 3.2 Задача про овощи. От среднего к сумме

**Задание 19** (*ЕГЭ, 2017*)

В ящике лежат 65 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 982 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1024 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 13 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

**Ответ**

а) Нет

б) Нет

в) 387 г

**Решение**

Введем следующие обозначения: $x$ — количество овощей с массой меньше 1000 г, $z$ — количество овощей с массой ровно 1000 г, $y$ — количество овощей с массой больше 1000 г. По условию общее число овощей равно $x + y + z = 65$.

Обозначим суммарную массу всех овощей $S$. По условию средняя масса всех овощей равна 1000 г, т.е. $\frac{S}{65} = 1000 \Rightarrow S = 65000$. Аналогично суммарная масса овощей, которые весят меньше 1000 г, равна $982x$, овощей, которые весят больше 1000 г — $1024y$, овощей, которые весят 1000 г — $1000z$, причем $z = 65 - x - y$. Тогда имеет место равенство:

$$\begin{aligned}&982x+1000z+1024y=65000\\&982x+1000(65-x-y)+1024y=65000\\&-18x+24y=0\\&4y=3x\end{aligned}$$

а) Допустим, такое возможно. Тогда $x=y$, причем $4y=3x$. Получаем противоречие, т.к. $x$ и $y$ не могут равняться нулю.

б) Допустим, такое возможно. Тогда $z=13\Rightarrow x+y=65-z=52\Rightarrow x=52-y$. Подставим это в условие $4y=3x$:

$$\begin{aligned}&4y=3(52-y)\\&7y=156\end{aligned}$$

156 не делится на 7, значит, такого целого $y$ не существует, получили противоречие.

в) Пусть $m$ — масса наименьшего овоща, очевидно, что этот овощ находится в группе меньших 1000. Максимальный возможный вес овощей в этой группе, при том, что один овощ весит $m$, равен $m+999(x-1)$. Чтобы пример существовал, эта верхняя граница должна быть не меньше, чем заданная в условии сумма масс овощей в этой группе — $982x$. (Это *необходимое условие*, его выполнение не гарантирует существование примера, однако его невыполнение гарантирует, что примера нет.)

$$\begin{aligned}&m+999(x-1)\geqslant 982x\\&m\geqslant 999-17x\end{aligned}$$

Минимальное допустимое $m$ достигается при максимальном допустимом $x$. Мы уже знаем, что $4y=3x$, из этого следует, что $x\,\vdots\,4$. Обозначим $x=4t$, тогда $y=3t$.

$$65\geqslant x+y=7t\Rightarrow t\leqslant 9\Rightarrow x\leqslant 36$$

При $x=36$ минимальное возможное $m=999-17x=387$. Пример: один овощ массы 387, 35 овощей массы 999, 2 овоща массы 1000, 27 овощей массы 1024.

## 3.3 Задача про дроби

**Задание 19** (*Официальный пробный ЕГЭ, 2017*)

Известно, что $a,\ b,\ c,\ d$ — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{7}{23}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 12 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a>4b$ и $c>4d$?

**Ответ**

а) Да

б) Нет

в) $\frac{84}{17}$

**Решение**

а) Домножим для удобства числитель и знаменатель дроби на 3, получим $\frac{21}{69}$. Подойдут, например, $a+c=10+11,\ b+d=30+39$.

б) Допустим, такое возможно, тогда должно выполняться равенство

$$12\cdot\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$
$$12\cdot\frac{a}{b+d}+12\cdot\frac{c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Докажем, что левая часть строго больше правой, и такое равенство не может выполняться. Для этого докажем, что

$$\frac{12a}{b+d}\overset{?}{>}\frac{a}{b}$$
$$12b\overset{?}{>}b+d$$
$$11b>d$$

Последнее неравенство верно, т.к. левая часть больше 100 (т.к. $b>9$), а правая меньше 100 (т.к. $d<100$), значит, верны и предыдущие. Аналогично

$$\frac{12c}{b+d}>\frac{c}{d},$$

сложив, получим, что предположение неверно.

в) Так как все числа натуральные $a>4b\Rightarrow a\geqslant 4b+1$. Аналогично $c\geqslant 7d+1$. Оценим снизу нашу дробь:

$$\frac{a+c}{b+d}\geqslant\frac{4b+1+7d+1}{b+d}=4+\frac{3d+2}{b+d}$$

Наименьшее значение это выражение будет принимать при наименьшем значении выражения $\frac{3d+2}{b+d}$.

