

Определение квадратного корня

Возьмем некоторое неотрицательное число a . Тогда квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число b , при возведении которого в квадрат мы получим число a :

$$\sqrt{a} = b \quad \text{то же самое, что} \quad a = b^2$$

Из определения следует, что $a \geq 0, b \geq 0$.

Эти ограничения являются важным условием существования квадратного корня, и их следует запомнить!

Примеры

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

Выражение $\sqrt{-100}$ не имеет смысла!

Свойство 1

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Пример на свойство 1

$$\sqrt{(-\sqrt{2})^2} = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Свойство 2

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad \text{при условии } a \geq 0$$

Пример на свойство 2

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Выражение $(\sqrt{-10})^2$ не имеет смысла!

Свойство 3

Если $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, то $0 \leq a \leq b$, и наоборот.

Примеры на свойство 3

1) Сравним $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$. Для начала преобразуем второе выражение:

$$\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$$

Таким образом, так как $50 < 72$, то и $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Следовательно, $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.

2) Между какими целыми числами находится $\sqrt{50}$?

Так как $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, а $49 < 50 < 64$, то $7 < \sqrt{50} < 8$, то есть число $\sqrt{50}$ находится между числами 7 и 8.

Свойство 4. Произведение и частное корней

Произведение или частное квадратных корней равно квадратному корню из произведения или частного:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{и} \quad \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

Также с помощью этого свойства можно выносить множитель из под знака корня:

$$\sqrt{c^2 d} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{d} = c\sqrt{d}$$

*Мы считаем, что $a, b, c, d \geq 0$.

Примеры на свойство 4

$$\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{768} : \sqrt{3} = \sqrt{768 : 3} = \sqrt{256} = 16$$

$$\sqrt{(-25) \cdot (-64)} = \sqrt{25 \cdot 64} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = 5 \cdot 8 = 40$$

$$\sqrt{4410} = \sqrt{9 \cdot 49 \cdot 10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{10} = 21\sqrt{10}$$

Свойство 5. Сумма и разность корней

Сумма или разность квадратных корней НЕ РАВНА квадратному корню из суммы или разности, то есть

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$$

Примеры

Если вам нужно вычислить, например, $\sqrt{25} + \sqrt{49}$, то первоначально вы должны найти значения $\sqrt{25}$ и $\sqrt{49}$, а затем их сложить. Следовательно,

$$\sqrt{25} + \sqrt{49} = 5 + 7 = 12$$

Как избавиться от иррациональности в знаменателе

Иногда появляются выражения вида $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$. В таких случаях лучше преобразовать дробь, чтобы в знаменателе получилось целое число. Для этого необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на сопряженное, то есть на выражение $\sqrt{a} - b$, чтобы в знаменателе получить разность квадратов:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + b} = \frac{\sqrt{a} - b}{(\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b)} = \frac{\sqrt{a} - b}{(\sqrt{a})^2 - b^2} = \frac{\sqrt{a} - b}{a - b^2}$$

Случается так, что появляется выражение вида $\frac{x}{\sqrt{y}}$. В таком случае сопряженное будет равно $\sqrt{y}$. Тогда после домножения на него мы получим

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x \cdot \sqrt{y}}{(\sqrt{y})^2}$$

Примеры

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 3\sqrt{2} + 3$$