

Кредитование: дифференцированная система

Вы взяли в кредит определенную сумму денег S под определенный процент годовых.

Дифференцированные платежи — это система выплат, при которой

сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину

 каждый год. При этом платежи каждый год разные.

Таким образом, если в кредит взята сумма S на n лет под $r\%$ процентов годовых, это означает, что

- каждый год на текущий долг начисляются проценты, то есть долг увеличивается на величину $k \cdot$ «текущий долг», где $k = 0,01 \cdot r$;
 - платежи состоят из двух частей: первая часть — это начисленные проценты, вторая — сумма S , разделенная на n равных частей.
- Тогда долг каждый год уменьшается на $\frac{1}{n}S$.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	S	$S + k \cdot S$	$k \cdot S + \frac{1}{n}S$	$S - \frac{1}{n}S$
2	$S - \frac{1}{n}S = \frac{n-1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S + k \cdot \frac{n-1}{n}S$	$k \cdot \frac{n-1}{n}S + \frac{1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S - \frac{1}{n}S$
3	$S - \frac{2}{n}S = \frac{n-2}{n}S$	$\frac{n-2}{n}S + k \cdot \frac{n-2}{n}S$	$k \cdot \frac{n-2}{n}S + \frac{1}{n}S$	$\frac{n-2}{n}S - \frac{1}{n}S$
...	...	...	...	...
k	$S - \frac{k-1}{n}S = \frac{n-k+1}{n}S$	$\frac{n-k+1}{n}S + k \cdot \frac{n-k+1}{n}S$	$k \cdot \frac{n-k+1}{n}S + \frac{1}{n}S$	$\frac{n-k+1}{n}S - \frac{1}{n}S$
...	...	...	...	...
n	$S - \frac{n-1}{n}S = \frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S + k \cdot \frac{1}{n}S$	$k \cdot \frac{1}{n}S + \frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S - \frac{1}{n}S = 0$

Пример, где встречается

Клиент взял в банке кредит на некоторую сумму S рублей на 3 года под 15% годовых. Выплачивать кредит он должен ежегодными платежами так, чтобы каждый год сумма долга уменьшалась равномерно.

Составьте таблицу, демонстрирующую изменения, происходящие с суммой долга.

Чему равно S , если оказалось, что в итоге клиент заплатил банку 390 000 рублей?

- Если кредит взят на n лет, то сумма долга каждый год уменьшается равномерно на $\frac{1}{n}$ часть от суммы, взятой в кредит, то есть на $\frac{1}{n}S$.

Так как в нашем случае кредит взят на 3 года, значит тело долга S разделили на 3 равные части и долг должен каждый год уменьшаться на $\frac{1}{3}S$.

Следовательно, после первой выплаты долг должен составлять $S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S$ рублей, после второй выплаты долг будет равен $\frac{2}{3}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}S$ рублей, а после последней третьей долг будет равен $\frac{1}{3}S - \frac{1}{3}S = 0$.

Таким образом, первым делом мы можем заполнить столбцы "Сумма долга до начисления %" и "Сумма долга после платежа".

- Столбец "Сумма долга после начисления %" стоит заполнять в виде «текущий долг» + «начисленные на него $r\%$ ».

В общем виде это выглядит так: «текущий долг» + $k \cdot$ «текущий долг», где $k = 0,01r$. В нашем случае $k = 0,15$.

- Как удобнее находить платеж?

Представим, что мы вносим платеж всегда двумя частями: сначала — проценты, начисленные на долг (те самые $k \cdot$ «текущий долг»), а затем оставшуюся часть платежа.

Первый платеж строится так: сначала мы вносим $0,15S$, тем самым наш долг снова становится равен S . Так сколько нужно еще выплатить банку, чтобы долг стал равен $\frac{2}{3}S$? Ту самую $\frac{1}{3}S$.

Второй платеж строится так: долг стал равен $\frac{2}{3}S$, вносим сначала начисленные проценты $0,15 \cdot \frac{2}{3}S$, долг становится снова равен $\frac{2}{3}S$, и теперь, чтобы долг стал равен $\frac{1}{3}S$, нужно снова внести $\frac{1}{3}S$.

Третий платеж строится так: долг равен $\frac{1}{3}S$, вносим сначала начисленные проценты $0,15 \cdot \frac{1}{3}S$, долг становится снова равен $\frac{1}{3}S$, и теперь, чтобы долг стал равен 0, нужно снова внести $\frac{1}{3}S$.