Так как $a$ — двузначное, максимальное значение для a — это 99, следовательно, $4b+1\leqslant 99$, следовательно, $b\leqslant 24$. Заменив $b$ на 24, мы не уменьшим знаменатель дроби, значит, вся дробь не увеличится. Получим:

$$\frac{a+c}{b+d}\geqslant 4+\frac{3d+2}{24+d}=4+\frac{3(d+24)+2-72}{d+24}=4+3-\frac{70}{d+24}=7-\frac{70}{d+24}$$

Чем меньше $d$, тем больше дробь $\frac{70}{d+24}$, и тем больше выражение $7-\frac{70}{d+24}$. $d\geqslant 10$, следовательно

$$\frac{a+c}{b+d}\geqslant 7-\frac{70}{10+24}=\frac{84}{17}$$

Мы получили оценку снизу, она достигается при следующих значениях чисел: $b=24,\ d=10,\ a=4\cdot 24+1=97,\ c=7\cdot 10+1=71$.

## 3.4 Гроб. Арифметическая прогрессия

**Задание 19** (*МИОО, 2016*)

Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1,a_2,\ldots,a_7$ ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1,a_2,\ldots,a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального $n$ могло оказаться так, что среди чисел $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1},a_{2n+2},\ldots,a_{5n}$?

**Ответ**

а) Да

б) Нет

в) 66

**Решение**

а) Да, существует, например: $50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, \dots$.

б) Пусть $d_a$ — разность данной арифметической прогрессии. $a_1 + d_a$ — натуральное число, значит, $d_a$ — натуральное число.

---

**Лемма** Пусть $b$ — арифметическая прогрессия, $n$ — натуральное число. Тогда, если хотя бы один член прогрессии $b$ делится на $n$, все числа из $b$, кратные $n$, образуют некоторую арифметическую прогрессию $c$.

**Доказательство**

Обозначим $b_i$ первый член прогрессии $b$, кратный $n$, $d$ — разность прогрессии $b$. Пусть следующий член, кратный $n$ это $b_j$ (такой найдется, потому что как минимум $b_i + dn$ входит в $b$ и делится на $n$). Тогда

$$b_j - b_i = d(j - i) \,\vdots\, n$$

Положим $D = d(j-i)$. Возьмём арифметическую прогрессию $c$ с первым членом $b_i$ и разностью $D$. Очевидно, все её члены будут кратны $n$, а также содержаться в $b$. Осталось доказать, что в прогрессии $b$ нет чисел, кратных $n$, которые не вошли в $c$.

Докажем от противного, пусть такие члены нашлись, возьмём один из таких с наименьшим индексом — $b_m$, заметим, что $m > j > i$.

$b_m \,\vdots\, n$ и $d(j-i) \,\vdots\, n$, тогда $b_{m-(j-i)} = b_m - d(j-i)$ тоже делится на $n$. Это точно член прогрессии $b$, т.к. $m > j \Rightarrow m - (j-i) > 0$ (проверили, что не вылезли «левее», чем $b_0$). Если $b_{m-(j-i)}$ не член прогрессии $c$, то индекс $b_m$ — не самый маленький (а мы его так выбирали, противоречие). Если это член прогрессии $c$, то $b_m$ — тоже член прогрессии $c$ (противоречие). Лемма доказана.

---

В прогрессии $a$ есть числа, делящиеся на 100, по Лемме они образуют арифметическую прогрессию, то есть расстояние между соседними всегда одинаково. Будем считать, что это расстояние по индексам равно $k$, иными словами, если $a_i \,\vdots\, 100$, то и $a_{i+k} \,\vdots\, 100$ для любого натурального $i$. (Везде ниже квадратные скобки обозначают целую часть числа.)

Если $k \le 4$, то чисел, кратных 100, среди членов от $a_1$ до $a_{49}$ хотя бы $[\frac{49}{k}] \ge [\frac{49}{4}] = 12$.

Если $k \ge 5$, то таких чисел не более, чем $[\frac{49}{k}] + 1 \le [\frac{49}{5}] + 1 = 10$.

Значит, среди членов от $a_1$ до $a_{49}$ не может быть ровно 11 чисел, кратных 100.

