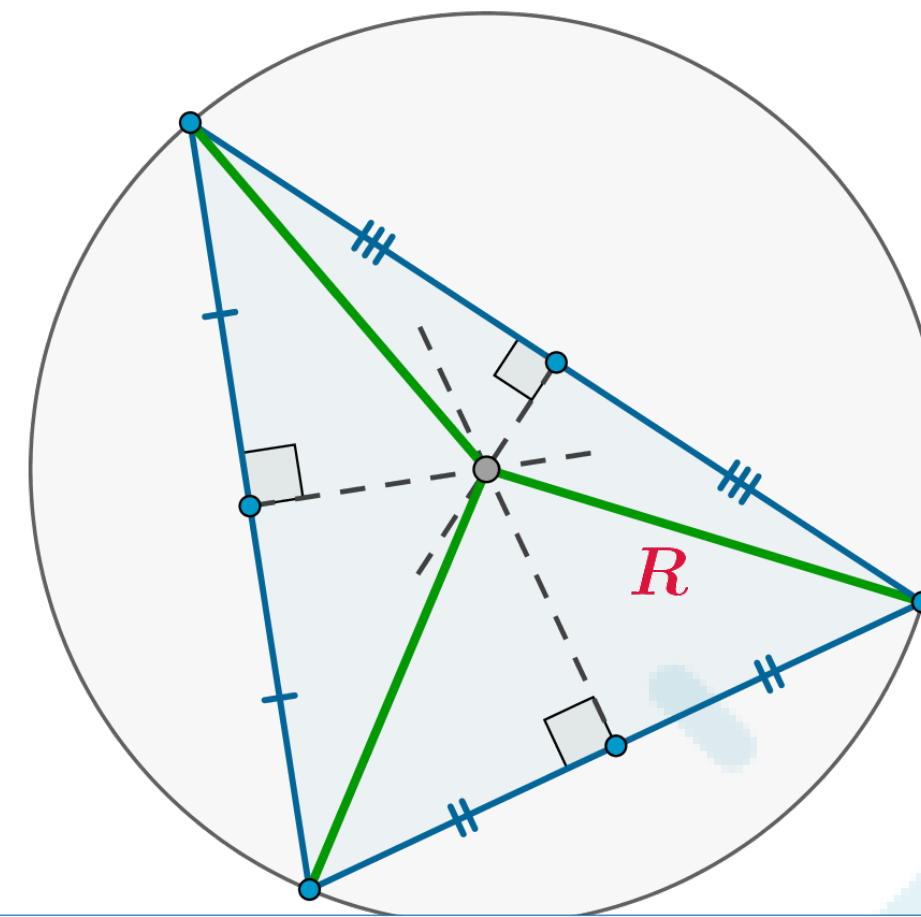
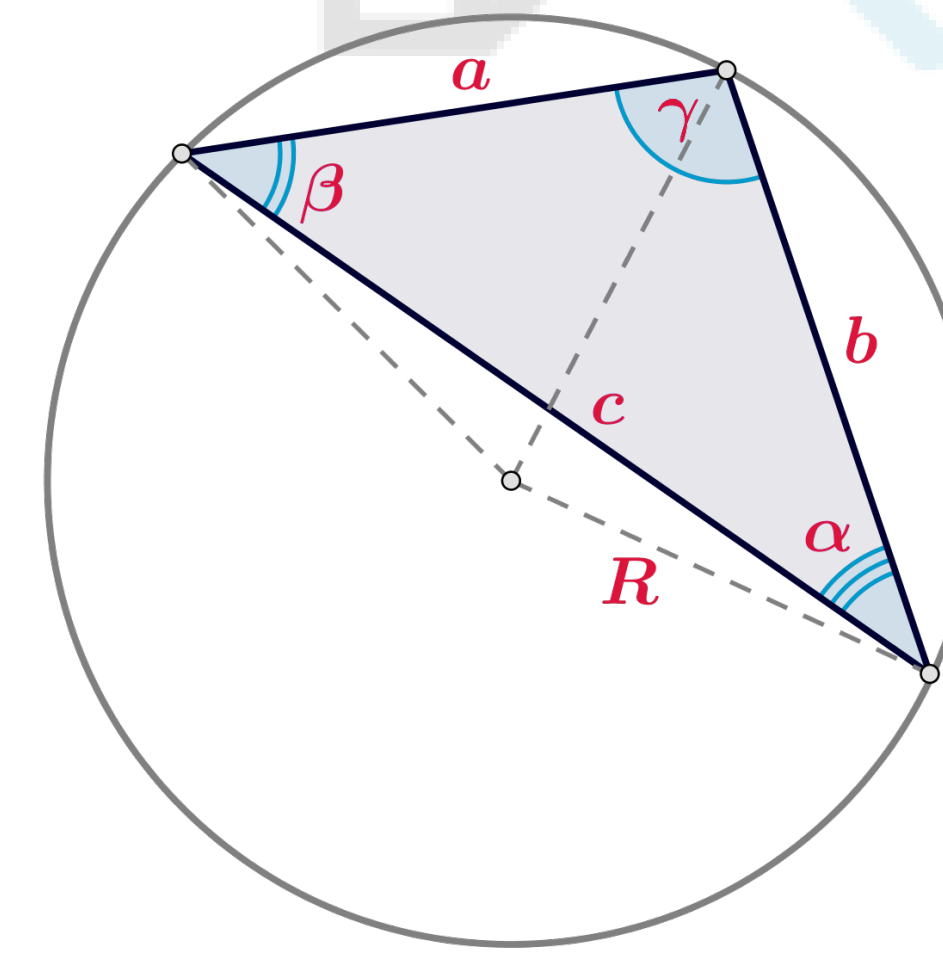


$OR \perp AB \Leftrightarrow OR$ делит AB пополам.

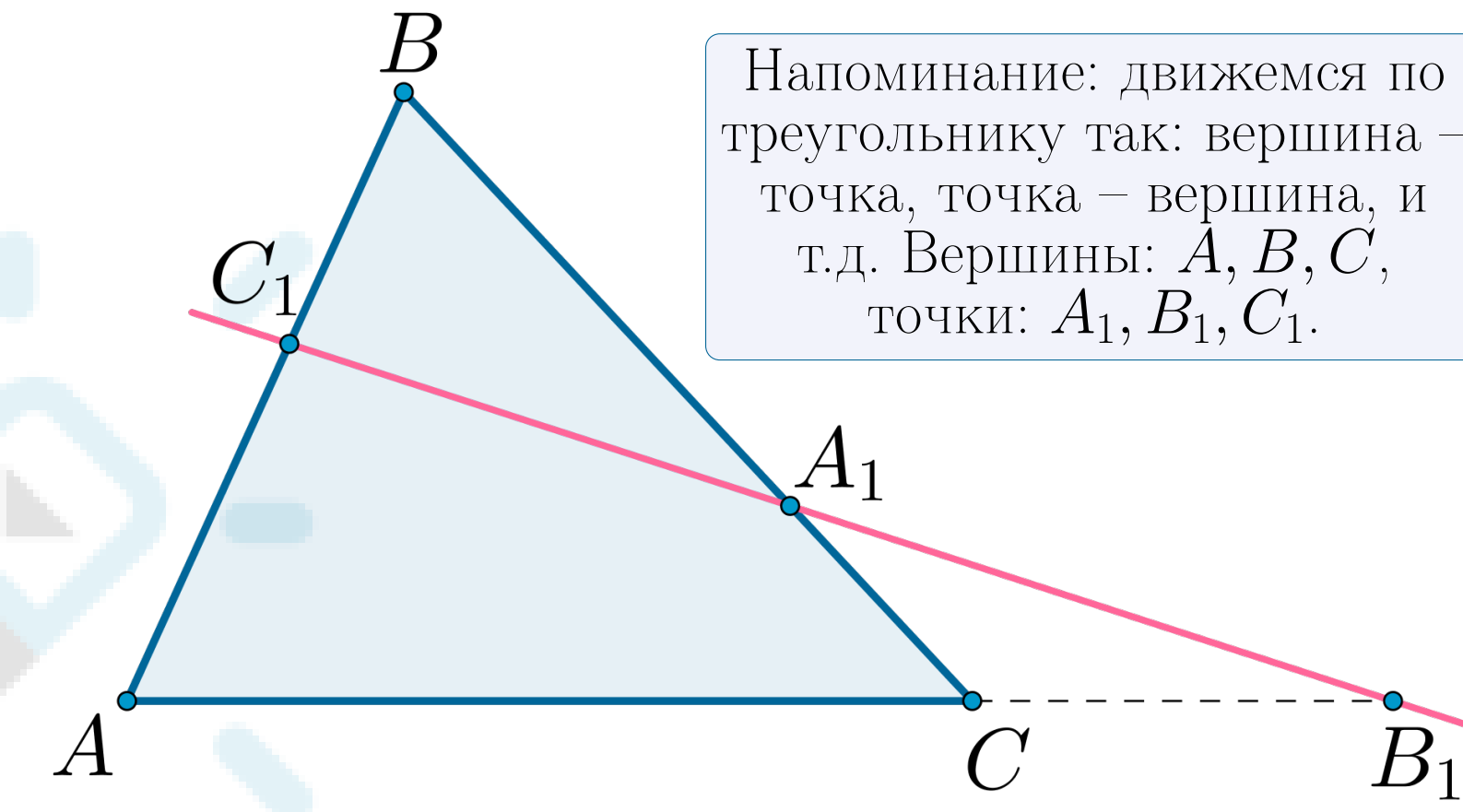


Центр окружности, описанной около треугольника, есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.



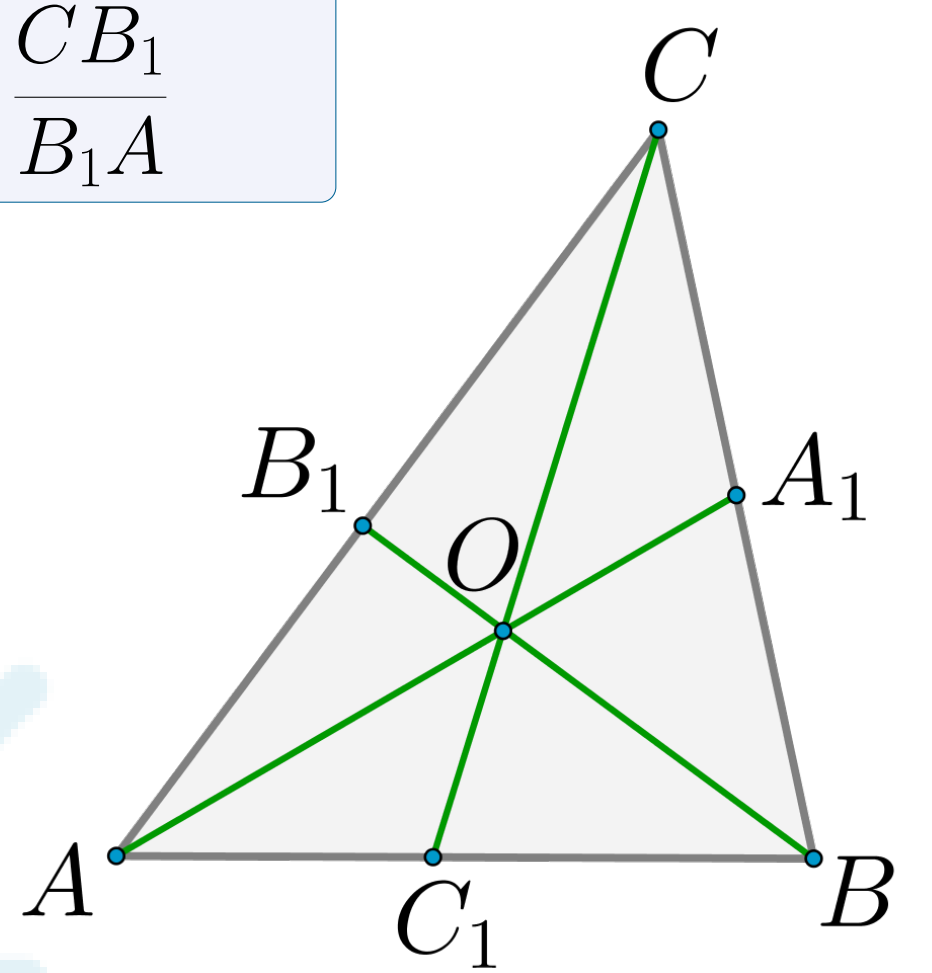
Теорема синусов
 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Теорема Менелая
 $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

