Свойства и преобразования логарифмов и степеней

Понятие логарифма тесно связано с понятием степени, поэтому всюду ниже мы будем активно пользоваться следующими базовыми **свойствами степеней**:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$

Так что же такое логарифм?

Определение Логарифм по основанию a от b — это число t, которое показывает, в какую степень нужно возвести a, чтобы получить b. Таким образом, выполняется основное логарифмическое тождество:

$$\forall a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0: \quad \boldsymbol{a^t = b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\log_a b = t}$$

Здесь a называется основанием логарифма, а b — аргументом логарифма.

Таким образом, значение логарифма — это просто соответствующий показатель степени. Рассмотрим уравнение

$$2^x = 8.$$

Очевидно, что его решением является число 3. Но что делать, если мы столкнулись например с таким уравнением

$$2^x = 5?$$

Как записать его решение? Мы знаем только, что x — это некоторое число, большее, чем 2, но меньшее, чем 3. Именно в таком случае помогает понятие логарифма, ведь x — это *такое число, в степень которого нужно возвести 2, чтобы получить 5*, а это ровно и есть определение для логарифма $\log_2 5$.

Важно! В этом блоке теории мы работаем с конкретными числами, поэтому мы не будем уделять внимание ограничениям.

Из определения сразу вытекает следующее важнейшее свойство:

Свойство 0 $\quad a^{\log_a b} = b$

Рассмотрим несколько простейших примеров:

1. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, т.к. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.
2. $\log_2 2 = 1$, т.к. $2^1 = 2$.
3. $\log_2 1 = 0$, т.к. $2^0 = 1$.
4. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, т.к. $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Свойство 1 $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов

$$\log_b a + \log_b c \stackrel{?}{=} \log_b ac \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a + \log_b c} \stackrel{?}{=} b^{\log_b ac} \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a} \cdot b^{\log_b c} \stackrel{?}{=} b^{\log_b ac} \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad a \cdot c = ac$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 2 $\log_b a - \log_b c = \log_b \dfrac{a}{c}$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов

$$\log_b a - \log_b c \stackrel{?}{=} \log_b \frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a - \log_b c} \stackrel{?}{=} b^{\log_b \frac{a}{c}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^{\log_b a}}{b^{\log_b c}} \stackrel{?}{=} b^{\log_b \frac{a}{c}} \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad \frac{a}{c} = \frac{a}{c}$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Замечание При работе с числами все хорошо, но при работе с переменными нужно быть осторожным. Казалось бы, по свойству 1 верно следующее

$$\log_2(x(x+1)) = \log_2 x + \log_2(x+1),$$

однако при $x = -3$ с левой частью все хорошо, а правая не имеет смысла, потому что аргументы логарифмов отрицательны. Это недоразумение произошло из-за того, что у левой и правой частей **разные ОДЗ**. Подробнее это будет рассмотрено на следующих вебинарах.

Свойство 3 $\log_b a^r = r \log_b a$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов

$$\log_b a^r \stackrel{?}{=} r \log_b a \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a^r} \stackrel{?}{=} b^{r \log_b a} \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a^r} \stackrel{?}{=} \left(b^{\log_b a}\right)^r \quad \Leftrightarrow \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad a^r = (a)^r$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 4 $\log_{b^r} a = \frac{1}{r} \log_b a$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов (воспользуемся тем, что $(b^r)^{\frac{1}{r}} = b$)

$$\log_{b^r} a \stackrel{?}{=} \frac{1}{r} \log_b a \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_{b^r} a} \stackrel{?}{=} b^{\frac{1}{r} \log_b a} \quad \Leftrightarrow \quad \left((b^r)^{\frac{1}{r}}\right)^{\log_{b^r} a} \stackrel{?}{=} \left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left((b^r)^{\log_{b^r} a}\right)^{\frac{1}{r}} \stackrel{?}{=} \left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad a^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{1}{r}}$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 5 $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов

$$\log_b a{\cdot}\log_a c \stackrel{?}{=} \log_b c \quad\Leftrightarrow\quad b^{\log_b a\cdot\log_a c} \stackrel{?}{=} b^{\log_b c} \quad\Leftrightarrow\quad (b^{\log_b a})^{\log_a c} \stackrel{?}{=} b^{\log_b c} \quad\xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}}\quad a^{\log_a c} = c \quad\Leftrightarrow\quad c = c$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 6 $\log_b a \cdot \log_a b = 1$