в) Определим $k$ аналогично пункту б). Тогда среди членов $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ не более $[\frac{2n}{k}]+1$ кратных 100, а среди членов $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$ их не менее $[\frac{3n}{k}]$. Мы хотим найти наибольшее $n$, для которого может выполняться $[\frac{2n}{k}] + 1 > [\frac{3n}{k}]$, при том, что $[\frac{2n}{k}] \le [\frac{3n}{k}] \Rightarrow [\frac{2n}{k}] = [\frac{3n}{k}]$

$[\frac{2n}{k}] = [\frac{3n}{k}] \Rightarrow \frac{3n}{k} - \frac{2n}{k} < 1 \Rightarrow \frac{n}{k} < 1 \Rightarrow \frac{2n}{k} < 2$, т.е. $[\frac{3n}{k}] = [\frac{2n}{k}] < 2 \Rightarrow \frac{3n}{k} < 2 \Rightarrow n < \frac{2k}{3}, k \le 100$. Значит, $n \le 66$.

Пример: $n = 66, a_1 = 69, d_a = 1$, тогда на 100 среди $a_1, \dots, a_{132}$ делятся члены $a_{32} = 100$ и $a_{132} = 200$, а среди $a_{133}, \dots, a_{330}$ делится член $a_{232} = 300$.

## 3.5 Задача про последовательность чисел

**Задание 19** (*СтатГрад ЕГЭ, 2018*)

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причем $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных $n$.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном $n$ может выполняться равенство $6na_{n+1} = (n^2+24)a_n$?

**Ответ**

а) Да

б) Нет

в) 5

**Решение**

а) Распишем последовательно $a_3$, $a_4$ и $a_5$ через $a_1$ и $a_2$, пользуясь формулой $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$$\begin{aligned}
&a_3 = a_1 + a_2\\
&a_4 = a_2 + a_3 = a_1 + 2a_2\\
&a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2
\end{aligned}$$

Подставим в равенство $4a_5 = 7a_4$

$$\begin{aligned}
&4a_5 = 7a_4\\
&4(2a_1 + 3a_2) = 7(a_1 + 2a_2)\\
&a_1 = 2a_2
\end{aligned}$$

Значит, подойдет, например, последовательность $2, 1, 3, 4, 7, \ldots$

б) Сделаем то же, что и в пункте а)

$$\begin{aligned}
&5a_5 = 7a_4\\
&5(2a_1 + 3a_2) = 7(a_1 + 2a_2)\\
&3a_1 + a_2 = 0
\end{aligned}$$

Такое равенство невозможно при натуральных $a_1$ и $a_2$.

в) Перепишем равенство в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+24}{6n}$$

В левой части получили $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, это отношение двух подряд идущих членов последовательности. Попробуем оценить его.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Для любого $n > 2$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} > a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \frac{n^2+24}{6n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$$

Решив неравенство $\frac{n^2+24}{6n} < 2$ для натуральных $n$, получаем $n \leqslant 9$. Будем перебирать сверху вниз, подставляя $n$ в условие $6na_{n+1} = (n^2+24)a_n$, начиная с 9, пока не найдем $n$, для которого будет существовать пример.

Помним, что для любого $n > 2$ должно выполняться $a_n > a_{n-1}$.

$n = 9$:

$$6 \cdot 9 \cdot a_{10} = 105a_9$$
$$18a_{10} = 35a_9 \quad \Rightarrow$$
$$a_{10} = 35k$$
$$a_9 = 18k$$
$$a_8 = 17k$$
$$a_7 = k$$
$$a_6 = 16k$$

$a_6 > a_7$ — противоречие.

$n = 8$

$$6 \cdot 8 \cdot a_9 = 88a_8$$
$$6a_9 = 11a_8 \quad \Rightarrow$$
$$a_9 = 11k$$
$$a_8 = 6k$$
$$a_7 = 5k$$
$$a_6 = k$$
$$a_5 = 4k$$

$a_5 > a_6$ — противоречие.

$n = 7$:

$$6 \cdot 7 \cdot a_8 = 73a_7 \quad \Rightarrow$$
$$a_8 = 73k$$
$$a_7 = 42k$$
$$a_6 = 31k$$
$$a_5 = 11k$$
$$a_4 = 20k$$

$a_4 > a_5$ — противоречие.

