Теория по №6,7,8 из ОГЭ от «Школково»

1 Действия дробями

1.1 Основные свойства дроби

Дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель одновременно умножить или разделить на одно и то же число.

$$\frac{5}{9}=\frac{10}{18}=\frac{15}{27}=\frac{20}{36}=\ldots \qquad \text{или} \qquad \frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$$

$$\frac{110}{99}=\frac{10\cdot \cancel{11}}{9\cdot \cancel{11}}=\frac{10}{9} \text{ — несократимая дробь}$$

1.2 Сложение и вычитание обыкновенных дробей

Складывать и вычитать можно только дроби с одинаковыми знаменателями!

$$\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3+1}{7}=\frac{4}{7}; \qquad \frac{2}{5}-\frac{9}{5}=\frac{2-9}{5}=-\frac{7}{5}.$$

Дроби, знаменатели которых не равны, нужно сначала привести к общему знаменателю. Для этого нужно:
1) Найти наименьшее число, которое делится на каждый из знаменателей дробей.
2) Домножить числитель и знаменатель каждой из дробей на дополнительный множитель.

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{8}=\frac{5}{6}^{\backslash\cdot 4}+\frac{1}{8}^{\backslash\cdot 3}=\frac{20}{24}+\frac{3}{24}=\frac{20+3}{24}=\frac{23}{24};$$

$$\frac{35}{18}-\frac{7}{6}^{\backslash\cdot 3}=\frac{35}{18}-\frac{21}{18}=\frac{35-21}{18}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9};$$

$$\frac{13}{22}-\frac{12}{55}=\frac{13}{2\cdot 11}^{\backslash\cdot 5}-\frac{12}{5\cdot 11}^{\backslash\cdot 2}=\frac{13\cdot 5-12\cdot 2}{2\cdot 11\cdot 5}=\frac{65-24}{110}=\frac{41}{110};$$

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{8}+\frac{5}{12}=\frac{5}{7}^{\backslash\cdot 24}-\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}^{\backslash\cdot 21}+\frac{5}{2\cdot 2\cdot 3}^{\backslash\cdot 14}=\frac{5\cdot 24-1\cdot 21+5\cdot 14}{7\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{169}{168}.$$

1.3 Умножение и деление обыкновенных дробей

Чтобы перемножить две обыкновенные дроби, нужно перемножить числители и знаменатели этих дробей.

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{4\cdot 1}{3\cdot 9}=\frac{4}{27};$$

$$\frac{32}{17}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{1}{5}=\frac{32\cdot 17\cdot 1}{17\cdot 16\cdot 5}=\frac{2}{5}.$$

Если дроби записаны в виде смешанных чисел, то каждую из них нужно перевести в неправильную дробь и уже потом перемножить.

$$4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{9}=\frac{4\cdot 2+1}{2}\cdot\frac{9\cdot 1+1}{9}=\frac{9}{2}\cdot\frac{10}{9}=\frac{9\cdot 10}{2\cdot 9}=\frac{5}{1}=5.$$

Деление — действие, обратное умножению. Поэтому можно не делить на дробь, а умножать на «перевернутую».

$$\frac{7}{8}:\frac{1}{6}=\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{1}=\frac{7\cdot 6}{8\cdot 1}=\frac{21}{4}; \qquad 7:\frac{7}{8}=7\cdot\frac{8}{7}=\frac{7}{1}\cdot\frac{8}{7}=\frac{7\cdot 8}{1\cdot 7}=\frac{8}{1}=8.$$

1.4 Сложение и вычитание десятичных дробей

Складывать и вычитать десятичные дроби можно столбиком. При этом надо помнить, что запятая должна находиться под запятой.

$$3{,}02 + 5{,}6 = 8{,}62 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} +\begin{array}{r} 3{,}02 \\ 5{,}60 \end{array} \\ \hline 8{,}62 \end{array}$$

1.5 Умножение десятичных дробей

При умножении можно сначала перемножать числа так, как будто запятых нет, а потом сдвигать запятую влево.

