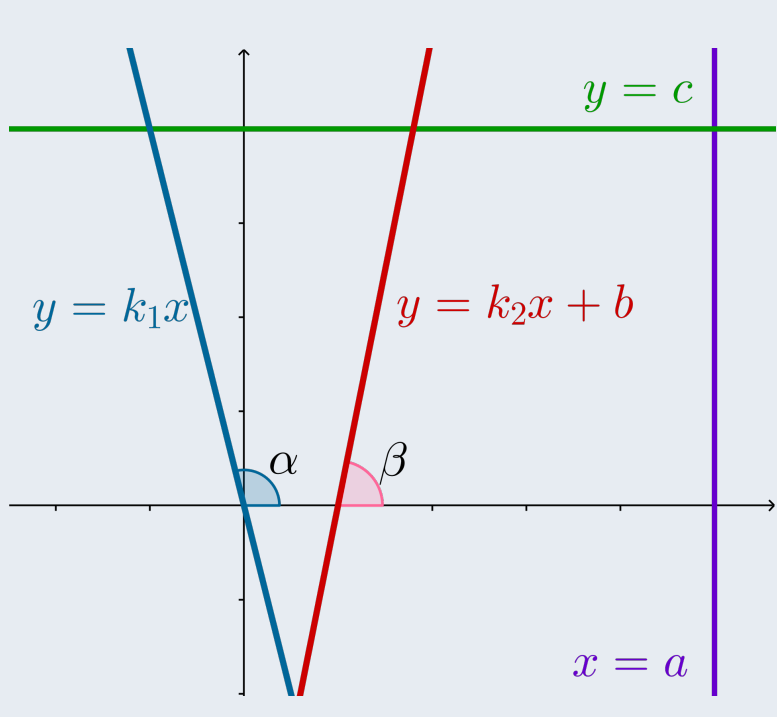
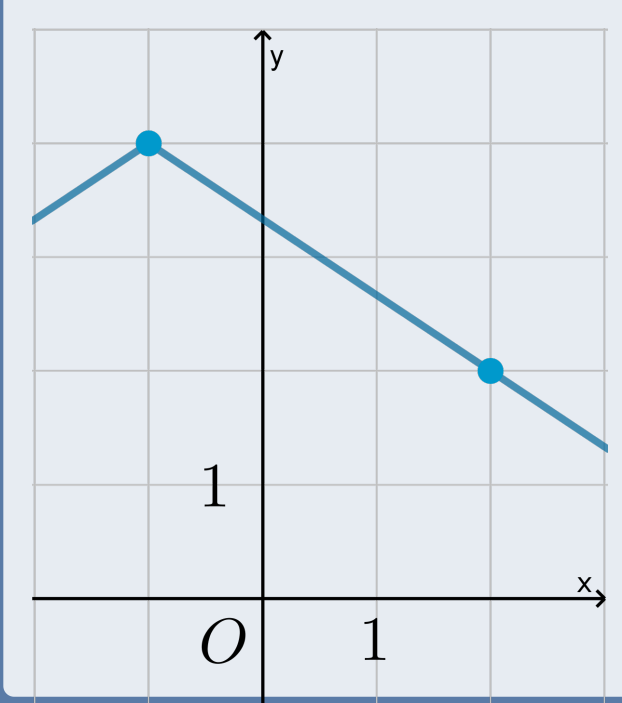


Линейная функция

- Линейная функция – функция вида $f(x) = kx + b$, где k, b – некоторые числа.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Для $f(x) = kx + b$ коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox .
 $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $k_2 = \operatorname{tg} \beta$.
- Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$: параллельны, то $k_1 = k_2$; если взаимно перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.



- Функция модуля выглядит как $f(x) = a|x - x_0| + y_0$, где $(x_0; y_0)$ – точка, в которую сместилась точка $(0; 0)$. Коэффициент a отвечает за сжатие/растяжение и направление ветвей уголка.



Пример, где встречается

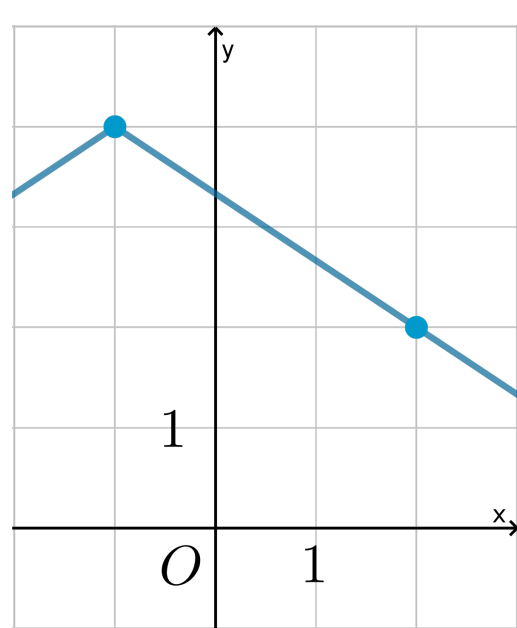
На рисунке изображен график функции $f(x) = a|x - b| + c$. Найдите $f(-10)$.

► Вершина графика сдвинута в точку $(-1; 4)$, следовательно, $b = -1$, $c = 4$.

Так как от вершины мы сдвигаемся на 2 единицы вниз, а по горизонтали на 3 единицы вправо, то коэффициент a отрицательный и равен $a = -\frac{2}{3}$.