$n = 6$

$$6 \cdot 6 \cdot a_7 = 60a_6$$
$$3a_7 = 5a_6 \quad \Rightarrow$$
$$a_7 = 5k$$
$$a_6 = 3k$$
$$a_5 = 2k$$
$$a_4 = k$$
$$a_3 = k$$

$a_3 = a_4$ — противоречие.

$n = 5$:

$$6 \cdot 5 \cdot a_6 = 49a_5 \quad \Rightarrow$$
$$a_6 = 49k$$
$$a_5 = 30k$$
$$a_4 = 19k$$
$$a_3 = 11k$$
$$a_2 = 8k$$
$$a_1 = 3k$$

Получаем пример $3, 8, 11, 19, 30, 49, \ldots$, значит, наименьшее возможное $n = 5$.

## 3.6 Задача с хорошими множествами. Факт про степени двойки

<u>**Факт про степени двойки**</u>

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

**Доказательство**

Левая часть — это сумма первых $k$ членов геометрической прогрессии, которую можно найти по формуле (в нашем случае $b_1 = 1,\ q = 2$)

$$S_k = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^k - 1)}{2 - 1} = 2^k - 1$$

Получили, что и требовалось. Также формулу можно доказать, перенеся единичку в левую часть, тогда левая часть «схлопнется».

**Задание 19**

Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{100, 101, 102, \ldots, 199\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2, 4, 8, \ldots, 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$?

**Ответ**

а) Да

б) Нет

в) 8

**Решение**

а) Данное множество состоит из 100 подряд идущих натуральных чисел, его можно разбить на 50 пар с одинаковыми суммами: $\{100, 199\}, \{101, 198\}, \ldots, \{149, 150\}$. Так как количество таких пар 50 (важно, что оно чётно), можно составить первое подмножество из всех элементов любых 25 из этих пар, а второе подмножество взять содержащим все остальные числа.

б) Из Факта выше, следует

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{199} = 2^{200} - 1$$
$$2 + 4 + \ldots + 2^{199} = 2^{200} - 2$$
$$2 + 4 + \ldots + 2^{199} < 2^{200}$$

Элемент $2^{200}$ больше суммы всех остальных элементов, значит, разбить такое множество на два подмножества с одинаковой суммой невозможно.

в) Для элементов хорошего четырёхэлементного подмножества должно выполняться либо равенство вида

$$a + b + c = d,$$

либо равенство вида

$$a + b = c + d.$$

Равенство $a + b + c = d$ может быть выполнено только в случае $3 + 4 + 5 = 12$ (сумма любых трёх других элементов больше любого элемента данного множества).

Рассмотрим теперь случай равенства вида $a + b = c + d$. В данном множестве всего два нечётных элемента —

3 и 5. Ясно, что хорошее четырехэлементное подмножество либо содержит оба этих элемента, либо не содержит ни одного (т.к. сумма элементов хорошего множества обязана быть четной).

Рассмотрим подходящие четырёхэлементные подмножества, содержащие 3 и 5. Так как $3+5=8$, что меньше суммы любых двух других элементов исходного множества, то в требуемом равенстве вида $a+b=c+d$ они должны стоять по разные стороны от знака равенства:

$$a+3=c+5 \Rightarrow a-c=2,$$

то есть на роль пары чисел $(a,c)$ подходят пары $(12,10),(10,8),(8,6),(6,4)$ — всего 4 пары, следовательно, в случае равенства вида $a+b=c+d$ есть ровно 4 хороших подмножества из 4 элементов, содержащих 3 и 5.

Остаётся рассмотреть подходящие четырёхэлементные подмножества, не содержащие ни 3, ни 5. Они, таким образом, являются подмножествами множества $\{4,6,8,10,12\}$, но в нём всего 5 элементов, то есть искомое подмножество должно содержать все его элементы, кроме одного. Кроме того, ясно, что так как в множестве $\{4,6,8,10,12\}$ все элементы чётные, в равенстве вида $a+b=c+d$ слева и справа должны стоять чётные числа, тогда сумма всех четырёх чисел должна делиться на 4. Следовательно, нельзя удалять из множества $\{4;6;8;10;12\}$ элементы 6 или 10 (они сравнимы с 2 по модулю 4).