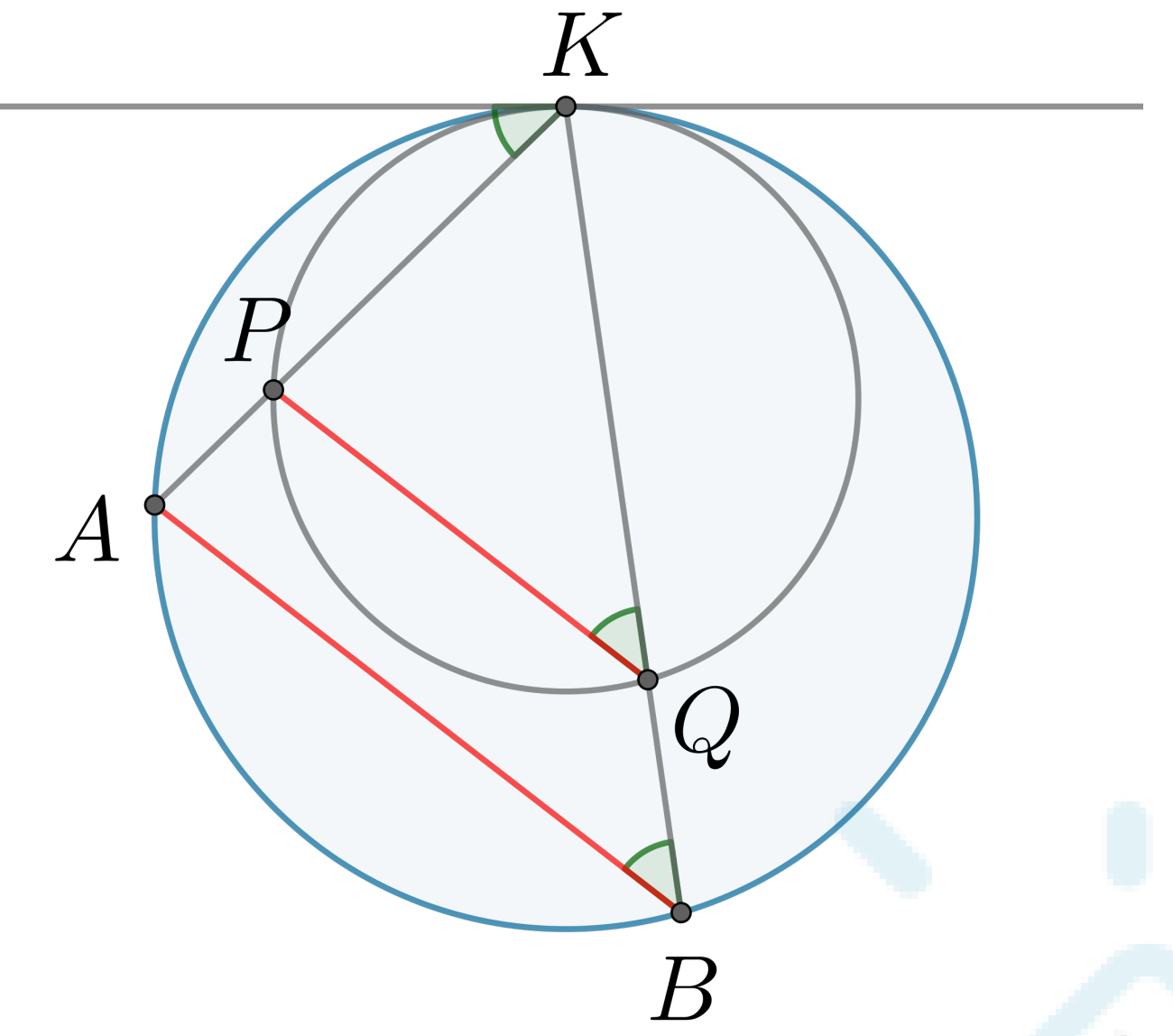


Напоминание: движемся по треугольнику так: вершина – точка – вершина, и т.д. Вершины: A, B, C , точки: A_1, B_1, C_1 .

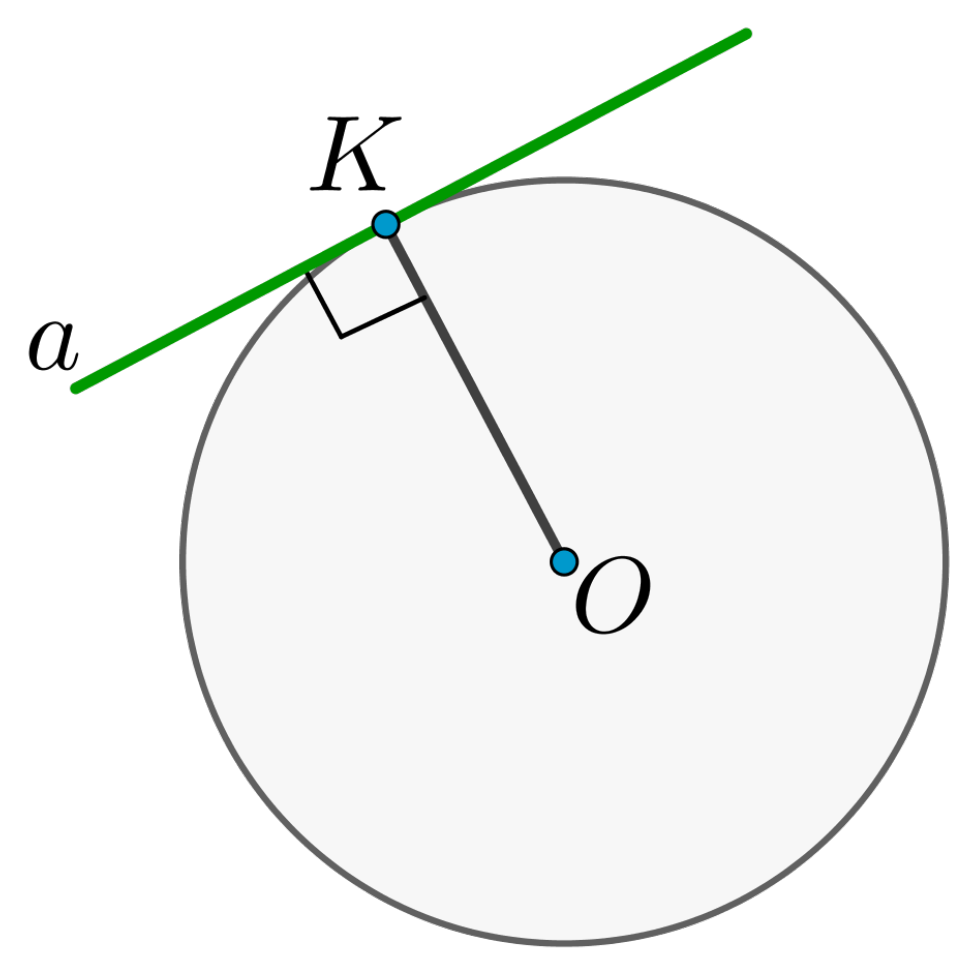
Теорема Ван-Обеля
 $\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$



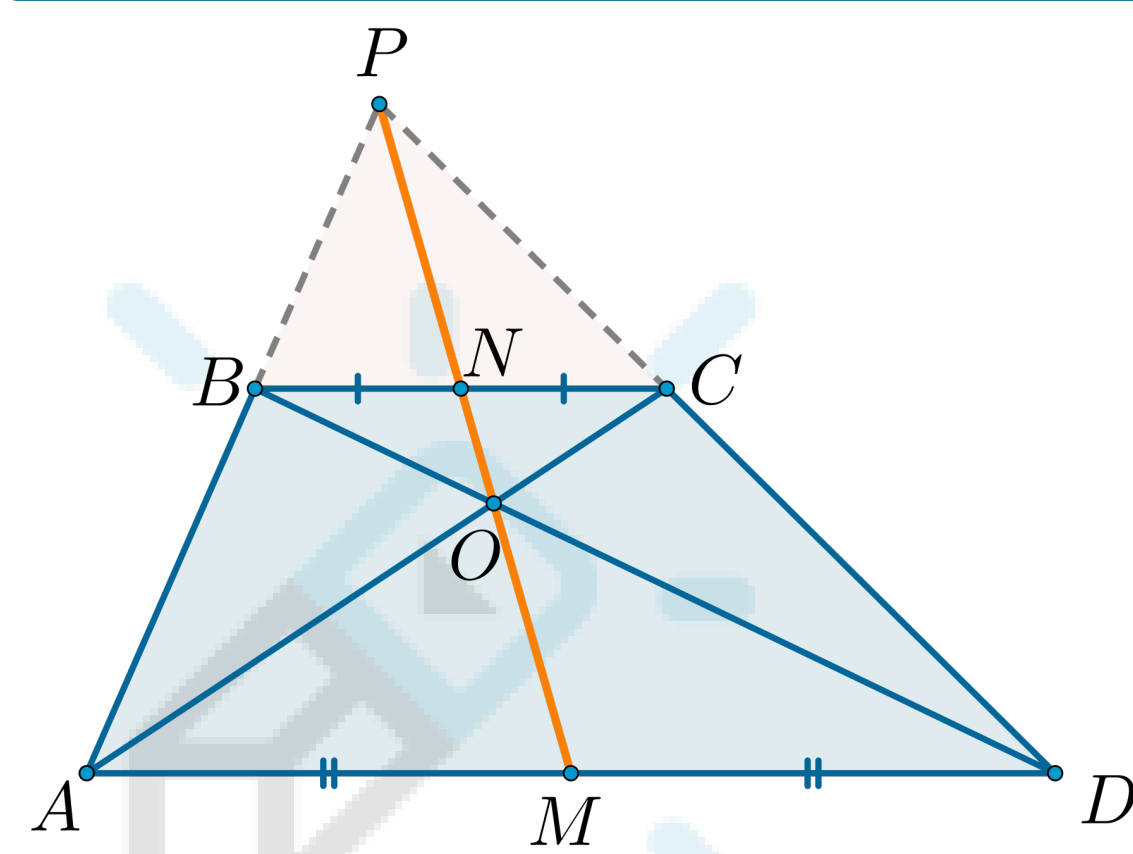
Окружности касаются в точке K . Хорды AP, AK лежат на одной прямой, как и хорды BQ, BK . Тогда $AB \parallel PQ$.



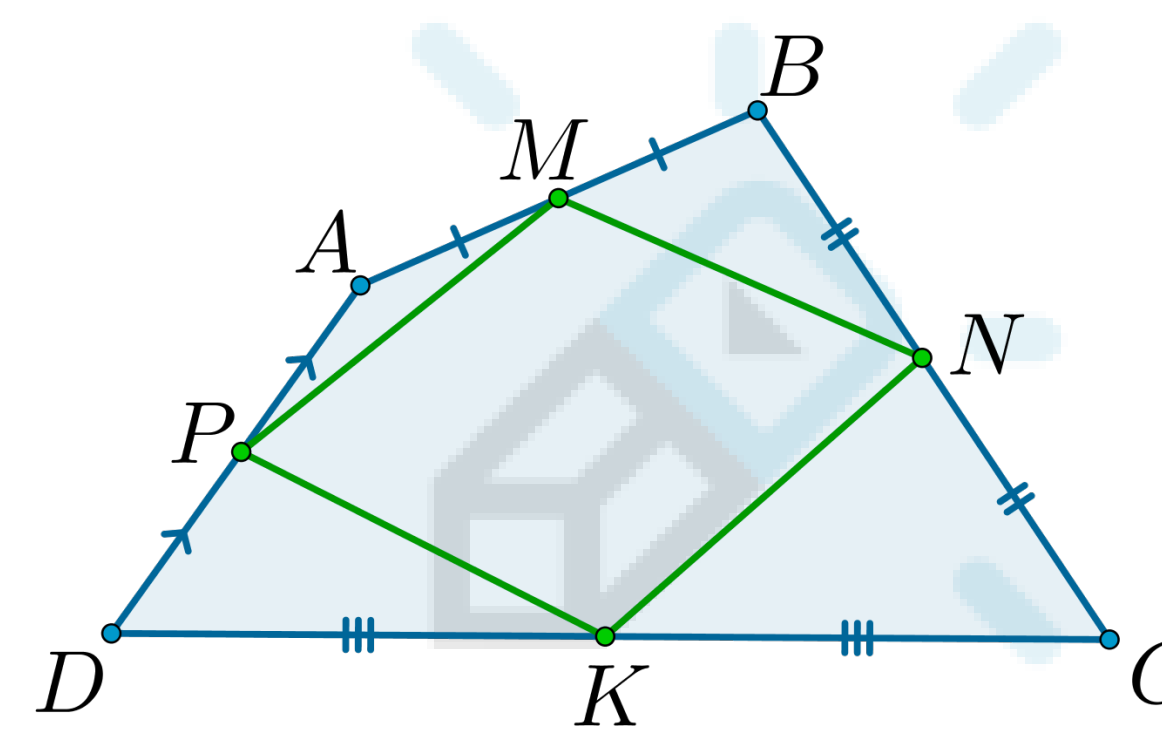
Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Наоборот: если радиус перпендикулярен прямой и пересекает ее в точке на окружности, эта прямая – касательная.