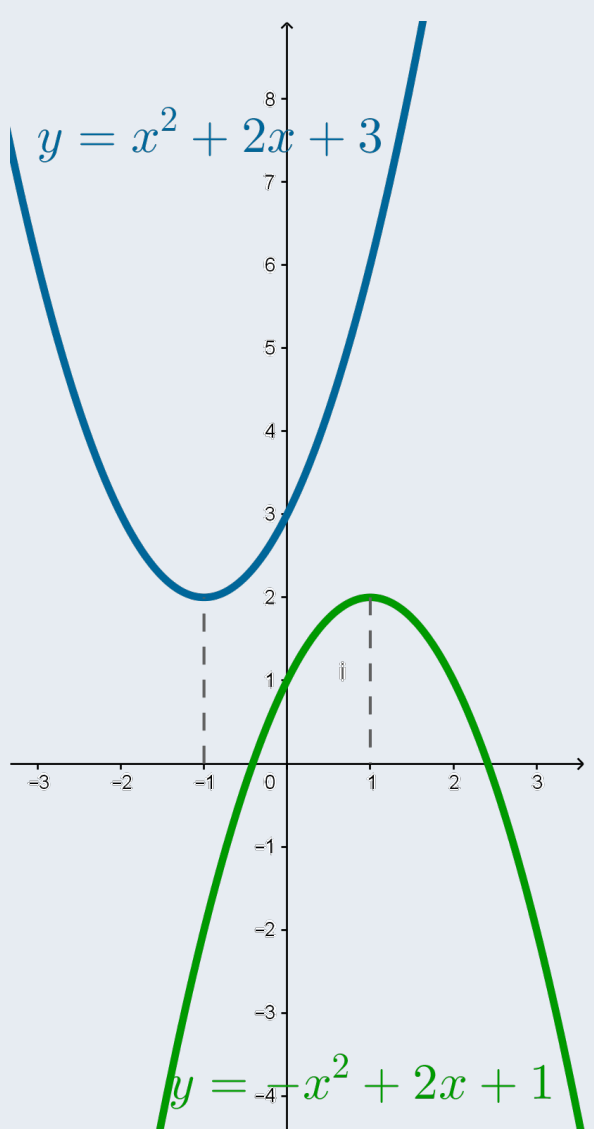
Следовательно, $f(x) = -\frac{2}{3}|x + 1| + 4$.

Тогда $f(-10) = -\frac{2}{3}|-10 + 1| + 4 = -2$.



Квадратичная функция

- Квадратичная функция – функция вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.
- Графиком квадратичной функции является парабола.
- Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ – ветви направлены вниз. Коэффициент a также отвечает за сжатие/растяжение параболы.
- Всякая парабола симметрична относительно прямой $x = x_0$.
- Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ – точки пересечения параболы с осью Ox .
- Вершина параболы



$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = -\frac{D}{4a} \text{ ищется из } f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b, c – целые. Найдите $f(-12)$.

► Первый способ. Из рисунка следует, что вершина параболы находится в точке $(-4; -3)$. Так как $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$, то получаем систему

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -4 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8a \\ c = 16a - 3 \end{cases}$$

Также парабола проходит через точку $(-2; 1)$, поэтому

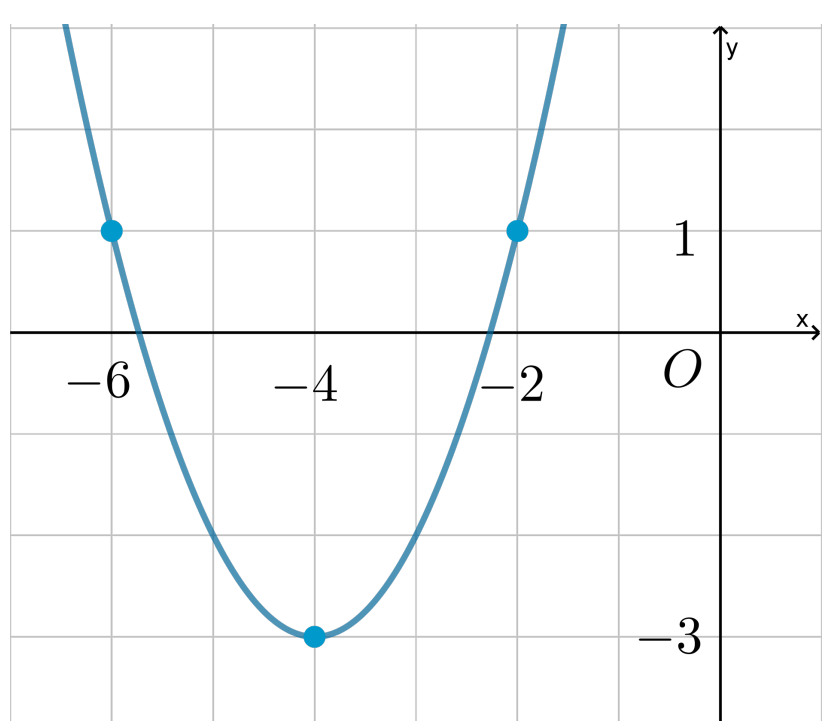
$$4a - 2b + c = 1 \Leftrightarrow 4a - 16a + 16a - 3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Тогда функция имеет вид $f(x) = x^2 + 8x + 13$.

Ответ: $f(-12) = 144a - 12b + c = 61$.