Остаётся убедиться, что при удалении из него 4, 8 или 12 будут получаться хорошие подмножества. Это видно из равенств

$$8+10=6+12, \quad 6+10=4+12, \quad 4+10=6+8$$

Таким образом, есть ровно 3 хороших подмножества исходного множества, не содержащие 3 и 5. Итого, у исходного множества есть ровно $1+4+3=8$ хороших четырёхэлементных подмножеств.

## 3.7 Задача из анонимного источника

**Задание 19**

На окружности некоторым способом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа $k$ можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше $k$?

**Ответ**

а) Нет

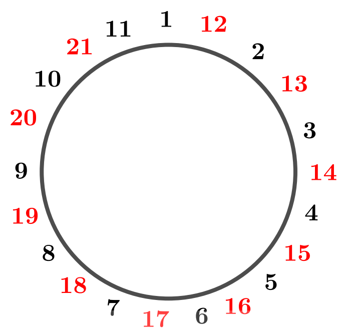
б)

в)

**Решение**

а) Рассмотрим число 11. Легко проверить, что среди остальных чисел нет ни одного, которое отличается от 11 больше, чем на 10. Значит, числу 11 не получится найти соседей, и такое невозможно.

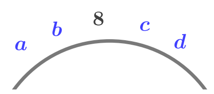
б) Да, например, так




в) Допустим, $k \geqslant 8$, и для такого $k$ существует корректная расстановка. Выделим в ней числа от 1 до 8. Заметим, что разность любой пары выделенных чисел не больше 7, следовательно, в корректной расстановке между соседними выделенными числами (соседние выделенные — те, между которыми нет других выделенных) должно быть как минимум два других числа. Получаем, что в кругу 8 выделенных чисел, между каждой парой соседних еще минимум 2 числа, то есть в кругу должно быть минимум $8 \cdot 3 = 24$ числа. А по условию их 21, противоречие.

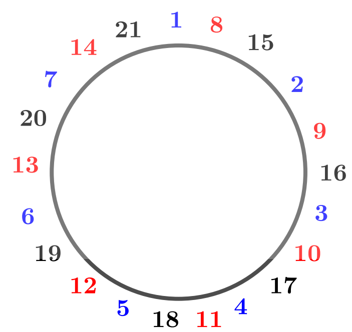
Допустим, $k = 7$, и для такого $k$ существует корректная расстановка. Будем называть числа от 15 до 21 числами из группы I. Будем называть *близкими* к числу $a$ те числа, с которыми у $a$ будет посчитана разность. Очевидно, что у каждого числа в расстановке ровно 4 близких.

Рассмотрим число 8 в некоторой корректной расстановке и его близких. Каждое из близких может быть либо единицей, либо числом из группы I (очевидно, что разность 8 и любого из остальных чисел была бы меньше 7). Получаем, что среди близких для числа 8 как минимум три числа из группы I (потому что единица максимум одна), а среди этих трех обязательно найдется пара близких между собой. Действительно, если $a$ или $b$ равно 1, то $c$ и $d$ близки между собой, если $c$ или $d$ равно 1, то $a$ и $b$ близки между собой.




Однако числа из группы I не могут быть близкими в корректной расстановке, т.к. разность любых двух из них меньше 7. Значит, $k$ не может быть равно 7.

Пример для $k = 6$



## 3.8 Просто гроб

**Задание 19**

а) Сколько существует способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа $a_i$ — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существует ли 10 различных чисел $N$ таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа $a_i$ — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел $N$ таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа $a_i$ — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

**Ответ**

а) 130

б) Да

в) 20

**Решение**

а) Покажем, что любое число, представимое в виде $100a_2 + a_0$, где $0 \leqslant a_2, a_0 \leqslant 99$, представимо в таком виде единственным способом. Допустим противное, пусть есть два таких представления

$$100a + b = 100c + d$$
$$100(a - c) = d - b$$

Если $a = c$, то $b = d$, если же $a \neq c$, то левая часть по модулю не меньше 100, в то время как правая по модулю меньше 100. Значит, если у числа существует такое представление, то оно единственно. Также очевидно, что любое целое число от 0 до $99 \cdot 10^2 + 99 = 9999$ имеет представление в таком виде.