Следовательно, все платежи в нашем случае будут выглядеть как $0,15 \cdot$ «текущий долг» + $\frac{1}{3}S$.

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Платеж	Сумма долга после платежа
1	S	$S + 0,15S$	$0,15 \cdot S + \frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}S$
2	$\frac{2}{3}S$	$\frac{2}{3}S + 0,15 \cdot \frac{2}{3}S$	$0,15 \cdot \frac{2}{3}S + \frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}S$
3	$\frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}S + 0,15 \cdot \frac{1}{3}S$	$0,15 \cdot \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}S$	0

Начисленные проценты, составляют арифм. прогрессию с разностью $0,15 \cdot \frac{1}{3}S$

Части, на которые уменьшается долг

Можно сказать по-другому:

все платежи образуют арифметическую прогрессию с разностью $0,15 \cdot \frac{1}{n}S$.

Продолжение примера

То, что в итоге Алексей заплатил банку, является общей суммой выплат.

- Общая сумма выплат — это сумма всех платежей по кредиту. В случае дифференцированных платежей это всегда будет

$$kS \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right)}_{\text{сумма арифм. прогрессии: } a_1 = \frac{1}{n}, a_n = 1} + S = kS \cdot \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{= \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n} + S,$$

где $k = 0,01r$ — проценты $r\%$, переведенные в десятичный вид, n — количество лет, на которое взят кредит. Получаем таким образом в нашем случае для $n = 3$, $k = 0,15$:

$$\underbrace{\text{Общая сумма выплат}}_{\text{начисленные проценты}} = 0,15 \cdot S \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)}_{\text{сумма арифм. прогрессии}} + \underbrace{S}_{= \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}S}$$

- Переплата по кредиту — это сумма, равная общей сумме выплат за вычетом суммы, взятой в кредит, что в случае дифференцированных платежей равно сумме процентов, начисленных на долг во все годы.

$$\text{Переплата} = \text{Общая сумма выплат} - \text{Кредит} = \text{Сумма начисленных процентов}$$

В нашем случае столбец платежей имеет следующий смысл:

Платеж	
$0,15 \cdot S + \frac{1}{3}S$	
$0,15 \cdot \frac{2}{3}S + \frac{1}{3}S$	
$0,15 \cdot \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}S$	

Складываем отдельно, получаем Переплату

Складываем отдельно, получаем Сумму S , взятую в кредит

Найдем S , если общая сумма выплат по кредиту составила 390 000 рублей:

$$0,15S \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + S = 390\,000 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{100} \cdot \frac{\frac{1}{3} + 1}{2} \cdot 3 \cdot S + S = 390\,000 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{10} \cdot S = 390\,000 \quad \Leftrightarrow$$

$$S = 300\,000 \text{ (рублей)}$$

Типичные ошибки. Рекомендации

- Некоторые проценты в десятичном виде удобнее использовать в виде рациональной дроби. Например, для $r\% = 25\%$ имеем $k = \frac{1}{4}$, для $r\% = 12,5\%$ имеем $k = \frac{1}{8}$, для $r\% = 20\%$ имеем $k = \frac{1}{5}$.
- Рекомендуют оформлять изменения, происходящие с суммой долга, с помощью таблицы. Столбцы подписывать так, чтобы было понятно проверяющим. Названия столбцов видны на примере.
- Вводите неизвестные, которые вы собираетесь использовать в таблице, вместе с их единицами измерения. Например, если не дана сумма, взятая в кредит, вводим: ”пусть S рублей — сумма, взятая в кредит“.
- В задачах не может быть никакого округления значений переменных, если об этом не сказано в условии. Поэтому, если вы, например, получили нецелое число лет n — ищите у себя ошибку либо в самой модели, либо арифметического характера.
- Не ленитесь использовать слова, объясняющие ваши действия при решении: “чтобы найти переплату, нужно из суммы всех платежей вычесть сумму, взятую в кредит”; “здесь мы получили сумму арифметической прогрессии, я буду вычислять ее по такой-то формуле”, ”платежи составляют арифметическую прогрессию, где первый член такой-то, последний — такой-то, следовательно, их сумму можно находить по формуле суммы арифметической прогресии“ и т.д.
- Будет ошибкой: использовать без вывода формулы, не представленные в официальных учебниках, например, формулы для общей суммы выплат, переплаты; не демонстрировать арифметическую или геометрическую прогрессии, если они есть, и т.п.