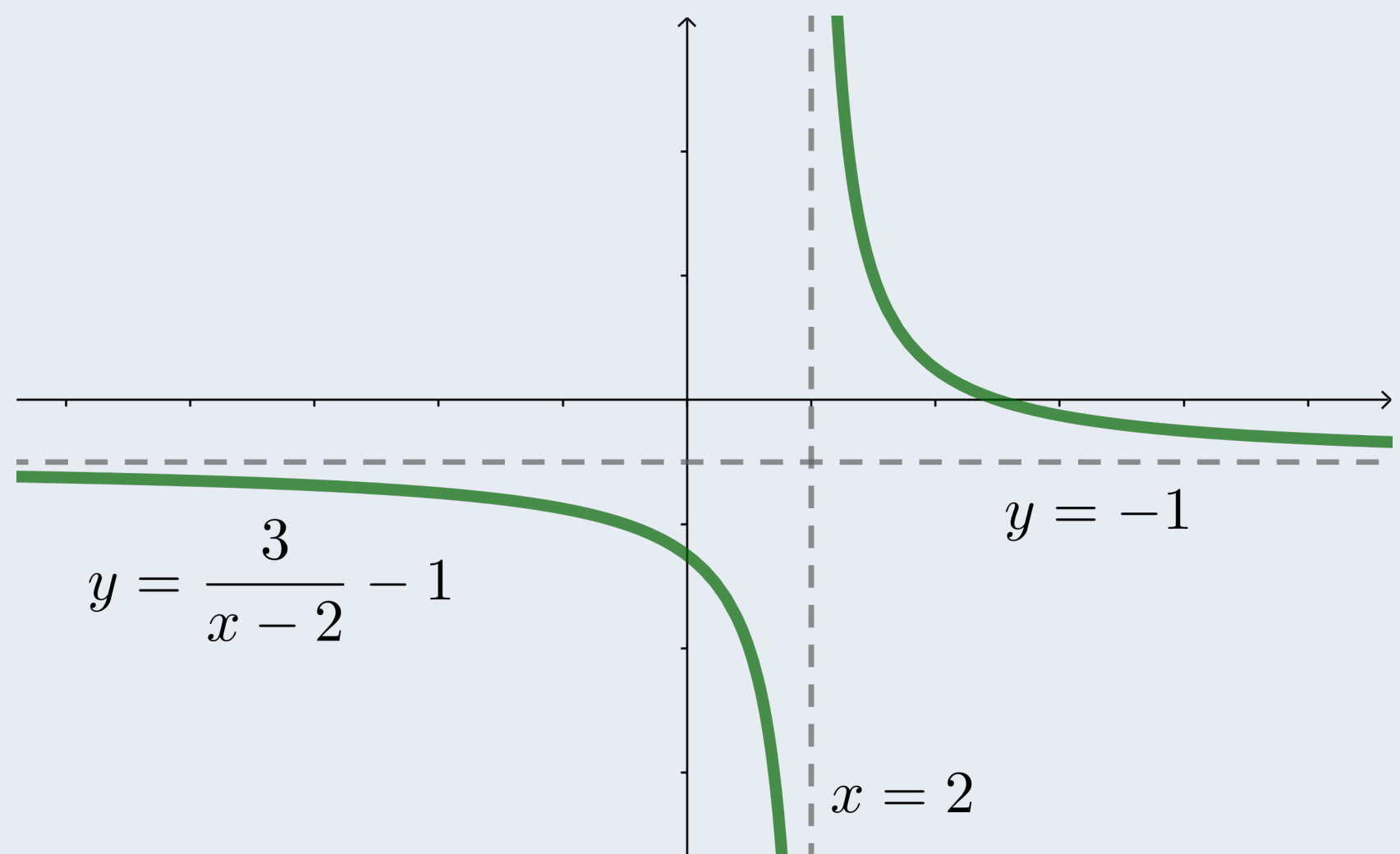
Второй способ. Функция имеет вид $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$. Из рисунка следует, что $(x_0; y_0) = (-4; -3)$. Так как при движении по графику от вершины по горизонтали мы движемся на 2 клетки, а вверх на 4 клетки, то это стандартная парабола с коэффициентом $a = 1$. Значит, $f(x) = (x + 4)^2 - 3$.

Ответ: $f(-12) = (-12 + 4)^2 - 3 = 61$.



Обратная пропорциональность

- Графиком обратной пропорциональности $f(x) = \frac{1}{x}$ является гипербола.
- Общий вид функции $f(x) = \frac{a}{x - x_0} + y_0$, где a – коэффициент сжатия/растяжения, а $(x_0; y_0)$ – точка пересечения асимптот гиперболы.
- Асимптоты гиперболы – это две прямые, параллельные координатным осям, которые график не пересекает, но стремится к ним. График гиперболы симметричен относительно точки пересечения асимптот.
- Для изображенного на рисунке графика можно сказать, что $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.



Пример, где встречается

На рисунке изображены графики $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

► $A(2; 1)$. Так как эта точка – общая для двух графиков, то она удовлетворяет обоим уравнениям функций, следовательно,

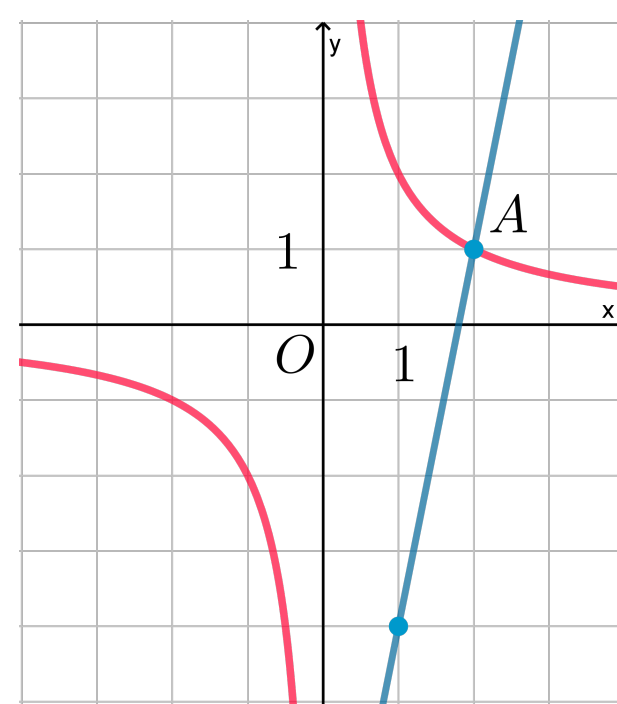
$$\begin{cases} 1 = \frac{k}{2} \\ 1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ b = 1 - 2a \end{cases}$$

Заметим, что на рисунке показано, что прямая проходит через точку $(1; -4)$, следовательно $-4 = a + 1 - 2a \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow b = -9$.