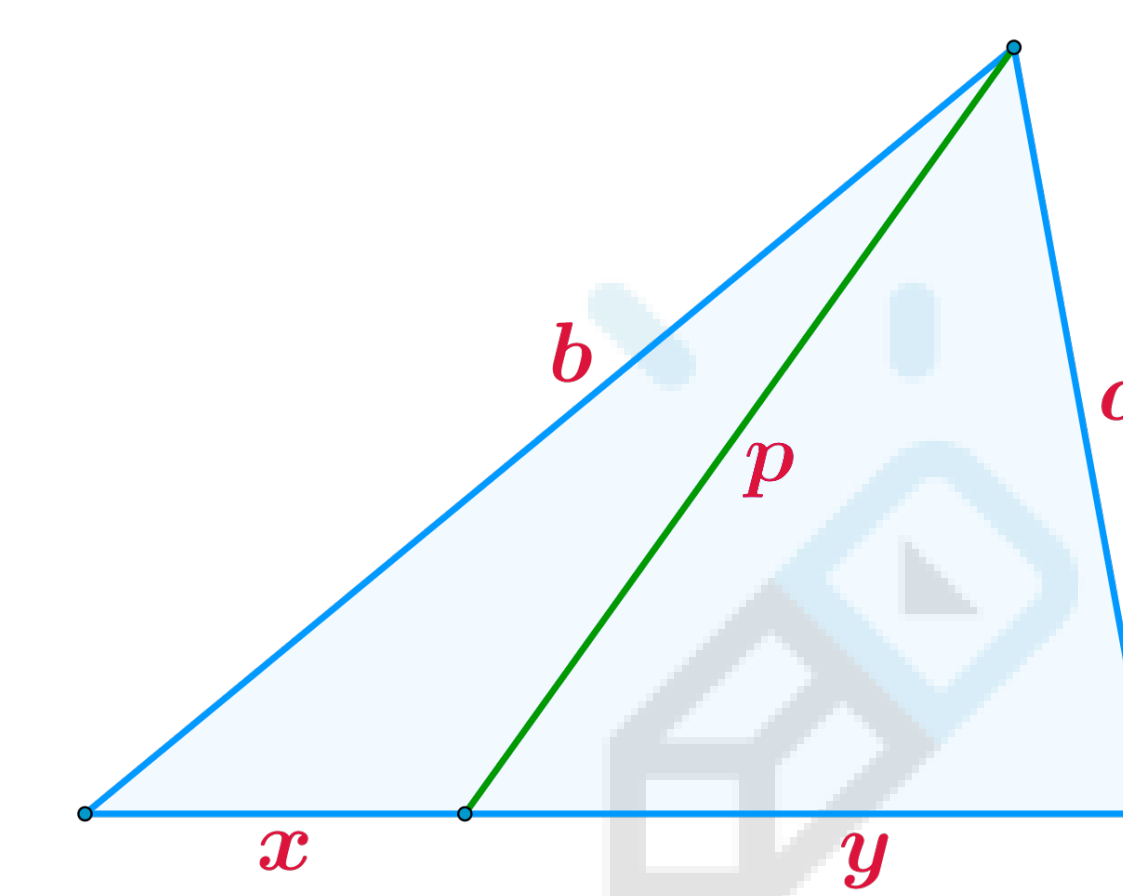
У трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.



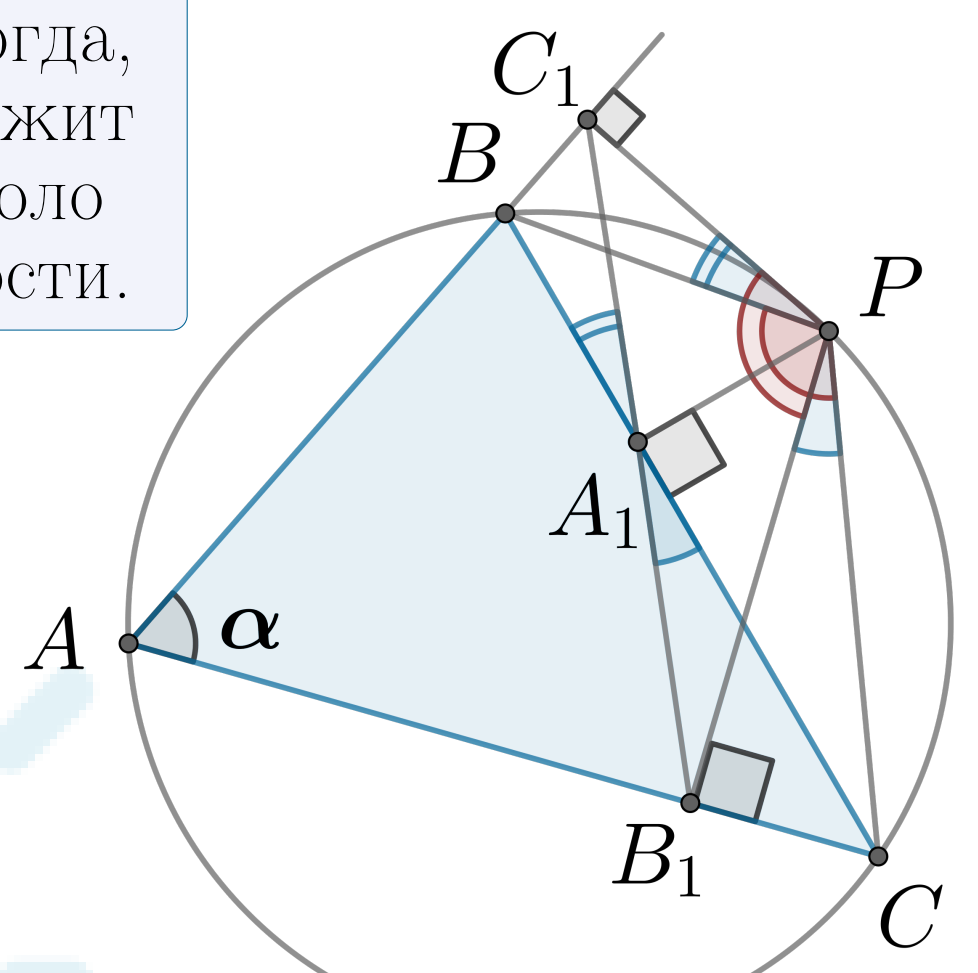
Средины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Следствие: отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, делятся точкой пересечения пополам.



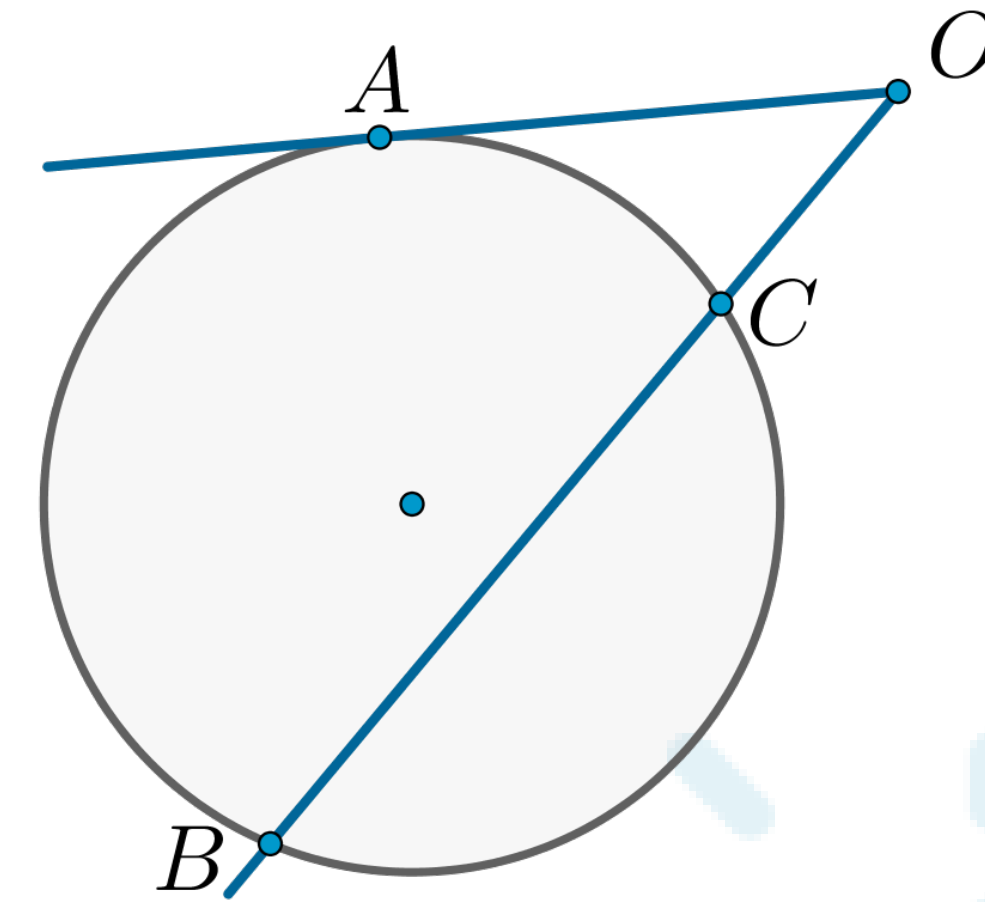
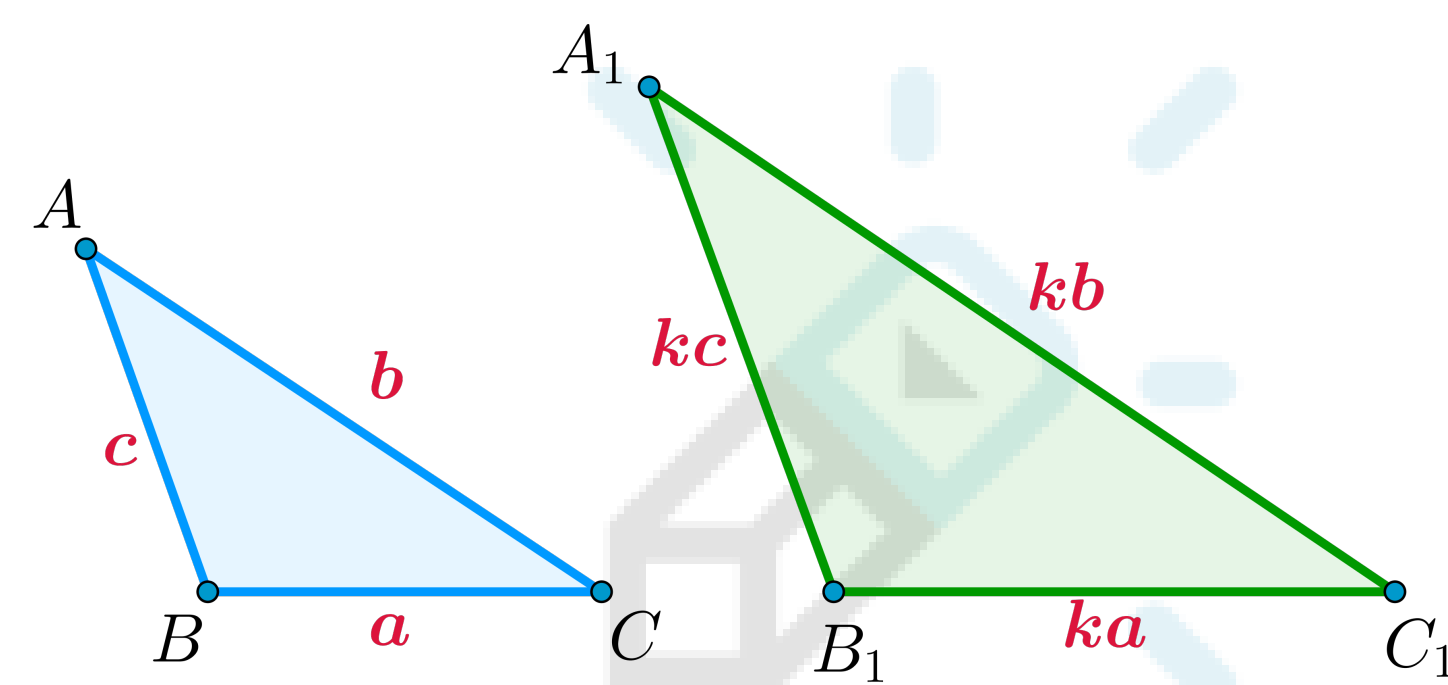
Теорема Стюарта
 $p^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy$