Покажем теперь, что любое число, представимое в виде $1000a_1 + 10a_3$, где $0 \leqslant a_1, a_3 \leqslant 99$, представимо в таком виде единственным способом. Допустим противное, пусть есть два таких представления

$$1000a + 10b = 1000c + 10d$$
$$1000(a - c) = 10(d - b)$$
$$100(a - c) = d - b$$

Если $a = c$, то $b = d$, если же $a \neq c$, то левая часть по модулю не меньше 100, в то время как правая по модулю меньше 100. Значит, если у числа существует такое представление, то оно единственно. Также очевидно, что любое целое число вида $10t$, где $0 \leqslant t \leqslant 99 \cdot 10^2 + 99 = 9999$ имеет представление в таком виде.

Из выше сказанного следует, что если мы выберем $a_1$ и $a_3$, то $a_2$ и $a_0$ могут быть определены однозначно при условии, что $1292 - 1000a_3 - 10a_1 \geqslant 0$. Мы поняли, что в виде $1000a_3 + 10a_1$ можно представить любое число, кратное 10, от 0 до 99990, причем очевидно, что числа, не кратные 10 представить нельзя. Количество чисел такого вида, не больших 1292, равно 130. Каждое такое число единственным образом представимо в виде $1000a_3 + 10a_1$, а остаток единственным образом представим в виде $100a_2 + a_0$. Значит, количество способов представления равно 130.

б) Да, существуют. Из рассуждений пункта а) очевидно, что все целые числа от 1290 до 1299 имеют столько же представлений, сколько число 1292, то есть 130.

в) Фактически, учитывая все сказанное в первых двух пунктах, количество способов представить число $N$ в указанном виде равно количеству таких целых $0 \leqslant t \leqslant 9999$, что

$$0 \leqslant N - 10t \leqslant 9999,$$

где $10t$ соответствует части $1000a_1 + 10a_3$, а $N - 10t$ части $100a_2 + a_0$. Чтобы решить пункт в), нам нужно найти все такие целые $N$, при которых система ниже имеет ровно 130 решений.

$$\begin{cases} N - 10t \leqslant 9999 \\ 0 \leqslant N - 10t \\ 0 \leqslant t \leqslant 9999 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{N-9999}{10} \leqslant t \leqslant \frac{N}{10} \\ 0 \leqslant t \leqslant 9999 \end{cases}$$

Проанализируем систему справа.

При $N < 1290$ система равносильна неравенству $0 \leqslant t \leqslant \frac{N}{10} < 129$, очевидно это неравенство имеет меньше 130 решений.

При $N$ от 1290 до 1299 система, как мы уже знаем, имеем ровно 130 решений.

При $N > 1299$ интервал верхнего неравенства будет содержать больше 130 значений, чтобы, пересекая его с интервалом нижнего неравенства, получалось ровно 130 значений, нижняя граница интервала верхнего неравенства должна быть равна $9999 - 130 + 1 = 9870$.

$$\frac{N - 9999}{10} = 9870 \Rightarrow N = 108699$$

При $n$ от 108690 до 108699 нижняя граница будет верхнего интервала фактически будет округляться вверх до 9870 (из-за того что $t$ целое).

Мы рассмотрели все случаи, когда может быть 130 решений, это выполняется при 20 различных $N$ (от 1290 до 1299 и от 108690 до 108699).

## 3.9 Задача про отношение числа к произведению цифр

**Задание 19**

Пусть $n$ — трёхзначное натуральное число, в десятичной записи которого нет нулей.

а) Приведите пример такого $n$, что его отношение к произведению его цифр равно $\frac{109}{18}$.

б) Может ли отношение $n$ к произведению его цифр быть равно $\frac{113}{18}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать отношение $n$ к произведению его цифр, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 18?

**Ответ**

а) 763

б) Нет

в) $\frac{631}{18}$

**Решение**

а) Покажем, что $n = 763$ подходит: произведение цифр $n$ равно $7 \cdot 6 \cdot 3$, тогда отношение $n$ к произведению его цифр равно

$$\frac{763}{7 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{109}{6 \cdot 3} = \frac{109}{18}$$

б) Числа 113 и 18 взаимно просты, тогда для того, чтобы отношение $n$ к произведению его цифр было равно $\frac{113}{18}$, необходимо, чтобы $n$ делилось на 113.

Таким образом, если какое-то $n$ подходит, то оно имеет вид $n = 113k$, где $k \in \{1, \dots, 8\}$ (так как $113 \cdot 9 = 1017$ — уже не трёхзначное).