Тогда уравнения функций $f(x) = \frac{2}{x}$ и $g(x) = 5x - 9$. Ищем другую их точку пересечения:

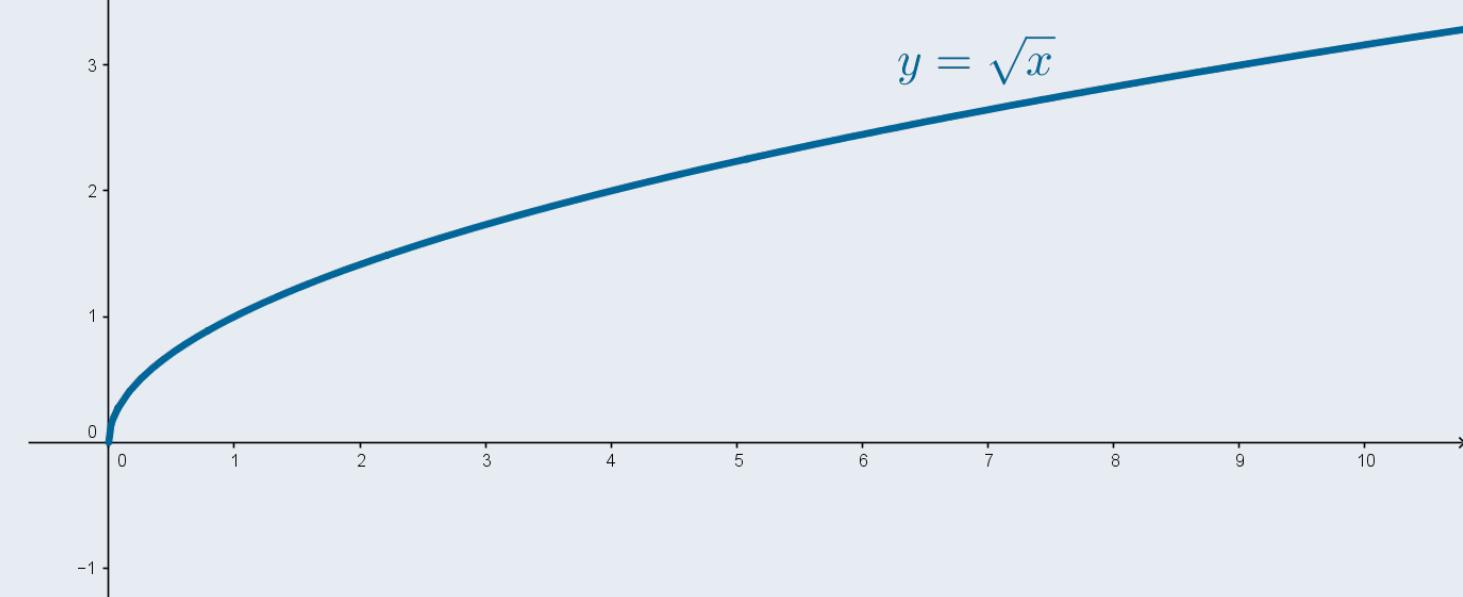
$$\frac{2}{x} = 5x - 9 \Rightarrow 5x^2 - 9x - 2 = 0$$

По теореме Виета произведение корней равно $-\frac{2}{5}$. Так как один корень – это $x_1 = 2$ (абсцисса точки A), то второй корень $x_2 = -\frac{2}{5} : 2 = -\frac{1}{5} = -0,2$. Это и есть абсцисса точки B .



Функция корня

- Функция корня – функция $f(x) = \sqrt{x}$.
- График функции $y = \sqrt{x}$:



- Общий вид уравнения $f(x) = a\sqrt{x - x_0} + y_0$, где $(x_0; y_0)$ – точка, в которую сдвинулась точка $(0; 0)$ (начало графика).
- Заметим, что $y = \sqrt{x}$ определена при $x \geq 0$ и принимает значения $y \geq 0$.

Пример, где встречается

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A . Найдите абсциссу точки A .

► Из рисунка видно, что график $f(x)$ проходит через точку $(4; 5)$, получаем $5 = a\sqrt{4}$, откуда $a = \frac{5}{2}$.

Из рисунка также видно, что прямая $g(x)$ проходит через точки $(2; -2)$ и $(0; -3)$.

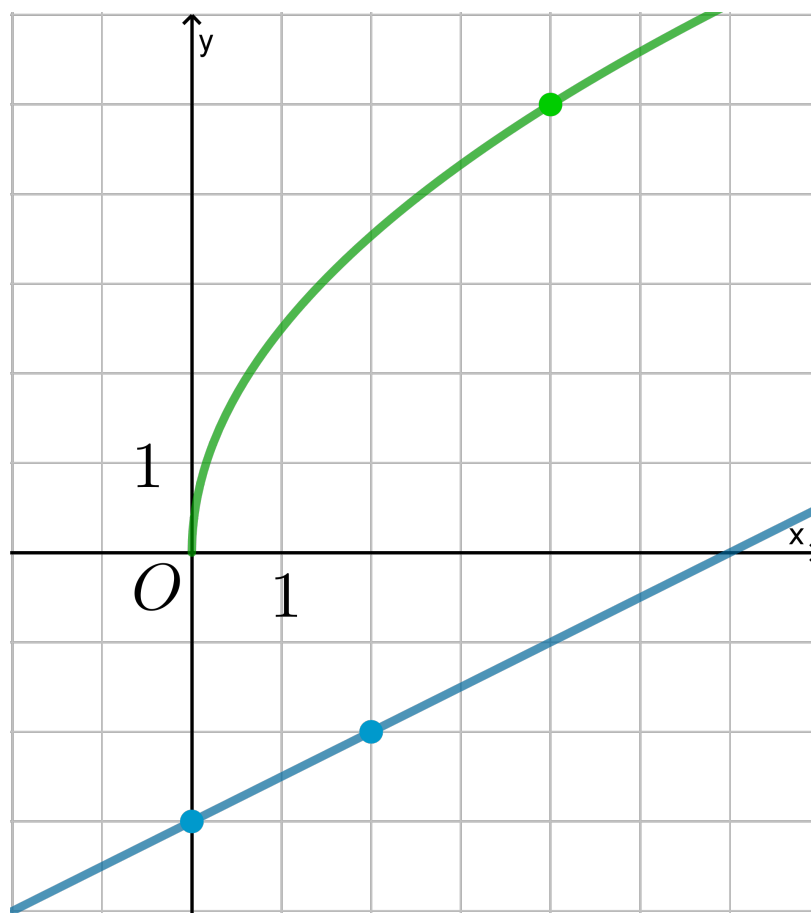
Найдем коэффициенты k, b :