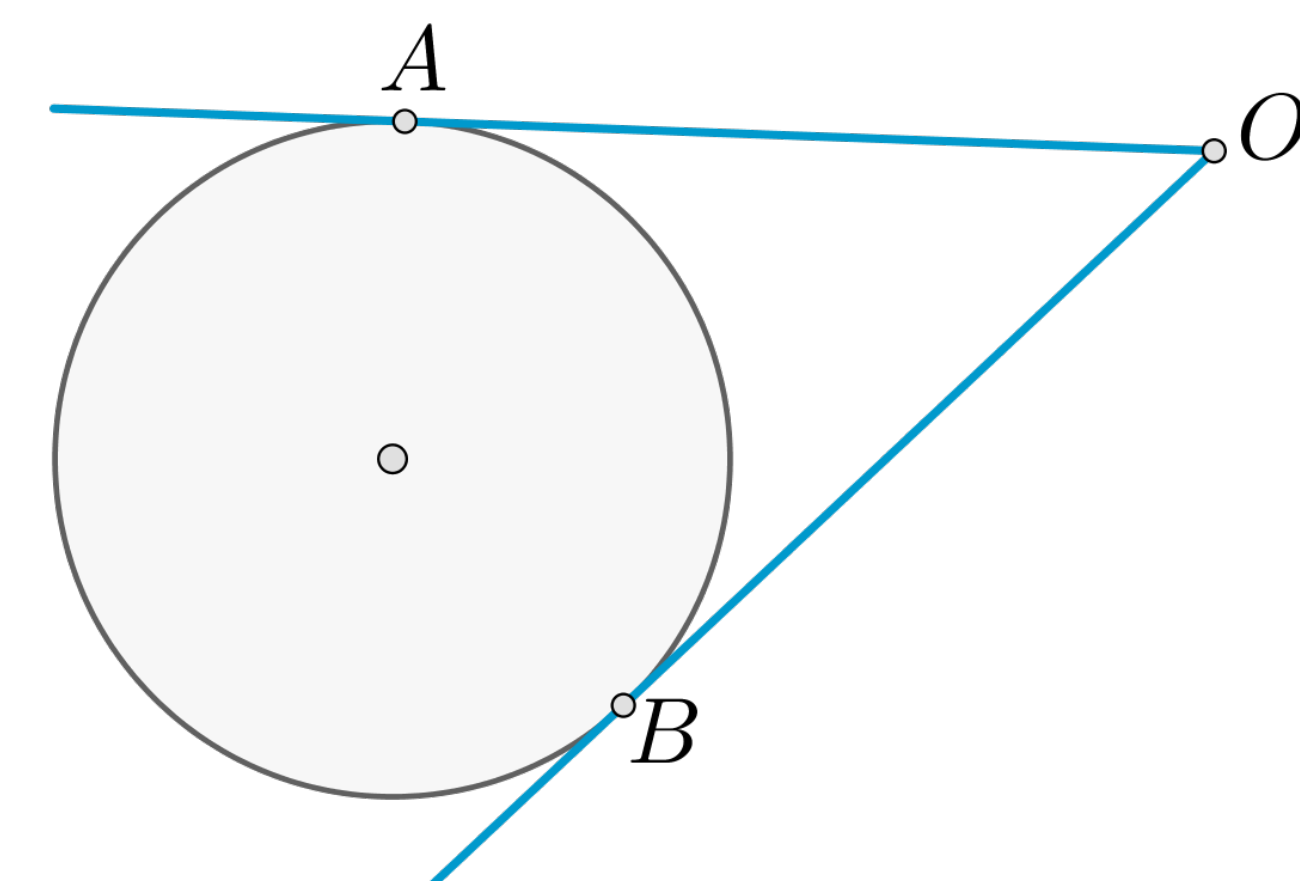
Прямая Симсона
Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной около $\triangle ABC$ окружности.



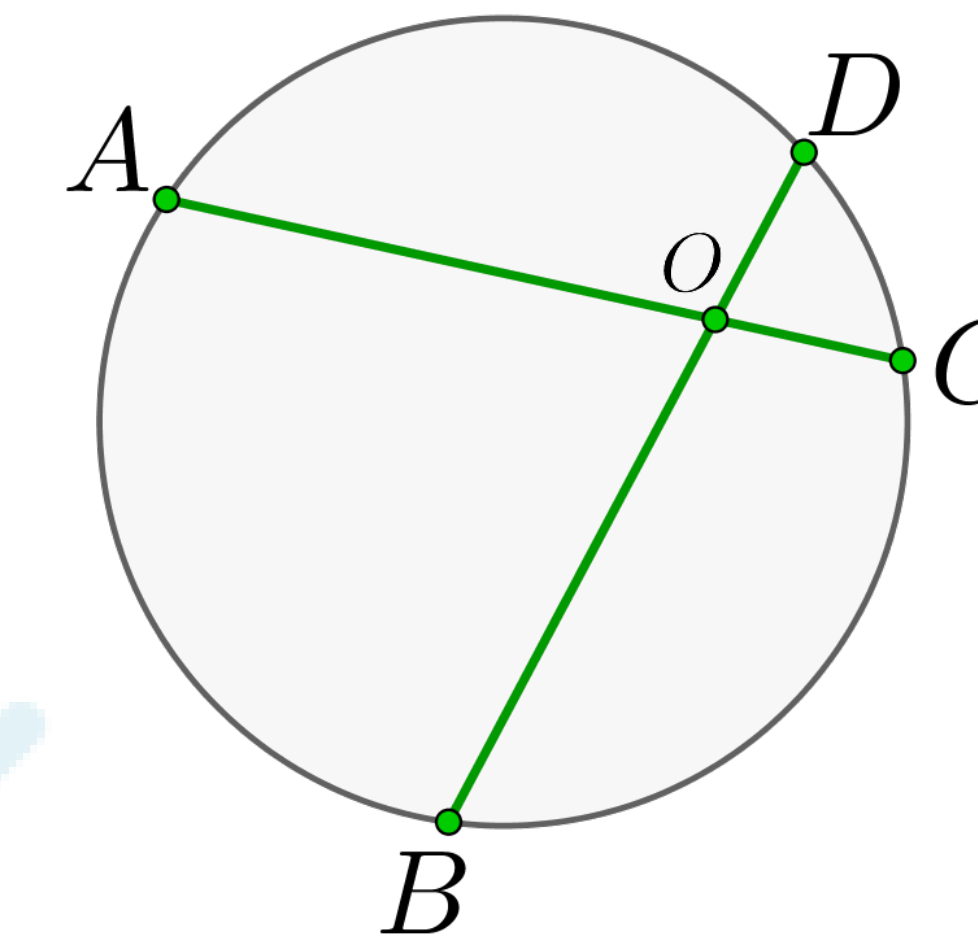
Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.
 $OA^2 = OB \cdot OC$

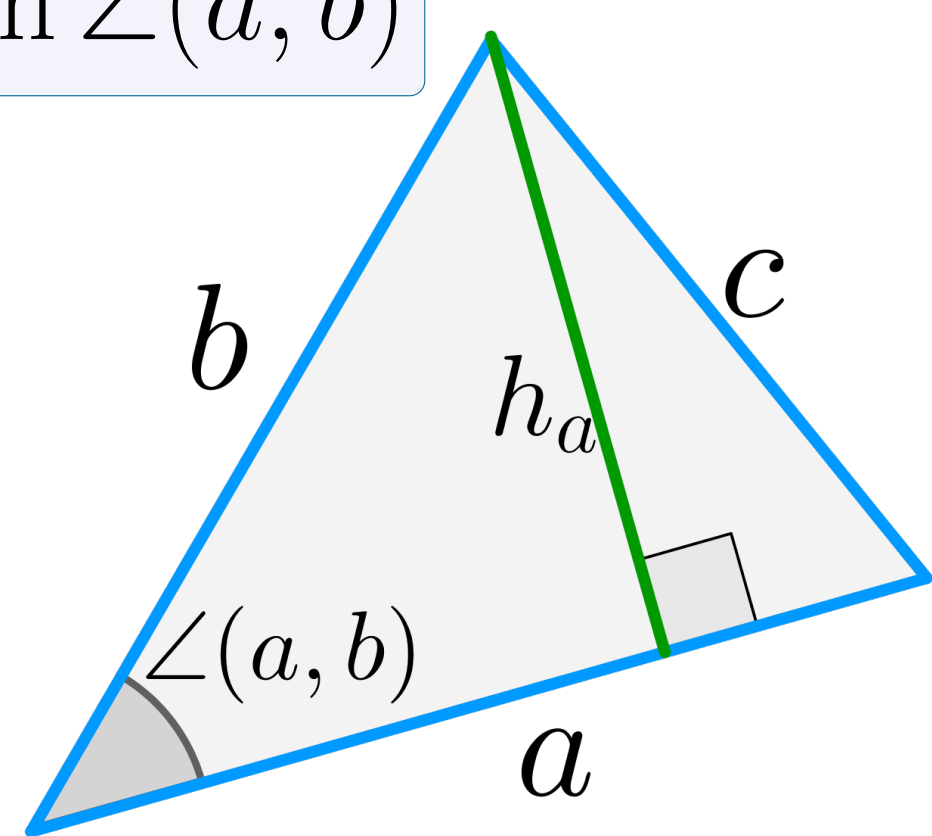


Отрезки касательных из одной точки к окружности равны:
 $OA = OB$



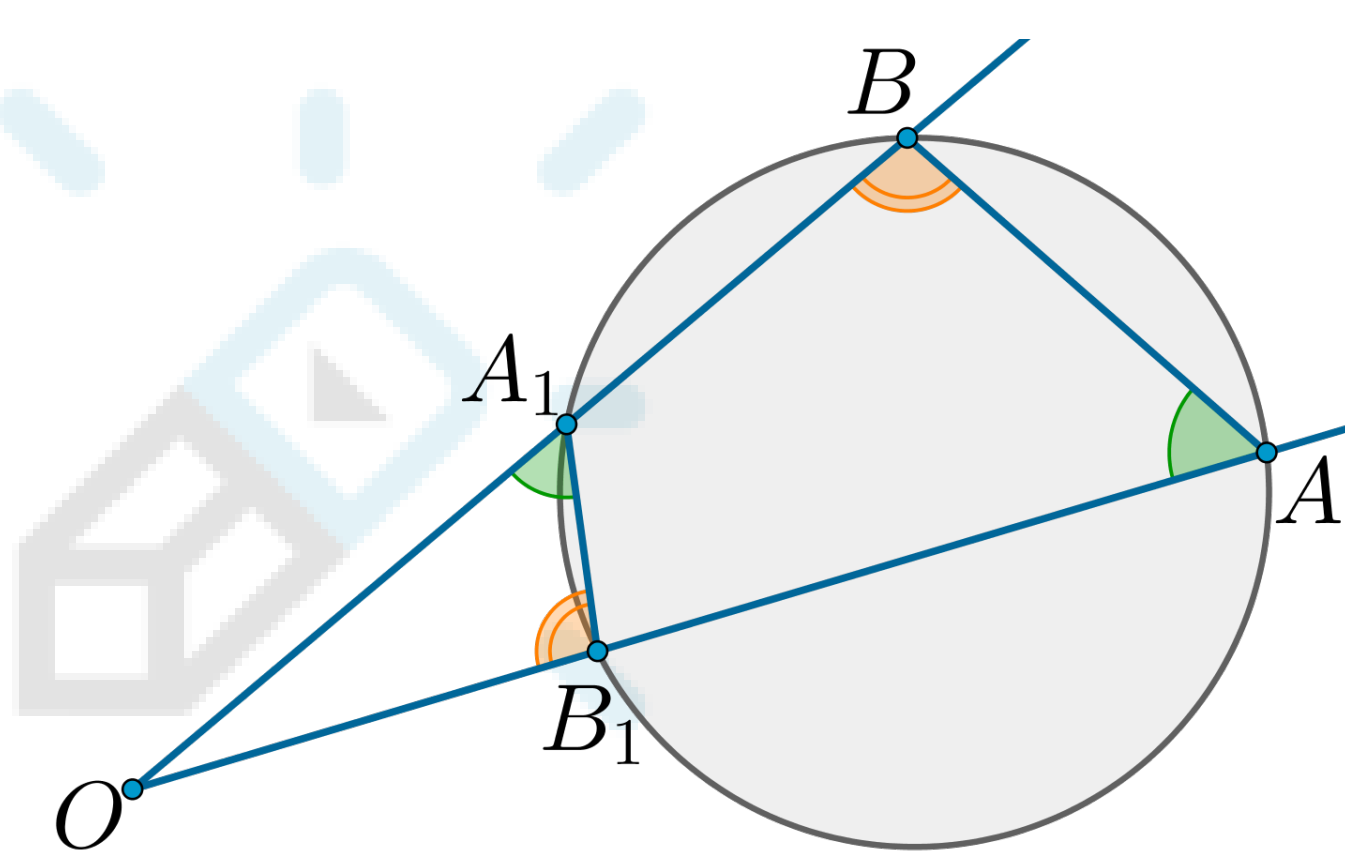
Произведения отрезков хорд равны:
 $AO \cdot OC = BO \cdot OD$