Пусть нам нужно перемножить 0,17 и 0,3. Сначала умножим 17 на 3 и получим 51. Заметим, что в числах 0,17 и 0,3 суммарно 3 цифры после запятых, значит, в числе 51 запятую нужно передвинуть на 3 знака влево, то есть

$$17 \cdot 3 = 51{,}0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}17 \cdot 0{,}3 = 0{,}051.$$

1.6 Деление десятичных дробей

Делить десятичные дроби удобнее через запись с дробной чертой. В такой записи мы можем совсем избавиться от запятых с помощью основного свойства дроби и делить целые числа.

$$6{,}5 : 130 = \frac{6{,}5}{130}^{\backslash \cdot 10} = \frac{65}{1300} = \frac{13 \cdot 5}{13 \cdot 100} = \frac{5}{100} = 0{,}05;$$

$$2{,}8 : 0{,}07 = \frac{2{,}8}{0,07}^{\backslash \cdot 100} = \frac{280}{7} = \frac{7 \cdot 40}{7} = 40.$$

2 Формулы сокращенного умножения

2.1 Квадрат суммы и квадрат разности

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Примеры применения:

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2;$$
$$54^2 - 108\cdot 4 + 16 = 54^2 - 2\cdot 54\cdot 4 + 4^2 = (54-4)^2 = 50^2 = 2500.$$

2.2 Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Примеры применения:

$$64^2 - 36^2 = (64-36)\cdot(64+36) = 28\cdot 100 = 2800;$$
$$\frac{(5x+2y)^2-(3x-y)^2}{8x+y} = \frac{(5x+2y-3x+y)\cdot(5x+2y+3x-y)}{8x+y} = \frac{(2x+3y)\cdot(8x+y)}{8x+y} = 2x+3y.$$

2.3 Куб суммы и куб разности

ШКОЛКОВО

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{или} \quad (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{или} \quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Заметим, что применение данных формул справа налево часто помогает упростить вычисления:

$$13^3 + 3\cdot 13^2\cdot 7 + 3\cdot 13\cdot 49 + 7^3 = (13+7)^3 = 20^3 = 8000;$$
$$35^3 - 15\cdot 35^2 + 105\cdot 25 - 5^3 = 35^3 - 3\cdot 35^2\cdot 5 + 3\cdot 35\cdot 5^2 - 5^3 = (35-5)^3 = 30^3 = 27000.$$

2.4 Сумма кубов и разность кубов

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Обращаем ваше внимание на то, что не существует формулы суммы квадратов $a^2 + b^2$!

Заметим, что применение данных формул слева направо часто помогает упростить вычисления:

$$\frac{7^6 - 2^6}{7^4 + 14^2 + 16} = \frac{(7^2-2^2)(7^4 + 7^2\cdot 2^2 + 2^4)}{7^4 + (7\cdot 2)^2 + 2^4} = 7^2 - 2^2 = 45;$$
$$\frac{12^3 - 4^3}{8} = \frac{(12-4)\cdot(12^2 + 12\cdot 4 + 4^2)}{8} = 12^2 + 12\cdot 4 + 4^2 = 144 + 48 + 16 = 208.$$

2.5 Квадрат суммы нескольких слагаемых

Бывает так, что в задании нужно возвести в квадрат, например, сумму не двух, а трех, четырех и т.д. слагаемых. Тогда удобно будет воспользоваться таким фактом. Квадрат суммы нескольких слагаемых равен сумме квадратов этих слагаемых и удвоенных попарных произведений:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

и так далее

То есть нужно возвести все слагаемые, находящиеся в скобках, в квадрат, найти все их попарные произведения, умноженные на 2, и все это сложить.

Например,

$$(x+y-z)^2 = (x+y+(-z))^2 = x^2+y^2+(-z)^2+2xy+2x(-z)+2y(-z) =$$

$$= x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yx.$$

Всего в школьной программе используется 7 формул сокращенного умножения: 3 формулы «с квадратами» и 4 формулы «с кубами».

ШКОЛКОВО

3 Степени

3.1 Определение степени

Выражение a^n называется степенью, число a — основанием степени, n — показателем степени. На самом деле запись a^n означает, что мы умножаем число a само на себя n раз, то есть

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Например,

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

3.2 Таблица наиболее часто встречающихся степеней

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$			
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$			
$2^7 = 128$				
$2^8 = 256$				
$2^9 = 512$				
$2^{10} = 1024$				

3.3 Свойства степеней

• При перемножении степеней с одинаковым основанием, показатели складываются, то есть

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Например,

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Так происходит, потому что $2^2 = 2 \cdot 2$, а $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Таким образом,

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 = 32.$$

• При делении степеней с одинаковым основанием, показатели вычитаются, то есть

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

Например,

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9.$$

Опять же, так происходит, потому что

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 = 9.$$

А что будет, если мы будем делить 3^4 на 3^6? По свойству мы получим

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2}.$$

Но мы пока не знаем что делать, если показатель степени отрицателен. Распишем по определению:

$$\frac{3^4}{3^6} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{3\cdot 3\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = \frac{1}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, мы получили следующее свойство.