$$\begin{cases} -2 = 2k + b \\ -3 = 0k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -3 \end{cases}$$

Тогда уравнения функций $f(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$. Найдем их точку пересечения:

$$\frac{5}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x - 3 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 37x + 36 = 0, \text{ при } x \geq 6 \Leftrightarrow x = 36$$

Нашли абсциссу точки пересечения графиков.



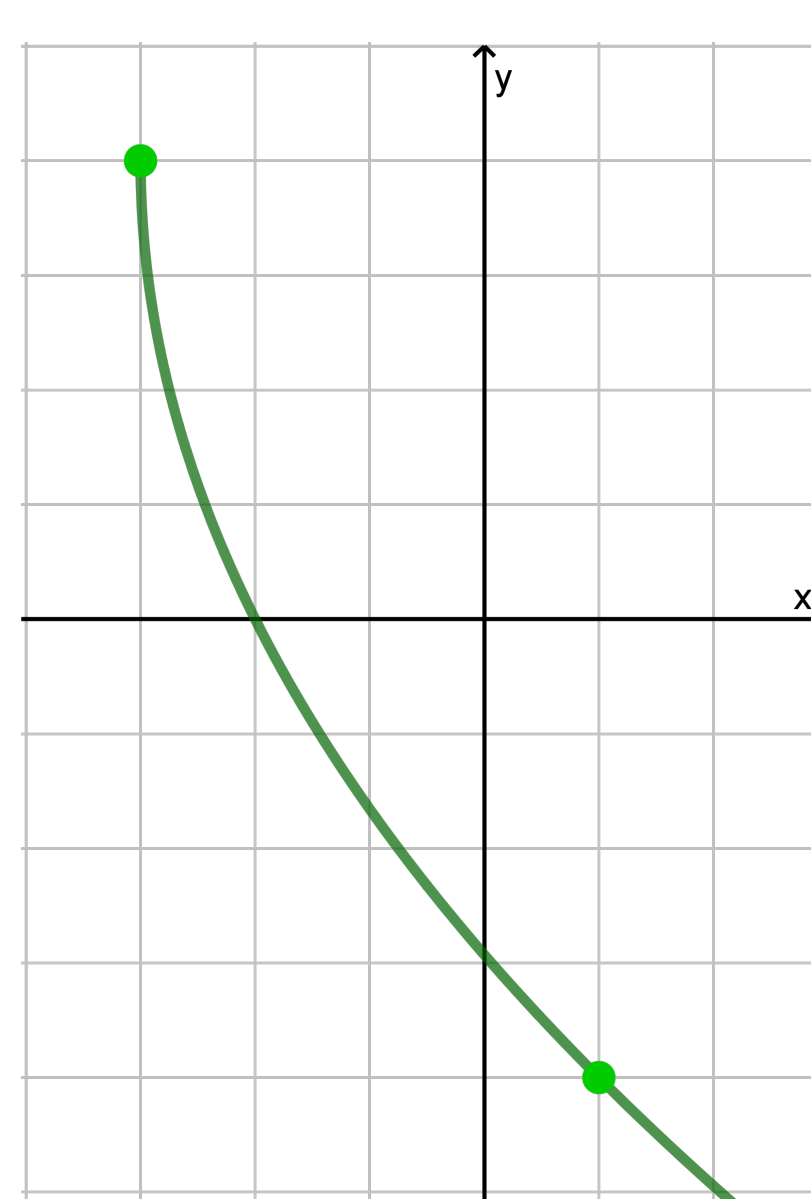
Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a\sqrt{x - x_0} + y_0$, где числа a, x_0, y_0 – действительные. Найдите значение $f(6)$.

► Из рисунка видно, что начальная точка графика смещена в точку $(-3; 4)$. Следовательно, $x_0 = -3$, $y_0 = 4$. Тогда функция выглядит как $f(x) = a\sqrt{x + 3} + 4$.