Площадь \triangle :
 $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$
 $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \angle(a, b)$

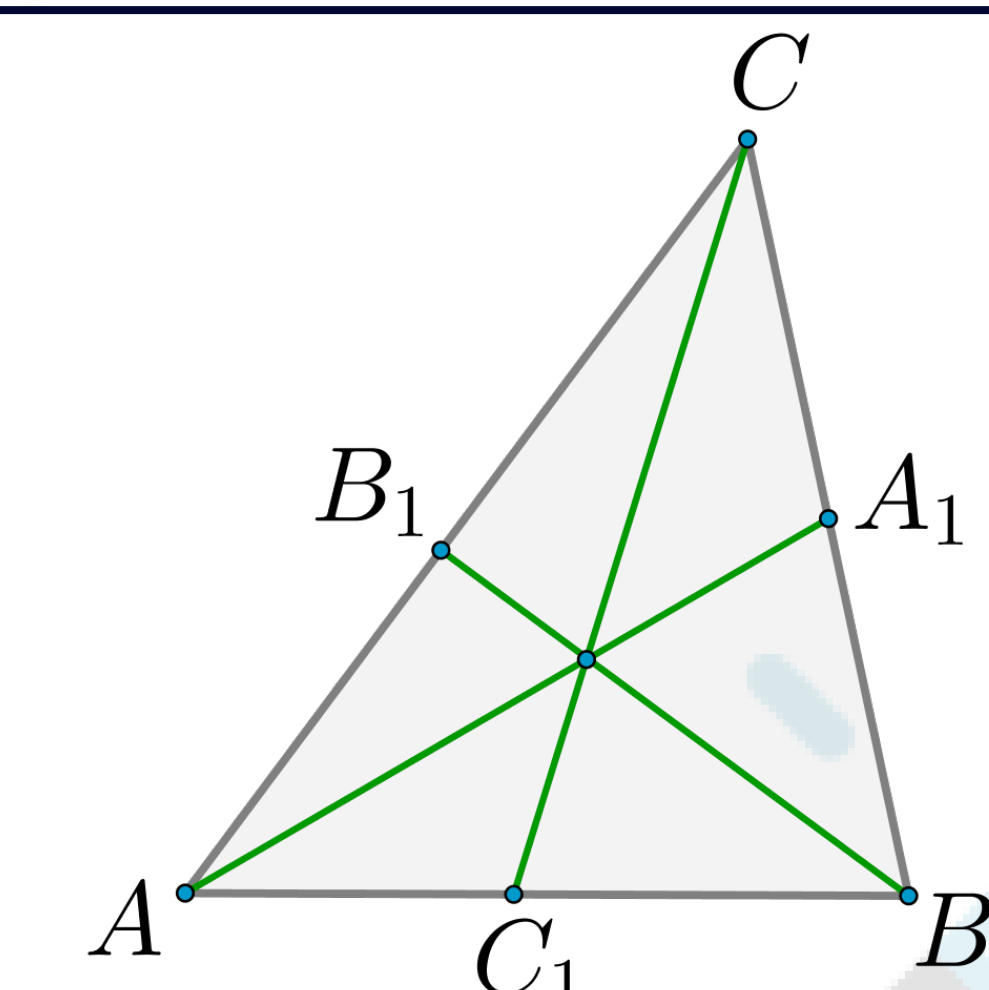
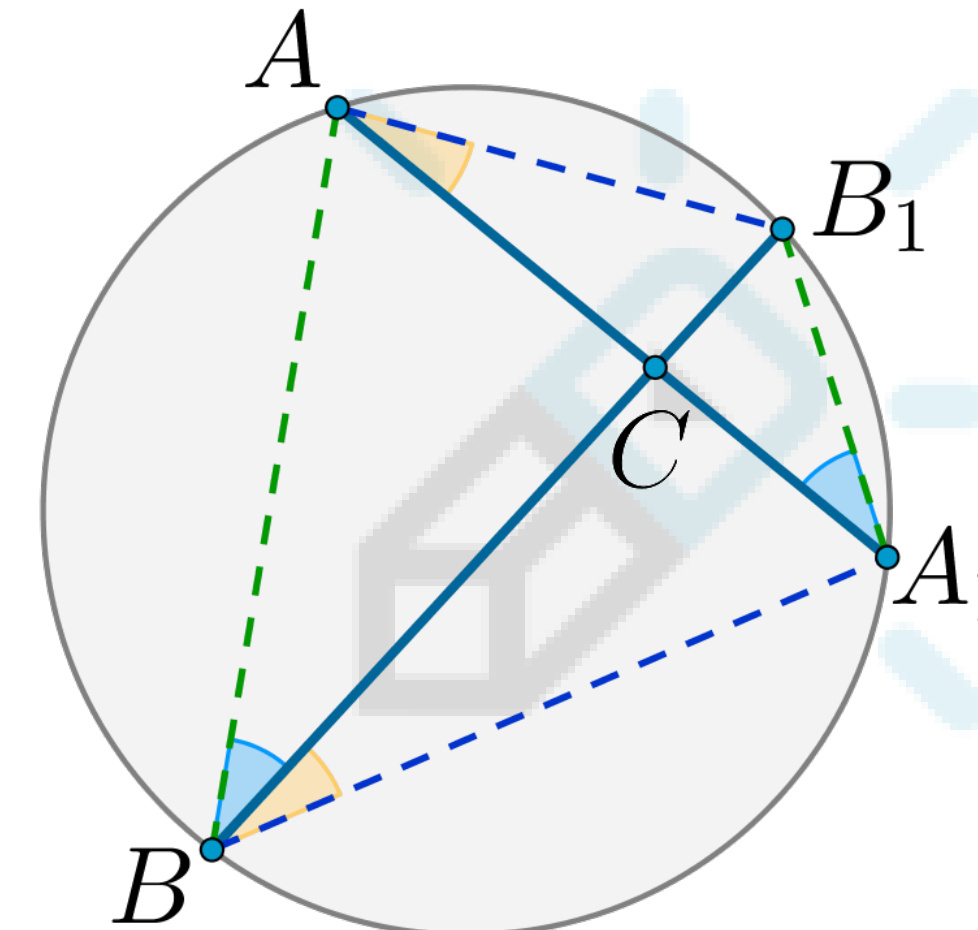


$\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$

Прямые A_1B_1 и AB не параллельны!

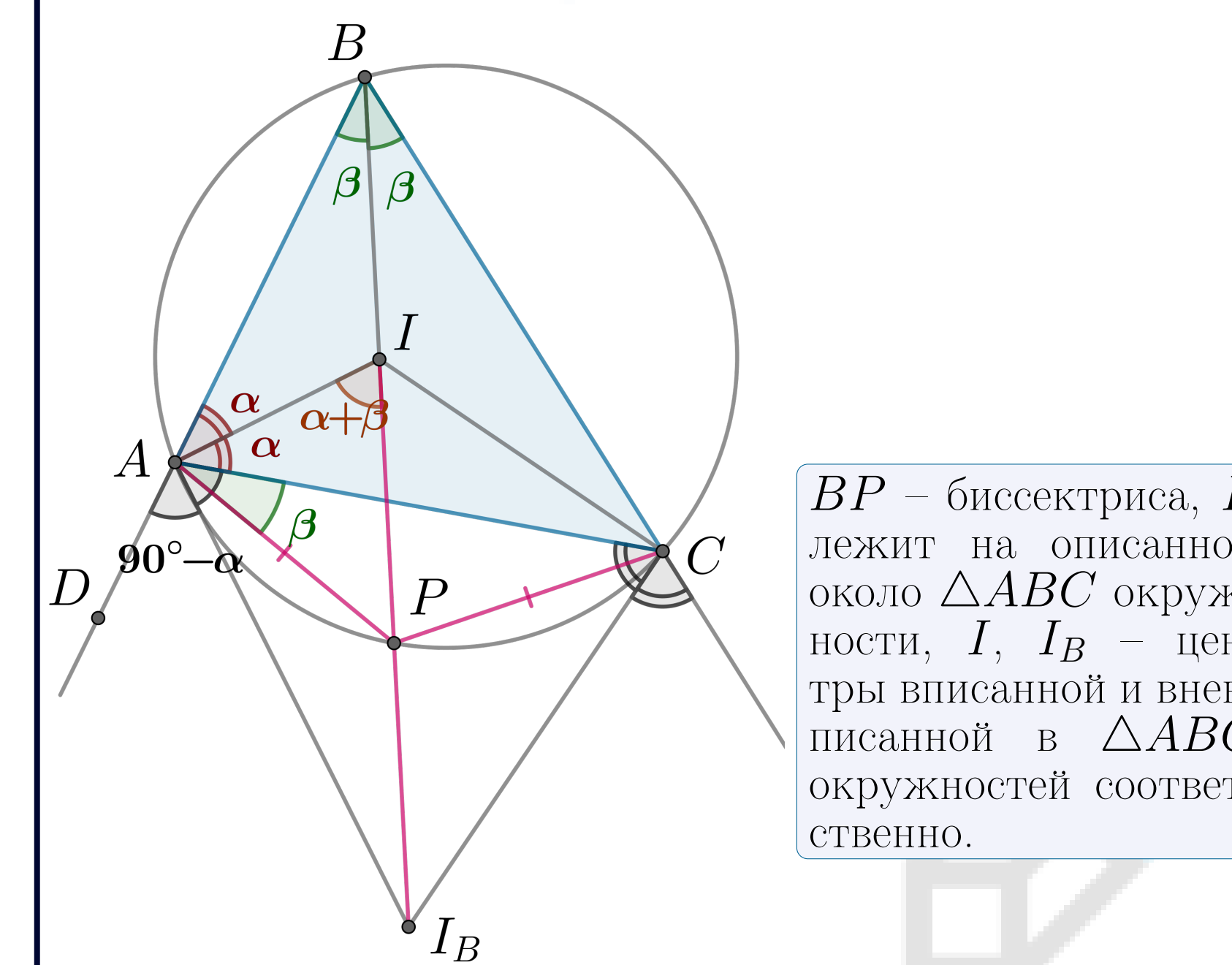


$\triangle A_1CB_1 \sim \triangle BCA$
 $AC \cdot A_1C = BC \cdot B_1C$



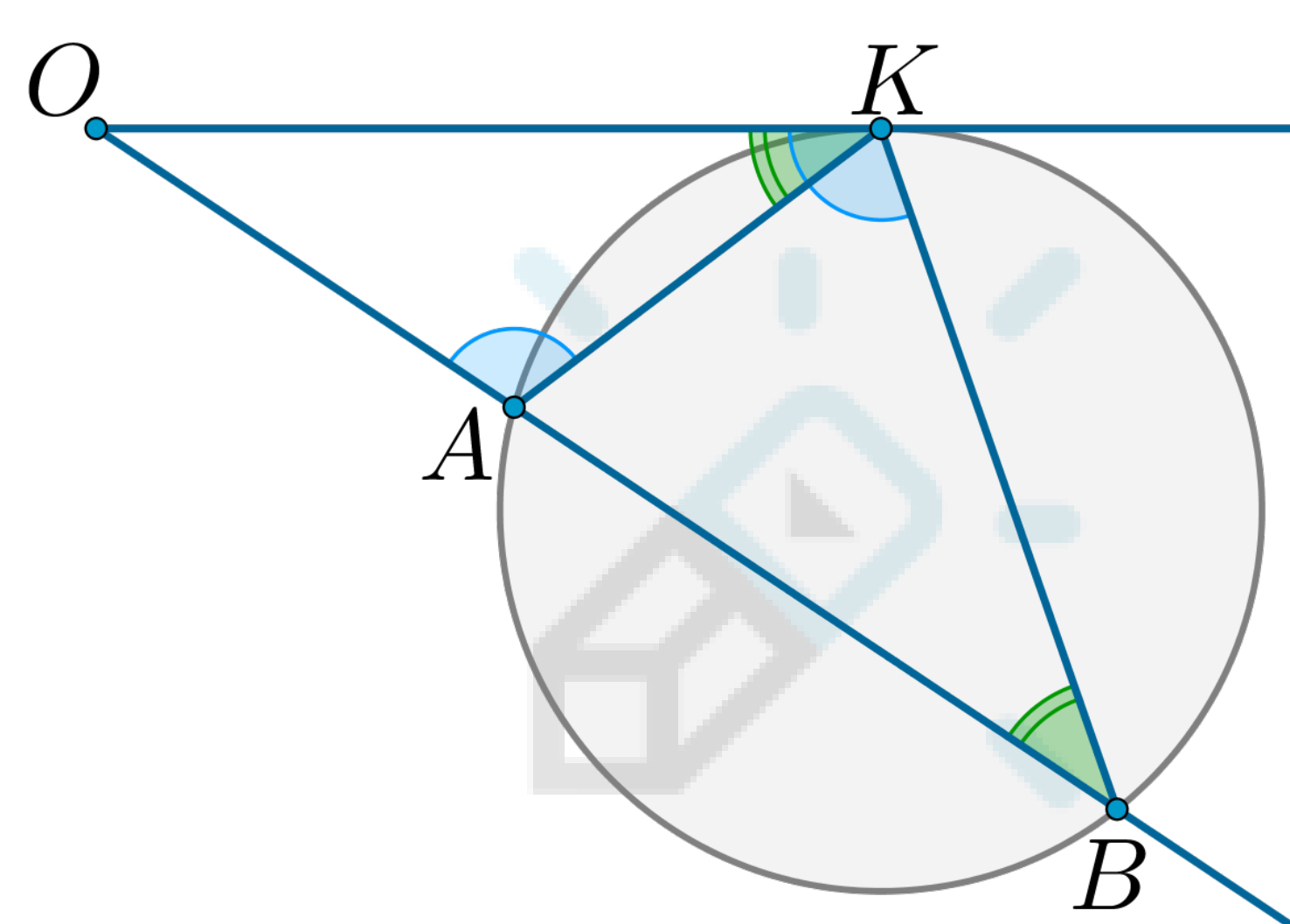
Теорема Чевы
 $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

Лемма о трезубце: P равноудалена от A, C, I, I_B .