• $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$. Например,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Значит,

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

• При возведении степени в степень показатели перемножаются, то есть

$$(a^x)^y = a^{x\cdot y}.$$

Например,

$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64;$$

$$\left(2^3\right)^5 = 2^{3\cdot 5} = 2^{15}.$$

• $a^1 = a$, $a^0 = 1$. Об этом свойстве просто договорились, чтобы не было противоречий в предыдущих. Например,

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a\cdot a}{a\cdot a} = 1, \quad \text{но и} \quad 1 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0.$$

• Степень произведения равна произведению степеней, то есть

$$(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x.$$

Например,

$$6^3 = (2\cdot 3)^3 = 2^3\cdot 3^3 = 8\cdot 27 = 216.$$

• Степень частного равна частному степеней, то есть

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Например,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

3.4 Примеры применения свойств степеней

1. Найдите значение выражения $\dfrac{49^3}{7^3}$.

Решение

Преобразуем выражение:

$$\frac{49^3}{7^3} = \frac{\left(7^2\right)^3}{7^3} = \frac{7^{2\cdot 3}}{7^3} = \frac{7^6}{7^3} = 7^{6-3} = 7^3 = 343.$$

2. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{-6}\cdot 2^{6}}{2^{-8}}$.

Решение

Преобразуем выражение:

$$\frac{2^{-6}\cdot 2^{6}}{2^{-8}} = \frac{2^{-6+6}}{2^{-8}} = \frac{2^{0}}{2^{-8}} = \frac{1}{2^{-8}} = 2^{8} = 256.$$

3. Найдите значение выражения $\dfrac{5^{9}\cdot 9^{6}}{45^{6}}$.

Решение

Преобразуем выражение:

$$\frac{5^{9}\cdot 9^{6}}{45^{6}} = \frac{5^{9}\cdot 9^{6}}{(5\cdot 9)^{6}} = \frac{5^{9}\cdot 9^{6}}{5^{6}\cdot 9^{6}} = 5^{9-6} = 5^{3} = 125.$$

ШКОЛКОВО

4 Квадратные корни

4.1 Определение квадратного корня

Возьмем некоторое неотрицательное число $a \geqslant 0$. Тогда квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число b, при возведении которого в квадрат мы получим число a :

$$\sqrt{a} = b \quad \text{то же самое, что} \quad a = b^2.$$

Из определения следует, что $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. **Эти ограничения являются важным условием существования квадратного корня, и их следует запомнить!**

Чему равен $\sqrt{25}$? Мы знаем, что $5^2 = 25$ и $(-5)^2 = 25$. Так как по определению мы должны найти неотрицательное число, то -5 нам не подходит, следовательно, $\sqrt{25} = 5$.

Исходя из определения, выражения $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-4}$ и аналогичные, где подкоренное число меньше 0, не имеют смысла.

Таким образом, имеют место следующие формулы:

- $\sqrt{a^2} = |a|$. Например,
$$\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2} = \left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}.$$
- $(\sqrt{a})^2 = a$, при условии, что $a \geqslant 0$. Например, $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. НО выражение $\left(\sqrt{-10}\right)^2$ не имеет смысла!

4.2 Таблица квадратов

Для быстрых вычислений полезно будет выучить таблицу квадратов натуральных чисел от 1 до 20:

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$

4.3 Действия с квадратными корнями

- Сумма или разность квадратных корней НЕ РАВНА квадратному корню из суммы или разности, то есть

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}.$$

Таким образом, если нужно вычислить, например, $\sqrt{25} + \sqrt{49}$, то первоначально вы должны найти значения $\sqrt{25}$ и $\sqrt{49}$, а затем их сложить. Следовательно,

$$\sqrt{25} + \sqrt{49} = 5 + 7 = 12.$$

Если значения $\sqrt{a}$ или $\sqrt{b}$ при сложении $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ найти не удается, то такое выражение дальше не преобразуется и остается таким, как есть. Например, в сумме $\sqrt{2} + \sqrt{49}$ мы можем найти $\sqrt{49}$ — это 7, а вот $\sqrt{2}$ никак преобразовать нельзя, поэтому $\sqrt{2} + \sqrt{49} = \sqrt{2} + 7$. Дальше это выражение, к сожалению, упростить никак нельзя.