Доказательство

По предыдущему свойству $\log_b a \cdot \log_a b = \log_b b = 1$. ■

Свойство 7 $\log_b a = \frac{1}{\log_a b},\ \ a \neq 1$

Доказательство

Очевидное, но важное следствие предыдущего свойства, так как позволяет менять местами основание и аргумент логарифма. ■

Свойство 8* $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов (в первом переходе прологарифмируем обе части по основанию b)

$$a^{\log_c b} \stackrel{?}{=} b^{\log_c a} \quad\Leftrightarrow\quad \log_b a^{\log_c b} \stackrel{?}{=} \log_b b^{\log_c a} \quad\xLeftrightarrow{\text{Преобразуем левую часть по свойству 3}}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{Преобразуем левую часть по свойству 3}}\quad \log_c b{\cdot}\log_b a \stackrel{?}{=} \log_c a \quad\xLeftrightarrow{\text{Преобразуем левую часть по свойству 5}}\quad \log_c a = \log_c a$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 9 $\dfrac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$

Доказательство

$$\frac{\log_b a}{\log_b c} \xlongequal{\text{По свойству 7}} \frac{1}{\log_a b\cdot\log_b c} \xlongequal{\text{По свойству 5}} \frac{1}{\log_a c} \xlongequal{\text{По свойству 7}} \log_c a$$

■

Решение задач

№1

Найдите значение выражения $(\log_{17} 289) \cdot \left(\log_{500} \frac{1}{500}\right)$.

Ответ

-2

Решение

$$(\log_{17} 289) \cdot \left(\log_{500} \frac{1}{500}\right) = (\log_{17} 17^2) \cdot \left(\log_{500} \frac{1}{500}\right) = 2 \cdot (-1) = -2$$

№2

Найдите значение выражения $16^{\log_2 5}$.

Ответ

625

Решение

$$16^{\log_2 5} \overset{\text{По свойству 8}}{=\!=\!=\!=} 5^{\log_2 16} = 5^4 = 625$$

№3

Найдите значение выражения $\log_{11} 242 - \log_{121} 4$.

Ответ

2

Решение

Сначала преобразуем вычитаемое

$$\log_{121} 4 = \log_{11^2} 2^2 \overset{\text{По свойству 3}}{=\!=\!=\!=} 2 \log_{11^2} 2 \overset{\text{По свойству 4}}{=\!=\!=\!=} 2 \cdot \frac{1}{2} \log_{11} 2 = \log_{11} 2$$

Вернемся к исходному выражению

$$\log_{11} 242 - \log_{11} 2 \overset{\text{По свойству 2}}{=\!=\!=\!=} \log_{11} \frac{242}{2} = \log_{11} 121 = 2$$

№4

Найдите значение выражения $\frac{\log_{15} 1000}{\log_{225} 10^4}$.

Ответ

1,5

Решение

Сначала преобразуем знаменатель

$$\log_{225} 10^4 = \log_{15^2} 10^4 \overset{\text{По свойству 3}}{=\!=\!=\!=} 2 \log_{15^2} 10^2 \overset{\text{По свойству 4}}{=\!=\!=\!=} 2 \cdot \frac{1}{2} \log_{15} 10^2 = \log_{15} 10^2$$

Вернемся к исходному выражению

$$\frac{\log_{15} 1000}{\log_{15} 10^2} \xlongequal{\text{По свойству 9}} \log_{10^2} 10^3 \xlongequal{\text{По свойству 3}} 3\log_{10^2} 10 \xlongequal{\text{По свойству 4}} 3 \cdot \frac{1}{2}\log_{10} 10 = 1{,}5$$

№5

Найдите значение выражения $\log_7 144 \cdot \log_{12} 343$.

Ответ

6

Решение

$$\log_7 144 \cdot \log_{12} 343 = \log_7 12^2 \cdot \log_{12} 7^3 \xlongequal{\text{По свойству 3}} 2\log_7 12 \cdot 3\log_{12} 7 \xlongequal{\text{По свойству 6}} 2 \cdot 3 = 6$$

№6

Найдите значение выражения $3^{\log_5 2} - 2^{\log_{25} 9}$.

Ответ

0

Решение

Преобразуем вычитаемое

$$2^{\log_{25} 9} = 2^{\log_{5^2} 3^2} \xlongequal{\text{По свойству 3}} 2^{2\log_{5^2} 3} \xlongequal{\text{По свойству 4}} 2^{2\cdot\frac{1}{2}\log_5 3} = 2^{\log_5 3} \xlongequal{\text{По свойству 8}} 3^{\log_5 2}$$

Получили, что

$$3^{\log_5 2} - 2^{\log_{25} 9} = 3^{\log_5 2} - 3^{\log_5 2} = 0$$

№7

Найдите значение выражения $(3 - \log_5 7)\left(\log_{\frac{125}{7}} 400 + \log_{\frac{7}{125}} 80\right)$.