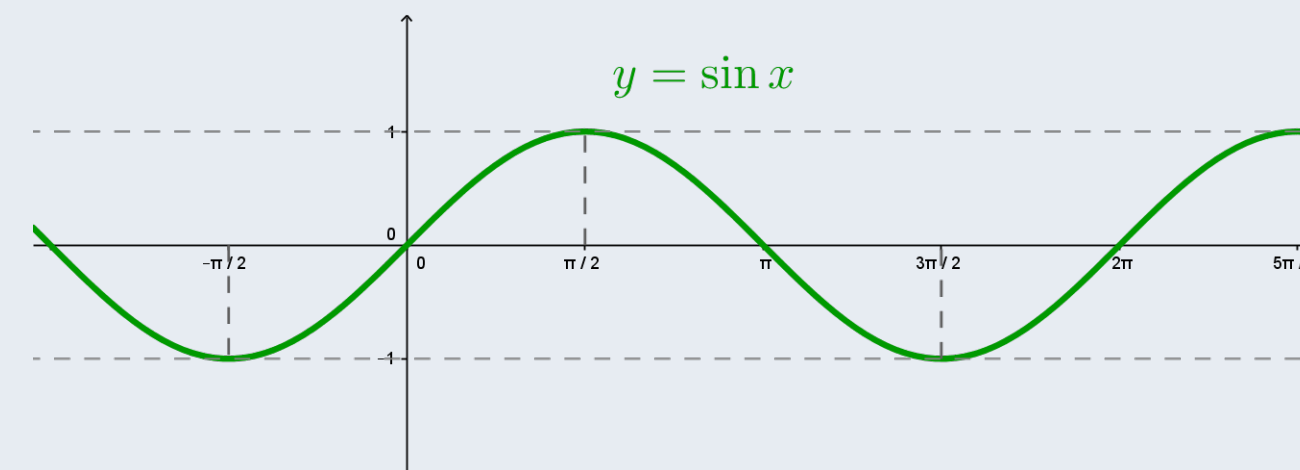
Также из графика видно, что при движении по горизонтали на 1 мы смещаемся вниз по вертикали на 4, при движении по горизонтали на 4 мы смещаемся вниз по вертикали на 8 (у стандартной $y = \sqrt{x}$ по вертикали было бы смещение вверх на 1 и 2 соответственно). Следовательно, $a = -4$. Тогда $f(x) = -4\sqrt{x + 3} + 4$.

Ответ: $f(6) = -4\sqrt{3 + 3} + 4 = -8$.

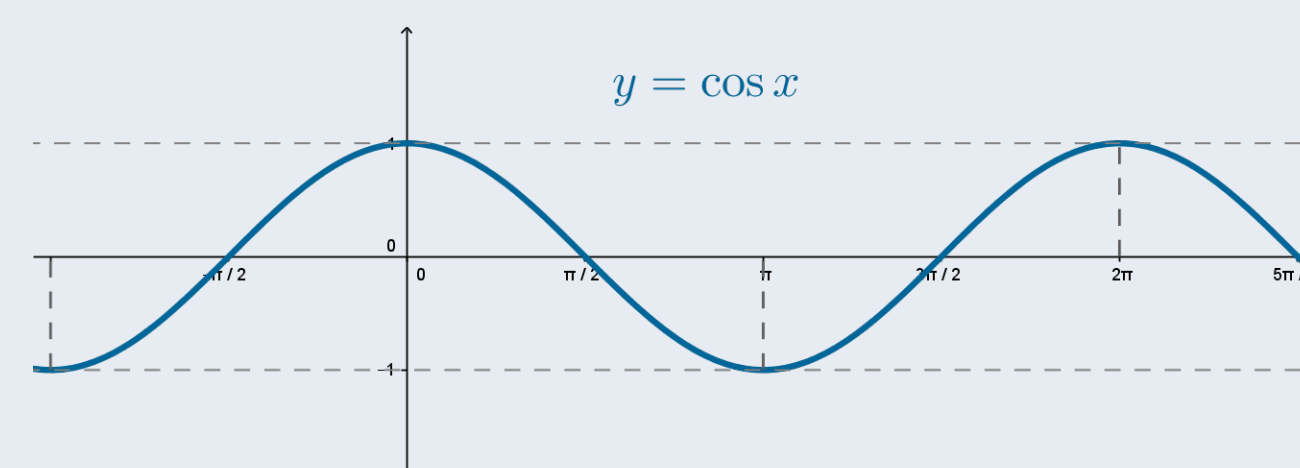


Тригонометрические функции синуса и косинуса

- Графиком функции $y = \sin x$ является синусоида.



- Графиком функции $y = \cos x$ также является синусоида, но сдвинутая на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево по оси Ox .



- Если функция представлена в виде $y = a \cos(x - x_0) + y_0$, то график сжат/растянут в a раз, сдвинут по горизонтали на x_0 и по вертикали на y_0 .
- Обе функции могут принимать значения $y \in [-1; 1]$.
- Функция $y = \sin x$ – нечетная, функция $y = \cos x$ – четная.

Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $y = a \cos x + b$. Найдите $a + b$.

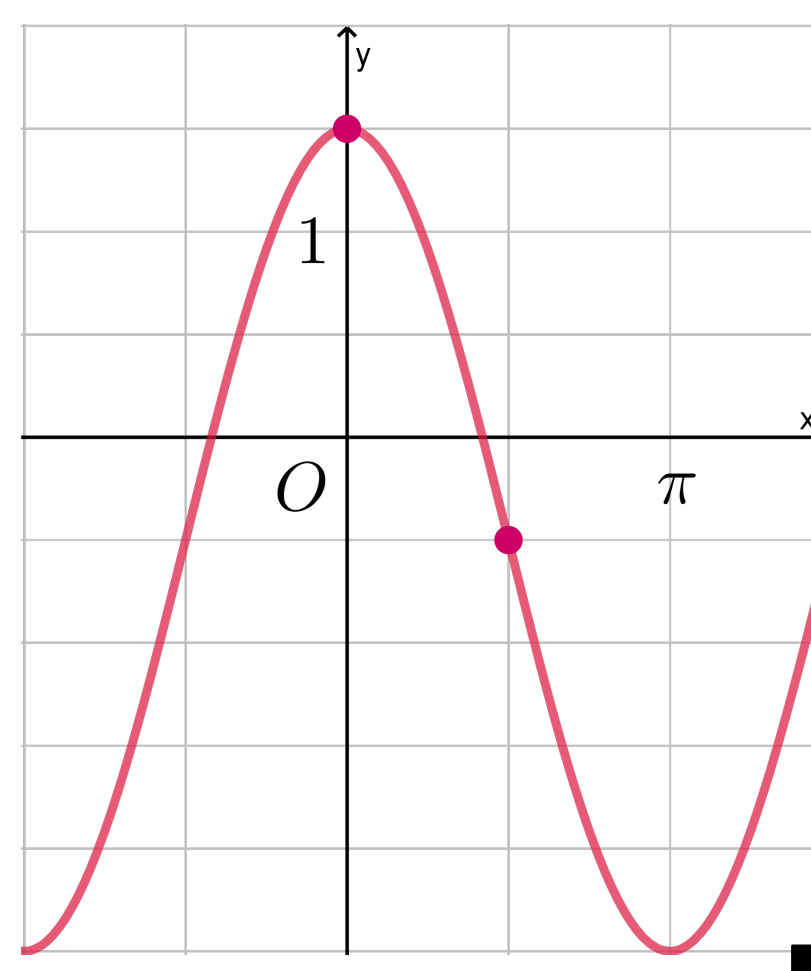
► Из рисунка видно, что график проходит через точку $(\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{2})$. Следовательно, верно равенство