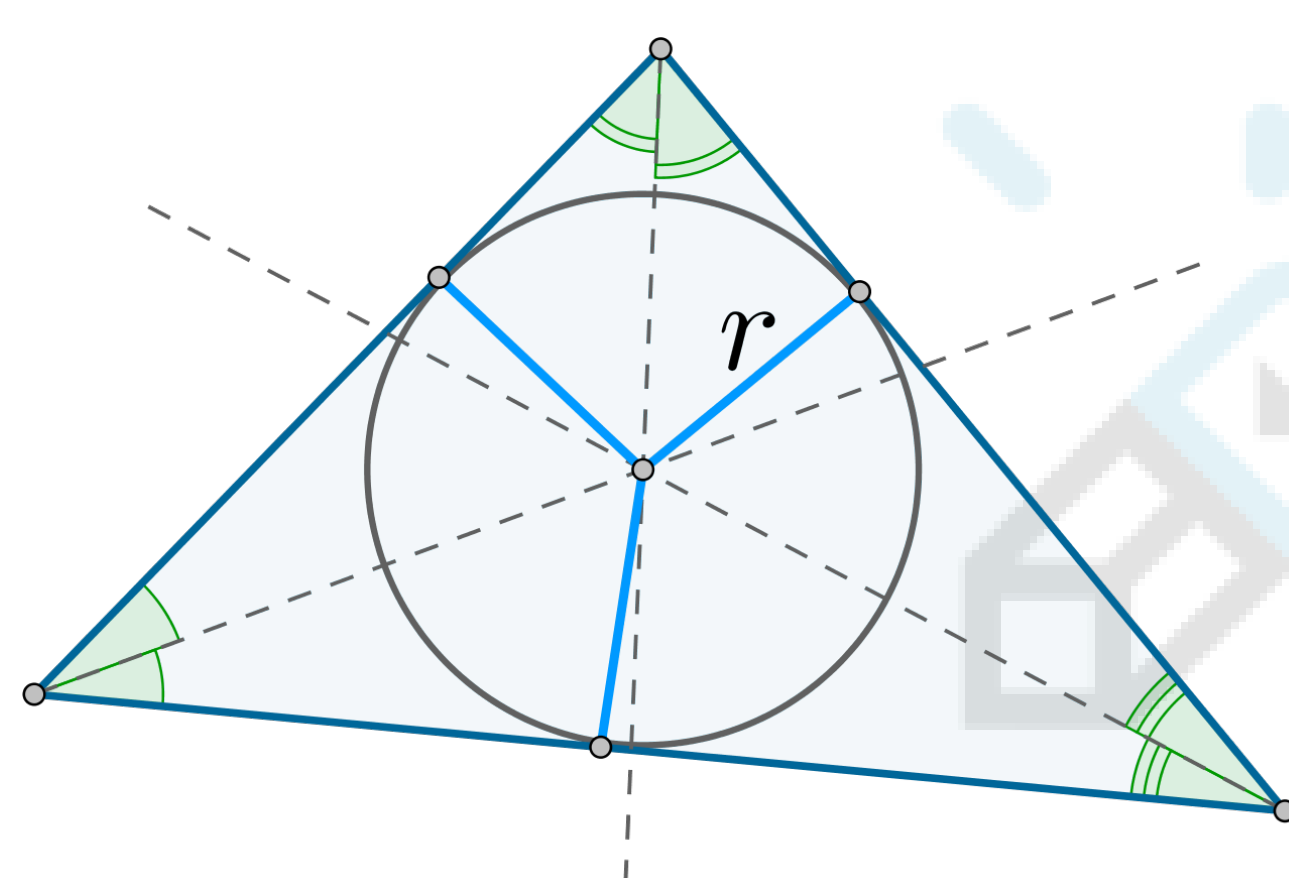


BP – биссектриса, P лежит на описанной около $\triangle ABC$ окружности, I, I_B – центры вписанной и вневписанной в $\triangle ABC$ окружностей соответственно.

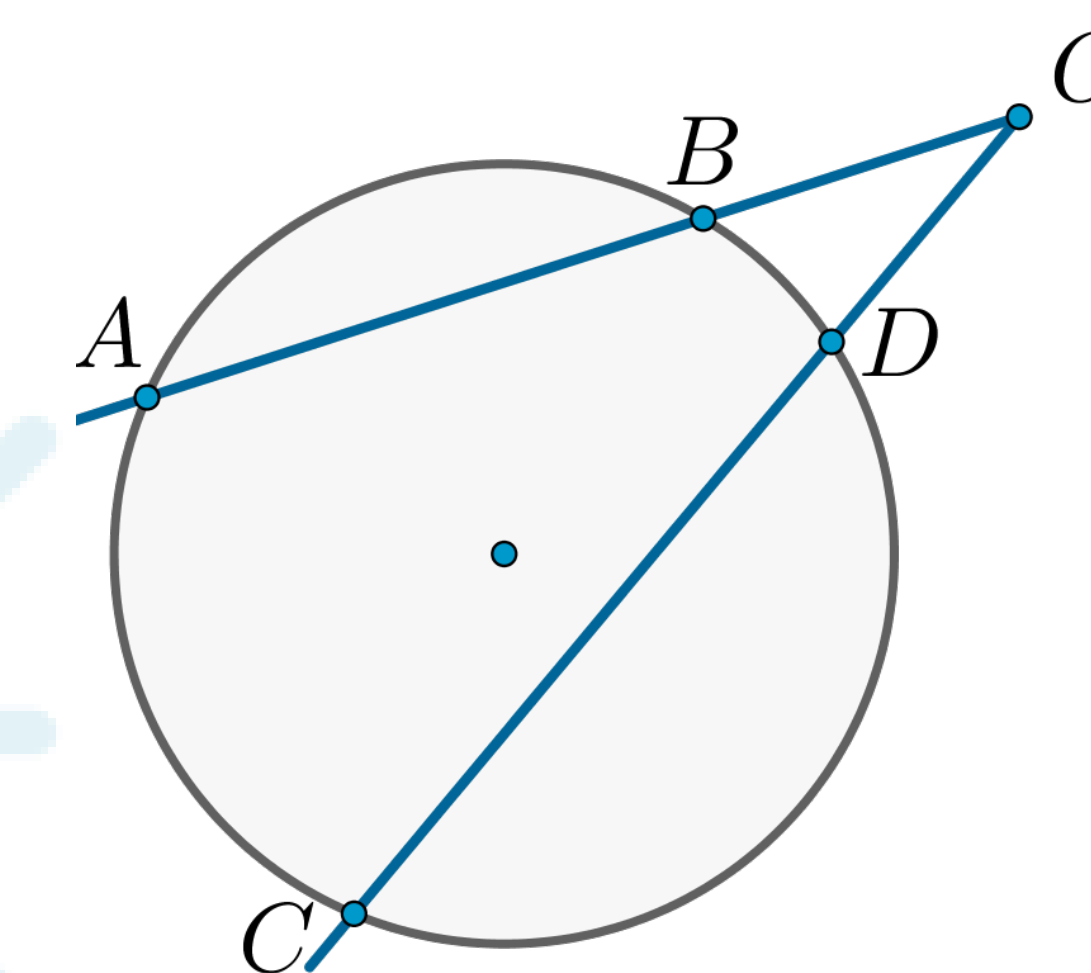
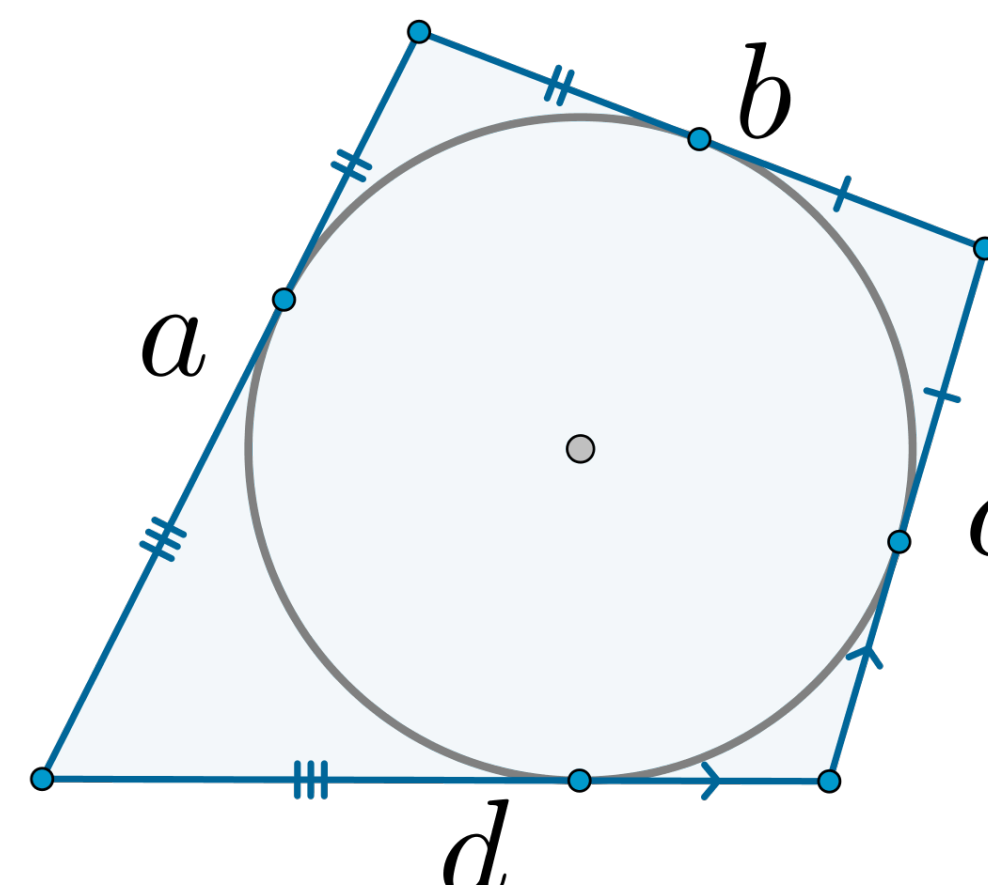
$\triangle OAK \sim \triangle OKB$



Центр вписанной в треугольник окружности есть точка пересечения биссектрис его углов.