Ответ

1

Решение

Распишем число 3 в виде логарифма по основанию 5

$$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \log_5 5 \xlongequal{\text{По свойству 3}} \log_5 5^3 = \log_5 125$$

Тогда первый множитель равен

$$3 - \log_5 7 = \log_5 125 - \log_5 7 \xlongequal{\text{По свойству 2}} \log_5 \frac{125}{7}$$

Преобразуем второй множитель

$$\log_{\frac{125}{7}} 400 + \log_{\frac{7}{125}} 80 = \log_{\frac{125}{7}} 400 + \log_{\left(\frac{125}{7}\right)^{-1}} 80 \xlongequal{\text{По свойству 4}} \log_{\frac{125}{7}} 400 + \frac{1}{-1} \cdot \log_{\frac{125}{7}} 80 =$$

$$= \log_{\frac{125}{7}} 400 - \log_{\frac{125}{7}} 80 \xlongequal{\text{По свойству 2}} \log_{\frac{125}{7}} \frac{400}{80} = \log_{\frac{125}{7}} 5$$

Тогда исходное выражение равно

$$(3-\log_5 7)\left(\log_{\frac{125}{7}} 400+\log_{\frac{7}{125}} 80\right)=\log_5 \frac{125}{7}\cdot \log_{\frac{125}{7}} 5 \xlongequal{\text{По свойству 6}} 1$$

№8

Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{11} 1331\right)$.

Ответ

-1

Решение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{11} 1331\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{11} 11^3\right)=\log_{\frac{1}{3}} 3=-1$$

№9

Найдите значение выражения $49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$.

Ответ

12,5

Решение

Преобразуем первое слагаемое

$$49^{1-\log_7 2}=\left(7^2\right)^{\log_7 7-\log_7 2} \xlongequal{\text{По свойству 2}} \left(7^2\right)^{\log_7 \frac{7}{2}}=\left(7^{\log_7 \frac{7}{2}}\right)^2 \xlongequal{\text{По свойству 0}} \left(\frac{7}{2}\right)^2=12{,}25$$

Преобразуем второе слагаемое

$$5^{-\log_5 4}=\left(5^{\log_5 4}\right)^{-1} \xlongequal{\text{По свойству 0}} 4^{-1}=0{,}25$$

Тогда выражение равно $12{,}25+0{,}25=12{,}5$.

№10

Найдите значение выражения $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

Ответ

890

Решение

Преобразуем первое слагаемое

$$81^{\frac{1}{\log_5 3}} \xlongequal{\text{По свойству 7}} 81^{\log_3 5}=\left(3^4\right)^{\log_3 5}=\left(3^{\log_3 5}\right)^4 \xlongequal{\text{По свойству 0}} 5^4=625$$

Преобразуем второе слагаемое

$$27^{\log_9 36}=\left(3^3\right)^{\log_{3^2} 36} \xlongequal{\text{По свойству 4}} \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}\log_3 36}=\left(3^{\log_3 36}\right)^{\frac{3}{2}} \xlongequal{\text{По свойству 0}} 36^{\frac{3}{2}}=\left(6^2\right)^{\frac{3}{2}}=6^3=216$$

Преобразуем третье слагаемое

$$3^{\frac{4}{\log_7 9}}=\left(3^{\frac{1}{\log_7 9}}\right)^4 \xlongequal{\text{По свойству 7}} \left(3^{\log_9 7}\right)^4=\left(9^{\log_9 7}\right)^2 \xlongequal{\text{По свойству 0}} 7^2=49$$

Тогда выражение равно $625 + 216 + 49 = 890$.

№11

Найдите значение выражения $\log_b a^2b^7$, если $\log_a b = 8$.

Ответ

7,25

Решение

Так как нам дан $\log_a b$, гарантированно $a > 0,\ b > 0$, поэтому можно не беспокоясь об ОДЗ пользоваться всеми свойствами. Преобразуем выражение

$$\log_b a^2b^7 \xlongequal{\text{По свойству 1}} \log_b a^2 + \log_b b^7 = \log_b a^2 + 7 \xlongequal{\text{По свойству 3}} 2\log_b a + 7 \xlongequal{\text{По свойству 7}} \frac{2}{\log_a b} + 7 = \frac{2}{8} + 7 = 7{,}25$$