Перебором убеждаемся, что ни одно число из множества $\{1, \dots, 8\}$ не подходит на роль $k$, следовательно, отношение $n$ к произведению его цифр не может быть равно $\frac{113}{18}$.

в) Такое отношение по крайней мере может быть равно $\frac{631}{18}$ (при $n = 631$), но может ли оно быть ещё больше?

Если при каком-то $n$ оно оказалось ещё больше, необходимо, чтобы произведение цифр $n$ и было равно 18. В самом деле, произведение цифр $n$ должно делиться на 18, раз уж отношение $n$ к нему можно сократить до дроби вида $\frac{m}{18}$, но если $n < 1000$, то даже при сокращении числителя всего в 2 раза там останется $\frac{n}{2} < 500$, а в предложенном выше примере в числителе стоит $631 > 500$, то есть предложенный выше пример даёт заведомо большее отношение, чем любое допустимое отношение, для которого произведение цифр $n$ было не 18.

Теперь разберёмся со случаем, когда произведение цифр $n$ равно $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$. Тогда наибольшее значение, которое может принимать число сотен в $n$, равно $3 \cdot 3 = 9$, но чтобы произведение цифр было равно 18, нам придётся взять в качестве двух других цифр 2 и 1. При этом всякое трёхзначное число, записанное полученными цифрами, делится на 3 и дробь $\frac{n}{18}$ оказывается сократимой.

Наибольшее значение, которое может принимать число сотен в $n$, отличное от 9, равно $3 \cdot 2 = 6$, тогда нам придётся взять в качестве двух других цифр 3 и 1. Ну, а наибольшее такое $n$, собственно, и есть 631.

## 3.10 Задача про две арифметические прогрессии

**Задание 19**

Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, \dots, b_n, \dots$ состоят из целых положительных чисел.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_2b_2 + 3a_4b_4 = 5a_3b_3$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $3a_2b_2 + a_6b_6 = 4a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение $a_3b_3$, если $3a_2b_2 + a_6b_6 \leqslant 108$?

**Ответ**

а) $4, 5, 6, 7, \dots$ и $2, 3, 4, 5, \dots$

б) Нет

в) 24

**Решение**

а) В качестве примера подходят прогрессии $4, 5, 6, 7, \dots$ и $2, 3, 4, 5, \dots$ (то есть $a_1 = 4$, $b_1 = 2$, а разности у обеих прогрессий равны 1). В самом деле, для таких прогрессий требуемое равенство превращается в верное равенство

$$5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \cdot 5 = 5 \cdot 6 \cdot 4$$

б) Пусть разность прогрессии $a_1, \dots$ равна $d$, а разность прогрессии $b_1, \dots$ равна $\tilde{d}$. Тогда требуемое равенство можно переписать в виде

$$3(a_3 - d)(b_3 - \tilde{d}) + (a_3 + 3d)(b_3 + 3\tilde{d}) = 4a_3b_3$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$12d\tilde{d} = 0,$$

чего быть не может, ведь по условию обе прогрессии возрастают и состоят из целых положительных чисел, следовательно, $d \geqslant 1$ и $\tilde{d} \geqslant 1$, но тогда $12d\tilde{d} \geqslant 12 > 0$.

в) Аналогично пункту б) имеем

$$3a_2b_2 + a_6b_6 = 3(a_3 - d)(b_3 - \tilde{d}) + (a_3 + 3d)(b_3 + 3\tilde{d}) = 4a_3b_3 + 12d\tilde{d}$$

Таким образом, условие пункта в) равносильно условию

$$4a_3b_3 + 12d\tilde{d} \leqslant 108 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_3b_3 + 3d\tilde{d} \leqslant 27$$

Так как $d \geqslant 1$ и $\tilde{d} \geqslant 1$, то получаем оценку сверху

$$a_3 b_3 \leqslant 24 = 6 \cdot 4$$

Покажем, что эта оценка достигается: рассмотрим прогрессии $4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$ и $2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$, тогда

$$3a_2 b_2 + a_6 b_6 = 3 \cdot 5 \cdot 3 + 9 \cdot 7 = 108,$$

следовательно, условие задачи выполнено и 24 действительно является наибольшим возможным значением для $a_3 \cdot b_3$.