$$-\frac{1}{2} = a \cos \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Из рисунка также видно, что график проходит через точку $(0; \frac{3}{2})$, следовательно

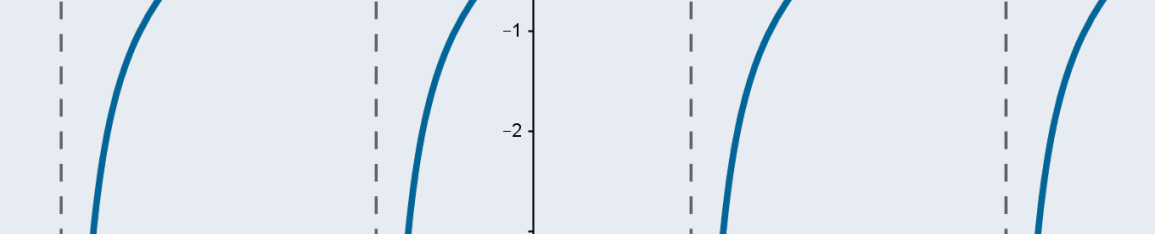
$$\frac{3}{2} = a \cdot \cos 0 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Тогда $a + b = -\frac{1}{2} + 2 = 1,5$.

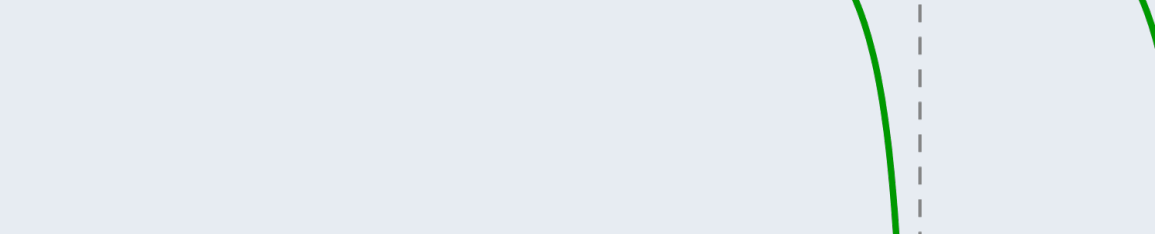


Тригонометрические функции тангенса и котангенса

- График функции $y = \operatorname{tg} x$. Прямые $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, где k – нечетное число, являются асимптотами графика (то есть график их не пересекает).



- График функции $y = \operatorname{ctg} x$. Прямые $x = n \cdot \pi$, где n – целое число, являются асимптотами графика (то есть график их не пересекает).



- Обе функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ периодичны с периодом π и нечетны.

Показательная функция

- Показательная функция $f(x) = a^x$ при $a > 1$ является возрастающей при всех x , область значений $a^x \in (0; +\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(0; 1)$.

$$f(x) = a^x, a > 1$$



- Показательная функция $f(x) = a^x$ при $0 < a < 1$ является убывающей при всех x , область значений $a^x \in (0; +\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(0; 1)$.
- Функция $f(x) = k \cdot a^{x-x_0} + y_0$ представляет собой стандартный график, сжатый/растянутый в k раз и сдвинутый по горизонтали на x_0 и по вертикали на y_0 , то есть точка $(0; 1)$ смещается в точку $(x_0; y_0)$.

Пример, где встречается

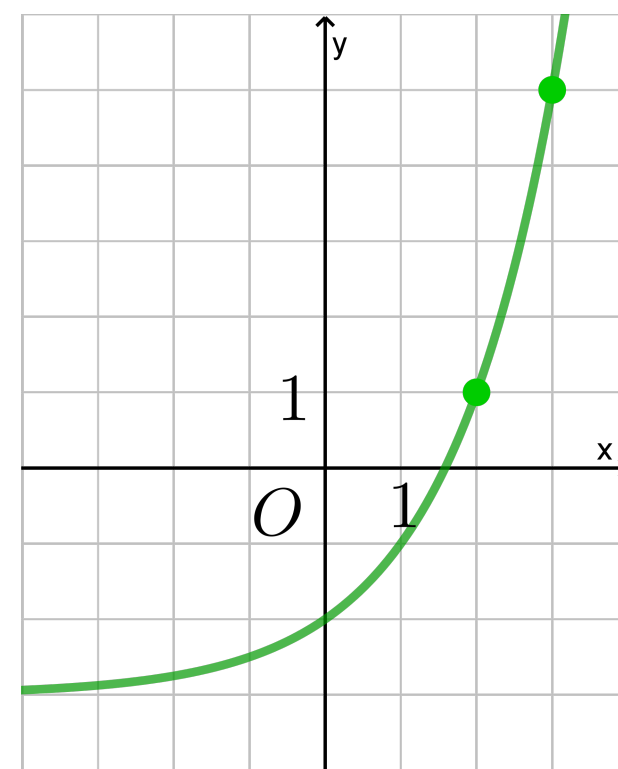
На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.