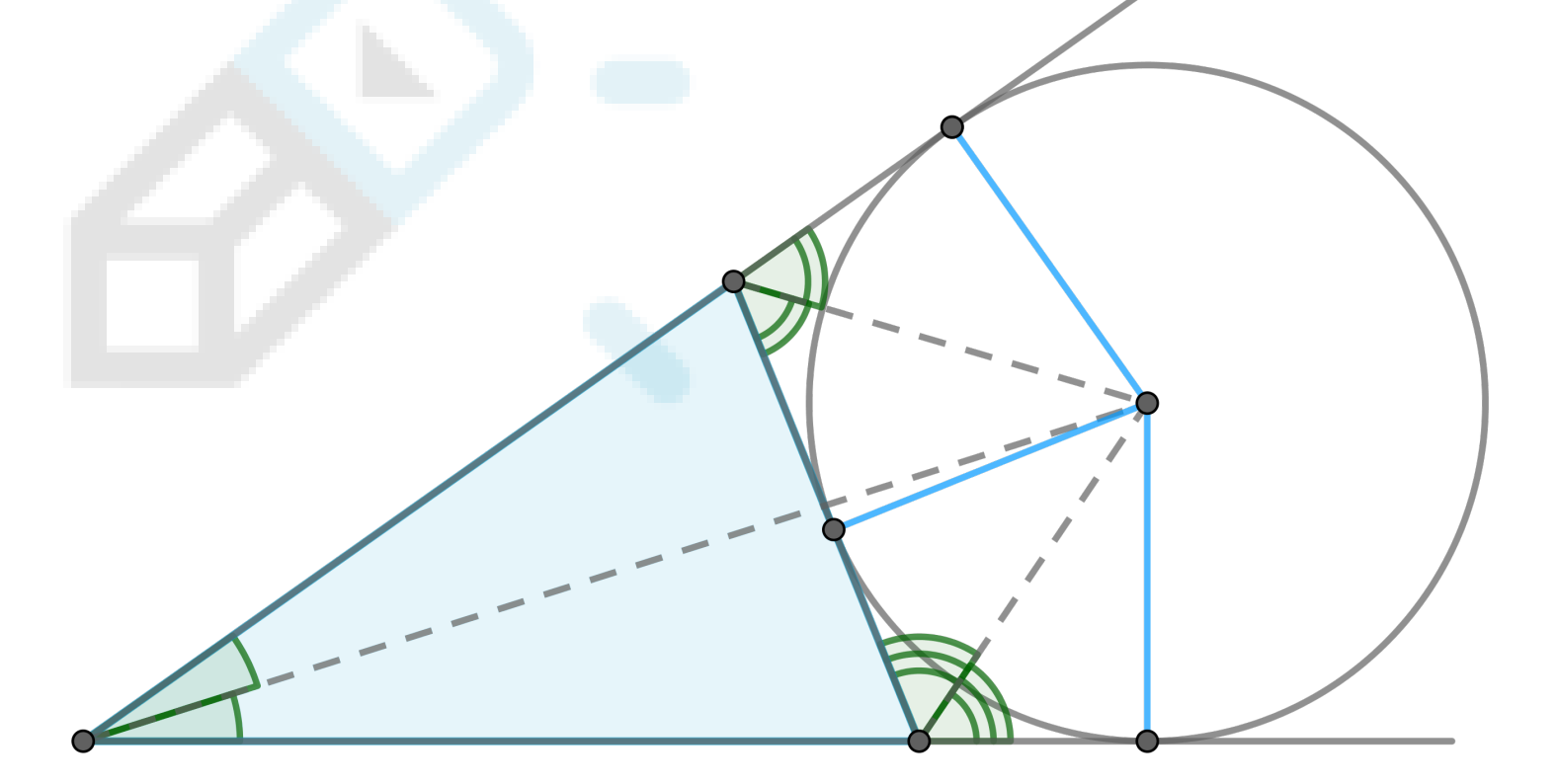
В выпуклый четырехугольник вписана окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон у него одинаковы:
 $a + c = b + d$



Произведение секущей (из фиксированной точки O) на ее внешнюю часть – величина постоянная для каждой окружности.
 $OA \cdot OB = OC \cdot OD (= \text{const})$

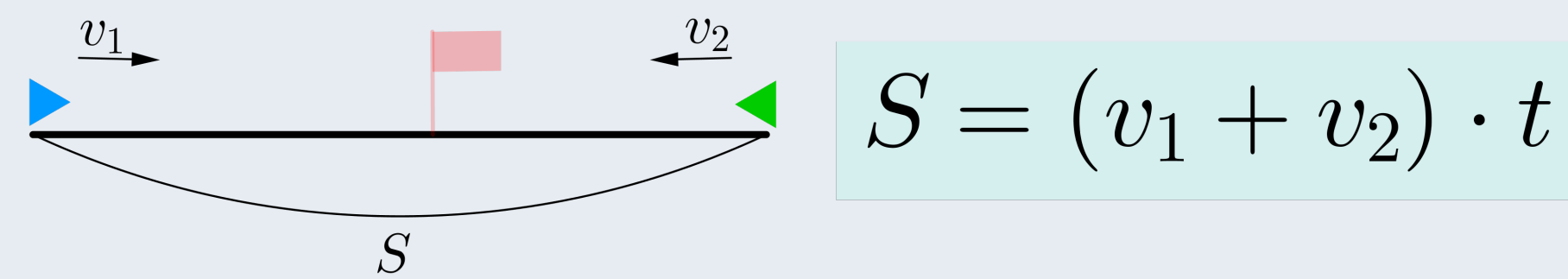
Вневписанная окружность треугольника – окружность, которая касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Центр вневписанной окружности треугольника лежит на пересечении внутренней биссектрисы угла треугольника, в который вписана окружность, и внешних биссектрис двух других углов.

Ее радиус вычисляется по формуле $r_b = \frac{S}{p-b}$, где b – сторона, которой она касается, S, p – площадь и полупериметр треугольника.

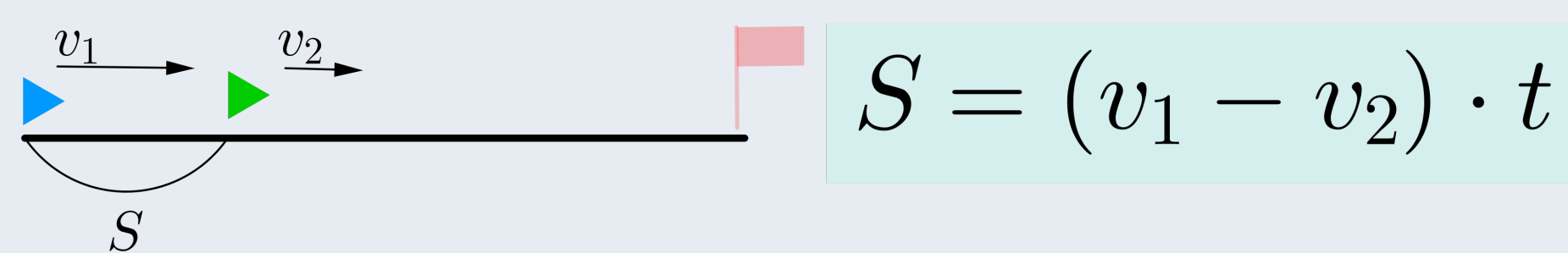


Основное в задачах на движение по прямой

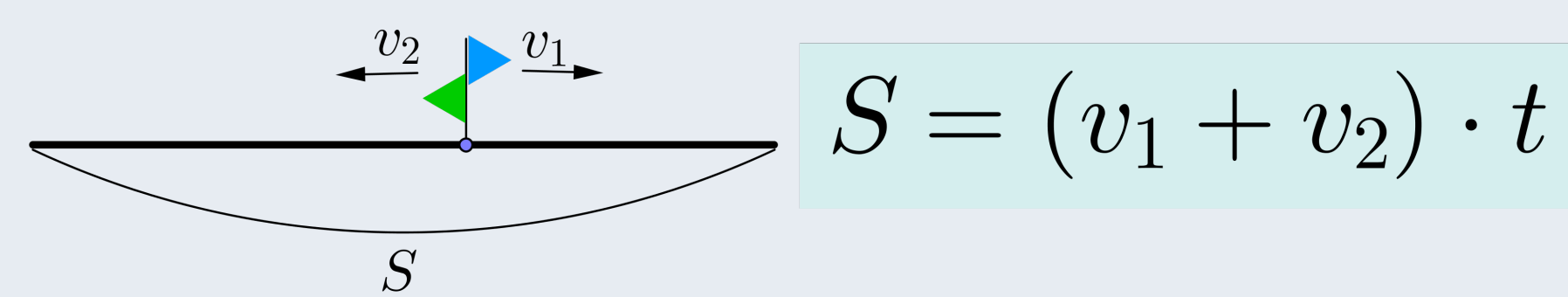
- Основная формула $S = v \cdot t$,
 S — расстояние, v — скорость, t — время.
- Средняя скорость $v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}}$ равна отношению общего пройденного расстояния к общему затраченному времени.
- Следите за тем, чтобы все было в одних единицах измерения. Например, если скорость дана в км/ч, а время в мин, то время стоит перевести в часы.
- Если два объекта выехали одновременно навстречу друг другу, то они сближаются со скоростью, равной сумме их скоростей. Тогда расстояние, на котором они находились друг от друга изначально, равно скорости их сближения, умноженной на время, через которое они встретились.



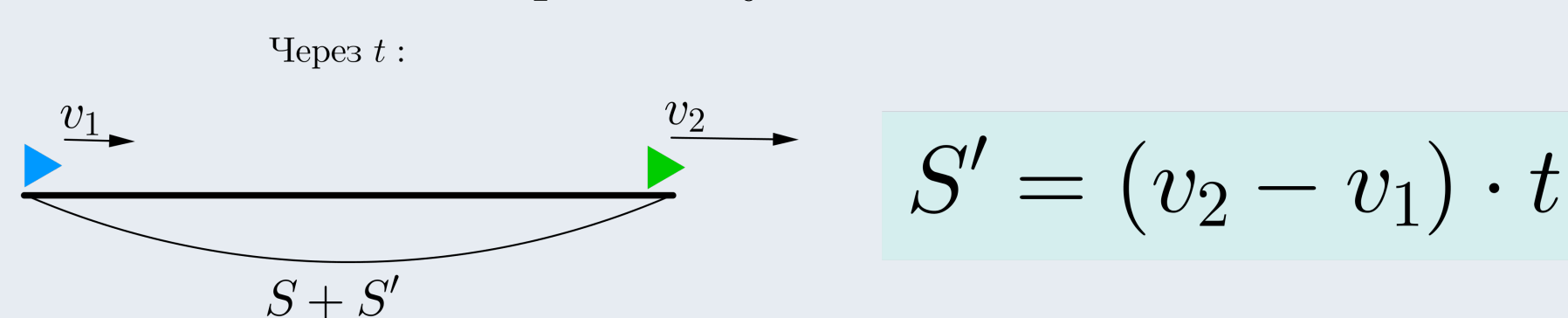
- Если один объект догоняет другой, то есть объекты движутся в одном направлении и скорость первого больше скорости второго, то скорость их сближения равна разности большей и меньшей скорости. И тогда расстояние, которое было между ними изначально, равно скорости их сближения, умноженной на время, через которое один догнал другого.



- Если два объекта выехали одновременно из одной точки в разных направлениях, то скорость их удаления равна сумме их скоростей. И для того, чтобы найти расстояние, которое будет между ними через время t , нужно это время умножить на скорость удаления.



- Если два объекта выехали в одном направлении, но скорость первого меньше скорости второго, то скорость удаления одного от другого равна разности большей и меньшей скорости. И для того, чтобы найти расстояние, на которое они удалились за время t , нужно это время умножить на скорость удаления.



Пример решения с составлением таблицы

Из городов А и В одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?

► Нужно заполнить следующую таблицу

	Расстояние	Скорость	Время
Мот.			
Вел.			

Если две ячейки из трех в строке заполнены, то третья заполняется через них при помощи формулы $S = v \cdot t$. Итак, пусть велосипедист потратил на путь из В в А t часов (это и нужно найти), а расстояние из А в В равно S . Тогда мотоциклист потратил $(t - 3)$ часов на путь из А в В.

	Расстояние	Скорость	Время
Мот.	S	$\frac{S}{t-3}$	$t-3$
Вел.	S	$\frac{S}{t}$	t

Теперь нужно понять, какое уравнение можно составить по заполненной таблице. Какую информацию мы не использовали? Про их встречу. Для начала 48 мин — это $\frac{4}{5}$ ч. Скорость их сближения равна $\frac{S}{t-3} + \frac{S}{t}$, значит, получаем уравнение $S = \frac{4}{5} \left(\frac{S}{t-3} + \frac{S}{t} \right)$. Разделим все слагаемые уравнения на $S > 0$ и получим

Получаем систему:

$$1 = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{t-3} + \frac{1}{t} \right) \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}; 4$$

Значение $t = \frac{3}{5}$ не подходит, потому что тогда мотоциклист потратил отрицательное время на движение из А в В, следовательно, ответ $t = 4$ ■

Движение по воде с течением (по реке)

- Верна та же формула: $S = v \cdot t$
- Если тело движется по реке по течению:
 v_c — собственная скорость тела (скорость в неподвижной воде),
 $v_{\text{теч}}$ — скорость течения,
то скорость движения тела $v = v_c + v_{\text{теч}}$.
Значит, $S = (v_c + v_{\text{теч}}) \cdot t$
- Если тело движется по реке против течения, то скорость движения тела $v = v_c - v_{\text{теч}}$.
Значит, $S = (v_c - v_{\text{теч}}) \cdot t$
- Плот — это тело, у которого собственная скорость $v_c = 0$. Значит, плот может плыть только по течению и причем со скоростью течения.
- Все остальное в данных задачах ничем не отличается от задач на прямолинейное движение и рассуждать, составлять таблицу и т.п. в них стоит так же, как в задачах на движение по прямой.