• Произведение или частное квадратных корней равно квадратному корню из произведения или частного, то есть

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad \text{и}\quad \sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}.$$

Также с помощью этого свойства можно выносить множитель из под знака корня:

$$\sqrt{c^2d}=\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{d}=c\sqrt{d}.$$

Здесь мы считаем, что a, b, c, $d\geqslant 0$.

Примеры:

$$\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{32\cdot 2}=\sqrt{64}=8;$$
$$\sqrt{768}:\sqrt{3}=\sqrt{768:3}=\sqrt{256}=16;$$
$$\sqrt{(-25)\cdot(-64)}=\sqrt{25\cdot 64}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{64}=5\cdot 8=40;$$
$$\sqrt{4410}=\sqrt{9\cdot 49\cdot 10}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{10}=21\sqrt{10}.$$

Покажем, как вносить числа под знак квадратного корня на примере выражения $5\sqrt{2}$. Так как $5=\sqrt{25}$, то

$$5\sqrt{2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{50}.$$

Заметим также, что, например,

$$\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2};$$
$$5\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\sqrt{3};$$
$$\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}.$$

4.4 Сравнение квадратных корней

Для квадратных корней верно: если $\sqrt{a}<\sqrt{b}$, то $a<b$; если $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, то $a=b$.

Примеры:

1. Сравните $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$.

   Решение

   Для начала преобразуем второе выражение:

   $$\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{72}.$$

   Таким образом, так как $50<72$, то и $\sqrt{50}<\sqrt{72}$. Следовательно, $\sqrt{50}<6\sqrt{2}$.

2. Между какими целыми числами находится $\sqrt{50}$?

   Решение

   Так как $\sqrt{49}=7$, $\sqrt{64}=8$, а $49<50<64$, то $7<\sqrt{50}<8$, то есть число $\sqrt{50}$ находится между числами 7 и 8.

3. Сравните $\sqrt{2}-1$ и 0,5.

   Решение

   Сравним $\sqrt{2}-1$ и 0,5:

   $$\sqrt{2}-1\vee 0{,}5\ \Big|+1\quad \text{(прибавим единицу к обеим частям);}$$
   $$\sqrt{2}\vee 1{,}5\ \Big|^{\,2}\quad \text{(возведем обе части в квадрат);}$$
   $$2\vee 2{,}25.$$

Мы знаем, что $2 < 2{,}25$, следовательно $\sqrt{2} - 1 < 0{,}5$.

Возводить обе части уравнения/неравенства в квадрат можно ТОЛЬКО ТОГДА, когда обе части неотрицательные. Например, в неравенстве из предыдущего примера возводить обе части в квадрат можно, а в неравенстве $-3 < \sqrt{2}$ нельзя (убедитесь в этом сами)!

• Следует запомнить, что

$$\sqrt{2} \approx 1,4; \quad \sqrt{3} \approx 1,7.$$

Знание приблизительного значения данных чисел поможет вам при сравнении чисел!

4.5 Как избавиться от иррациональности в знаменателе

Иногда появляются выражения вида $\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}$. В таких случаях лучше преобразовать дробь, чтобы в знаменателе получилось целое число. Для этого необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на сопряженное, то есть на выражение $\sqrt{a} - b$, чтобы в знаменателе получить разность квадратов:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+b} = \frac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)} = \frac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a})^2 - b^2} = \frac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}.$$

Случается так, что появляется выражение вида $\dfrac{x}{\sqrt{y}}$. В таком случае сопряженное будет равно $\sqrt{y}$. Тогда после домножения на него мы получим

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x \cdot \sqrt{y}}{(\sqrt{y})^2}.$$

Этот процесс называется **избавлением от иррациональности в знаменателе** или **домножением на сопряженное**.

Рассмотрим несколько примеров:

1. Нужно избавиться от иррациональности в знаменателе числа $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$.

   Решение

   Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

2. Нужно избавиться от иррациональности в знаменателе числа $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$.

   Решение

   Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное:

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 3\sqrt{2}+3.$$