► График проходит через точки $(2; 1)$ и $(3; 5)$. Следовательно, верно

$$\begin{cases} a^2 + b = 1 \\ a^3 + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 - 4 = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases}$$

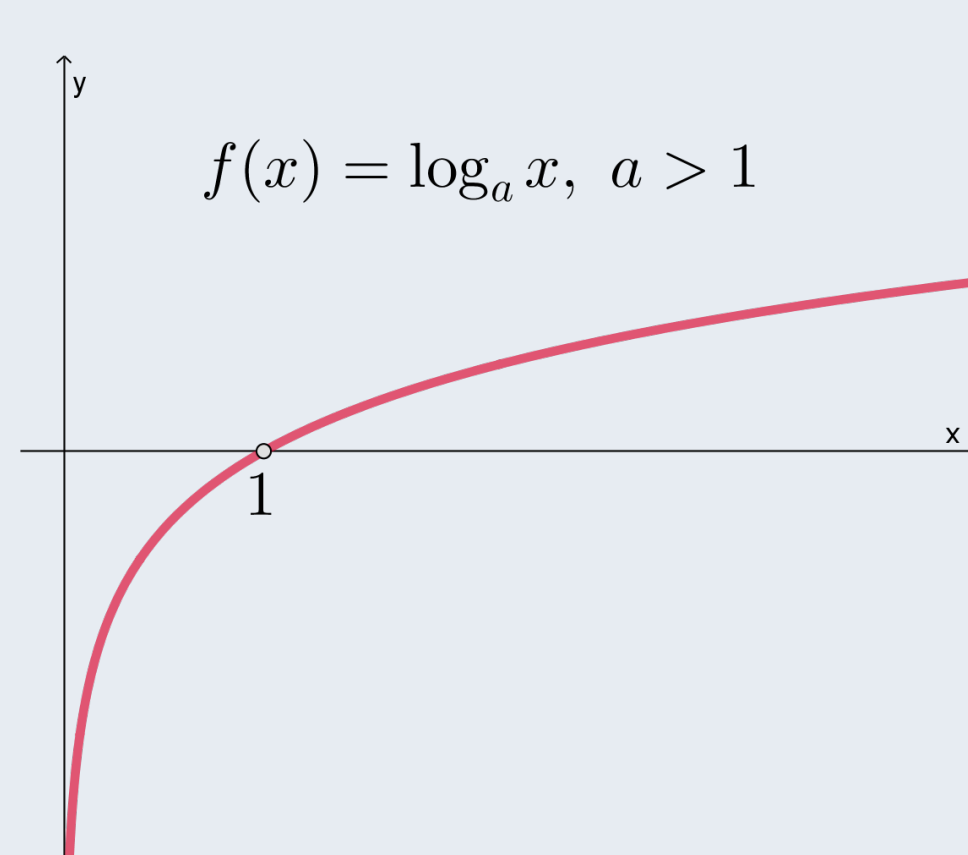
Первое уравнение раскладывается как $(a - 2)(a^2 + a + 2) = 0$, и корнем будет $a = 2$. Следовательно, $b = -3$.

Тогда $f(x) = 2^x - 3$, значит, $f(6) = 2^6 - 3 = 61$.



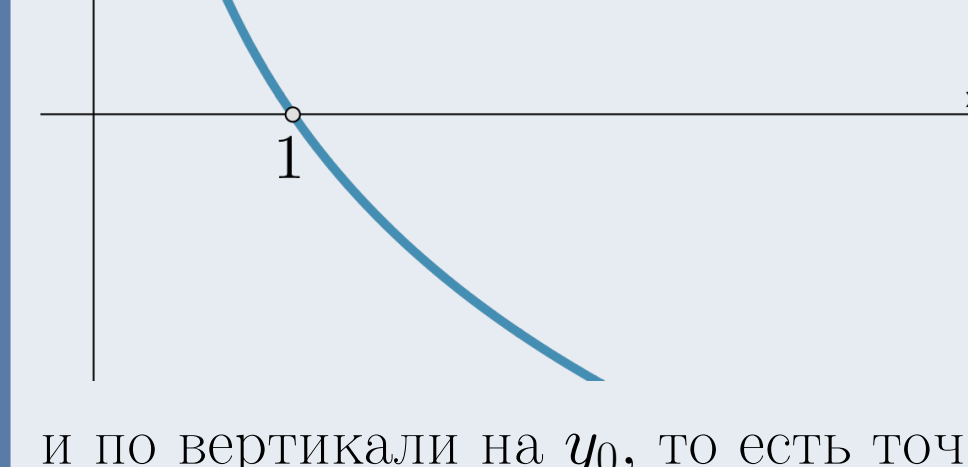
Логарифмическая функция

- Логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ является возрастающей, ее область определения $x > 0$, ее область значений $(-\infty; +\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(1; 0)$.



- Логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ является убывающей, ее область определения $x > 0$, ее область значений $(-\infty; +\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(1; 0)$.

- Функция $f(x) = k \cdot \log_a(x - x_0) + y_0$ представляет собой стандартный график, сжатый/растянутый в k раз и сдвинутый по горизонтали на x_0 и по вертикали на y_0 , то есть точка $(1; 0)$ смещается в точку $(x_0; y_0)$.



Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(11)$.

► Из рисунка видно, что график проходит через точки $(-3; 1)$ и $(-1; 2)$. Тогда можно составить следующую систему:

$$\begin{cases} 1 = \log_a(b - 3) \\ 2 = \log_a(b - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 3 \\ a^2 = b - 1 \end{cases}$$

Получаем уравнение $a^2 - a - 2 = 0$, корнями которого являются $a = -1; 2$.

Так как a – основание логарифма, то есть $a > 0$, $a \neq 1$, то подходит $a = 2$. Тогда $b = 5$. Следовательно, $f(x) = \log_2(x + 5)$.

Тогда ответ $f(11) = \log_2 16 = 4$.