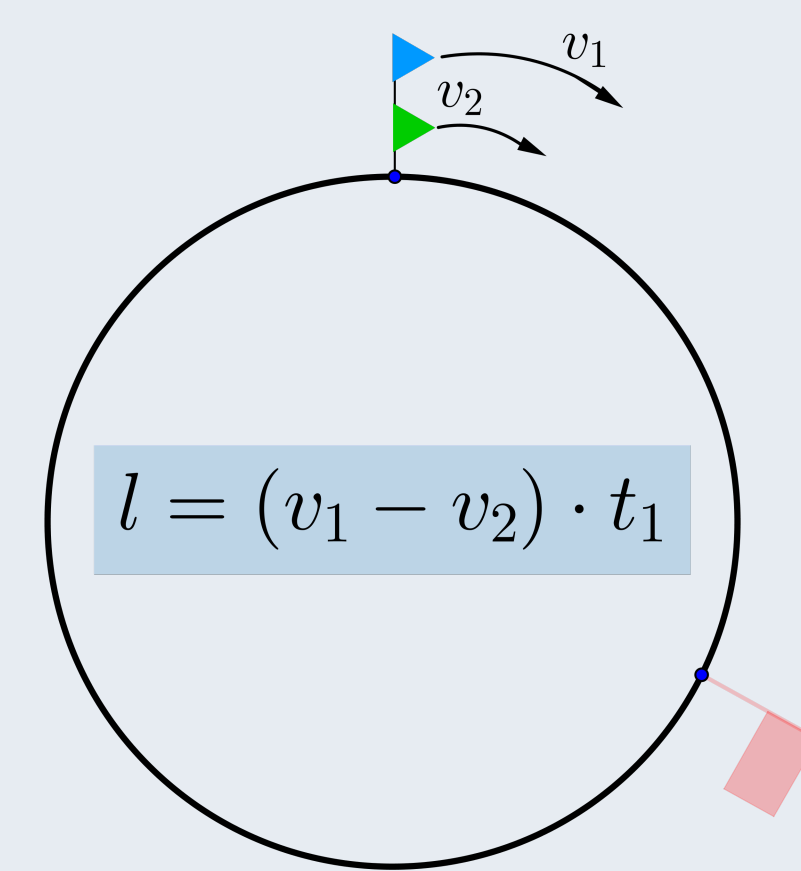
Движение по окружности

- Верна та же формула: $S = v \cdot t$.
- Длина круга равна $l = 2\pi R$, R — его радиус.
- Направление движения по окружности может быть по часовой стрелке и против часовой стрелки.
- В этих задачах самое основное — это рассмотреть момент, когда тела находятся в одной точке, встретились, одно тело догнало другое тело, поравнялись. Эти все формулировки говорят об одной и той же ситуации: тела находятся в одной точке на окружности.

- Пусть два тела со скоростями $v_1 > v_2$ начали движение из одной точки в одном направлении. Этот момент будем считать нулевым разом, когда они находятся в одной точке.

Если l — длина круга, t_1 — время, через которое они окажутся в одной точке в первый раз, то справедливо равенство (см.рис). То есть за время t_1 первое тело пройдет расстояние, на l (ед.) большее (то есть на один круг), чем второе тело. Если t_n — время, через которое они в n -ый раз окажутся в одной точке, то $t_n = n \cdot t_1$. Значит, через время t_n после начала движения первый пройдет на n кругов больше, чем второй, то есть пройденное им расстояние на $n \cdot l$ (ед.) больше.

- Пусть два тела начали движение со скоростями $v_1 > v_2$ из разных точек в одном направлении. Чтобы свести задачу к предыдущему виду, нужно найти сначала время t_0 , через которое первый догонит второго (это будет тот самый нулевой раз, когда они оказались в одной точке), после чего можно рассуждать, как в предыдущем пункте. Если на момент начала движения расстояние между ними равно длине дуги $A_1A_2 = s$, то верно равенство (см.рис).



Пример движения по окружности

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из диаметрально противоположных точек круговой трассы длиной 14 км. Через сколько минут они поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

► В этой задаче ситуация, как в пункте 6 блока выше. Изначальное расстояние между мотоциклистами равно половине длины круга, то есть 7 км. По условию задачи $v_1 - v_2 = 21$, следовательно, $7 = 21 \cdot t_0$, откуда $t_0 = \frac{1}{3}$ (часа). В минутах ответ: 20 мин. ■

Задачи на совместную работу

- Такие задачи в каком-то смысле похожи на задачи на движение, только расстояние здесь есть работа, а скорость здесь есть производительность. Верна формула $A = p \cdot t$, A — работа, p — производительность, t — время.
- Если рабочие трудятся одновременно, то их общая производительность равна сумме их производительностей.
- Работа обычно измеряется в количестве произведенного товара, производительность — в количестве товара, произведенного за ед. времени, а время — в минутах, часах и т.п.
- Работу можно принять за 1, если ей не присвоено никакого значения, да это логически и нельзя сделать. Можно, конечно, вводить неизвестную A , но тогда полученное вами уравнение можно разделить на A , то есть значение работы ни на что не влияет.
- Также, как и задачи на движение, задачи на работу удобно решать составлением таблицы.

Пример задачи на работу, взятую за 1

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

► Примем работу, которую выполняют рабочие, за 1 (по принципу 4 пункта блока выше). Пусть p_1, p_2 — производительности первого и второго рабочего соответственно. Тогда из формулы $A = p \cdot t$ следует, что $1 = (p_1 + p_2) \cdot 12$. Требуется найти $\frac{1}{p_1}$.

Далее, пусть таблица описывает ситуацию «первый рабочий за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня».

	Работа	Производительность	Время(в днях)
Рабочий 1	$2p_1$	p_1	2
Рабочий 2	$3p_2$	p_2	3

Мы заполнили второй и третий столбцы и с помощью этих данных заполнили первый столбец. Уравнение получим из информации о том, что объемы работы они выполняют одинаковые, то есть $2p_1 = 3p_2$.

В итоге нам известно

$$\begin{cases} 1 = (p_1 + p_2) \cdot 12 \\ 2p_1 = 3p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{5}{3}p_1 \cdot 12 \\ p_2 = \frac{2}{3}p_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p_1} = 20.$$

Первый рабочий самостоятельно выполнит всю работу за 20 дней. ■

Поиск средней скорости

Первую треть пути тело двигалось со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость на всем пути.

► Если обозначить весь путь за $3S$ км, то на 1-ую, 2-ую и 3-ю трети пути затрачено $\frac{S}{60}$ ч, $\frac{S}{120}$ ч, $\frac{S}{110}$ ч времени соответственно. Значит, средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{3S}{\frac{S}{60} + \frac{S}{120} + \frac{S}{110}} = 88 \text{ (км/ч)}$$

Задачи на смеси, сплавы, растворы

1 Задачи этого типа о следующем (говорим на примере раствора):

- есть раствор некоторого вещества, то есть жидкость, представляющая смесь двух веществ: некоторого активного вещества, к примеру, кислоты, и другого (пусть это всегда будет вода). Активное вещество в растворе находится в некоторой концентрации — это процент содержания этого вещества в растворе, ищется по формуле

$$\text{концентрация в-ва} = \frac{\text{масса вещества}}{\text{масса раствора}} \cdot 100\%$$

- таких растворов, активное вещество которых одинаково, но разной концентрации, несколько, и их смешивают с целью получить новый раствор с новой концентрацией.
- из величин, фигурирующих в задаче: массы (объемы) растворов и активного вещества в них, концентрации активных веществ. С помощью этих величин требуется составить одно/два уравнения и найти нужную величину.
- уравнение почти всегда имеет вид (например, смешали два раствора и получили третий):

$$\text{“масса акт.в-ва раствора 1} + \text{масса акт.в-ва раствора 2} = \text{масса акт.в-ва смеси”}.$$

2 Из формулы для нахождения концентрации следует формула, по которой удобно быстро находить массу активного вещества в растворе:

$$\text{масса в-ва} = \frac{\text{концентрация в-ва}}{100} \cdot \text{масса раствора}$$

- 3 При смешивании растворов их массы суммируются, суммируются массы активных веществ (об этом и говорит получаемое нами уравнение), но вот концентрации активных веществ — нет!
- 4 Если в задаче фигурирует вода, то это значит, что концентрация активного вещества в ней равна 0%.

Пример задачи на растворы

Смешали некоторое количество 16%-го раствора некоторого вещества с удвоенным количеством 19%-го раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

► Будем рассматривать массы всех веществ в кг. Пусть массы первого и второго раствора равны соответственно x и $y = 2x$. Тогда:

$$\text{масса акт. в-ва 1-го раствора равна } \frac{16}{100} \cdot x = 0,16x;$$

$$\text{масса акт. в-ва 2-го раствора равна } \frac{19}{100} \cdot y = 0,19y.$$

После смешения двух растворов получили раствор массой $(x + y)$. Пусть $k\%$ — концентрация активного вещества в нем. Тогда масса активного вещества в нем равна $\frac{k}{100} \cdot (x + y)$.

Так как сумма масс активного вещества в 1-ом и 2-ом растворах равна массе активного вещества в полученной смеси, то верно равенство

$$0,16x + 0,19 \cdot 2x = \frac{k}{100} \cdot (x + 2x) \Leftrightarrow$$

$$16x + 38x = 3kx \mid : x > 0 \Leftrightarrow$$

$$k = 18$$

Ответ: 18.

Нестандартная задача на смеси

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

► Пусть виноград состоит из воды и мякоти. Тогда виноград можно рассматривать как смесь, состоящую из воды и активного вещества (мякоти) в определенной концентрации.

Отличие этой задачи от основной массы задач на смеси в том, что здесь не смешивают несколько растворов, а высушивают, то есть проводят процесс, уменьшающий массу воды в винограде. Но масса мякоти не меняется, следовательно, равна массе мякоти иссушенного винограда, то есть изюма.

Концентрация мякоти в винограде равна 10%, в изюме равна 95%. Тогда масса мякоти в изюме составляет $0,95 \cdot 20$ кг и в то же время $0,1x$ кг, если x кг — масса винограда. Отсюда находим

$$0,95 \cdot 20 = 0,1x \Leftrightarrow x = \frac{0,95 \cdot 20}{0,1} = 190$$

Ответ: 190 кг.

Задачи на проценты

1 Чтобы найти, сколько процентов составляет число A от числа B , нужно найти

$$\frac{A}{B} \cdot 100\%$$

2 Чтобы найти, на сколько процентов число A больше (меньше) числа B , нужно найти, сколько процентов составляет число A от числа B , а затем из этого количества процентов отнять 100% (из 100% отнять найденное количество процентов).

Другой способ: найти разницу между A и B , а затем вычислить, сколько процентов от B она составляет:

$$\frac{|A - B|}{B} \cdot 100\%$$

3 Чтобы найти $k\%$ от числа A , нужно перевести процент в десятичную дробь $\frac{k}{100}$ и умножить на нее A .

$$\frac{k}{100} \cdot A = (0,01 \cdot k) \cdot A$$

4 Можно условно считать, что величина, от которой взят процент, это единица измерения этого процента. Поэтому суммировать проценты можно только в том случае, если они взяты от одной и той же величины!

Пример задачи на проценты

В 2015 году население составляло 115% по сравнению с предыдущим годом, а в 2016 уже 110% по сравнению с предыдущим. На сколько процентов увеличилось население в 2016 году по сравнению с 2014 годом?

► Пусть x — количество людей в 2014 году.

Тогда в 2015: $1,15x$ человек.

В 2016: $1,1 \cdot (1,15x) = 1,265x$ человек.

Из пункта 3 блока выше следует, что $0,01 \cdot k = 1,265$, откуда $k = 126,5$, то есть 126,5% население в 2016 составило по сравнению с 2014 годом.

Следовательно, увеличилось на 26,5%.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Арифметическая прогрессия — это последовательность чисел $\{a_n\}$, члены которой связаны следующим соотношением: $a_n = a_{n-1} + d$, где число d называется разностью арифметической прогрессии.

- $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$
- $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$
- $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
- $S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$

Геометрическая прогрессия — это последовательность чисел $\{b_n\}$, члены которой связаны соотношением $b_n = b_{n-1} \cdot q$, где число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
- $\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = b_n \quad (b_i \geq 0)$
- $\sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} = b_n \quad (b_i \geq 0)$
- $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$
- $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Пример задачи на прогрессию

Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

► Если a_i — количество метров, которое улитка проползает в i -ый день, то из условия $a_1 + a_n = 10$, где n — номер последнего дня. Предложение “Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день” говорит нам о том, что числа, равные тому, сколько улитка проползла в 1-ый, 2-ой и т.д. дни, составляют арифметическую прогрессию. По формуле суммы первых n членов:

$$150 = S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 5n \Leftrightarrow n = 30.$$

Ответ: 30 дней.