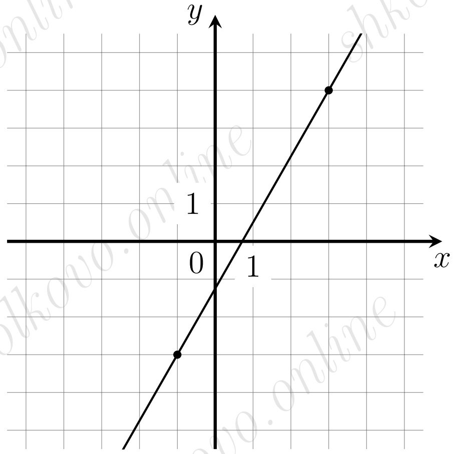
1. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором выполнено $f(x) = -13,5$.



Ответ

-7

Решение

Определим коэффициенты k и b. Найдём k как тангенс угла наклона прямой:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-(-3)}{3-(-1)} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Чтобы найти b, подставим одну из точек прямой в уравнение с уже найденным коэффициентом k. Подставим точку $(3;4)$:

$$4 = 1,75 \cdot 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 5,25 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -1,25$$

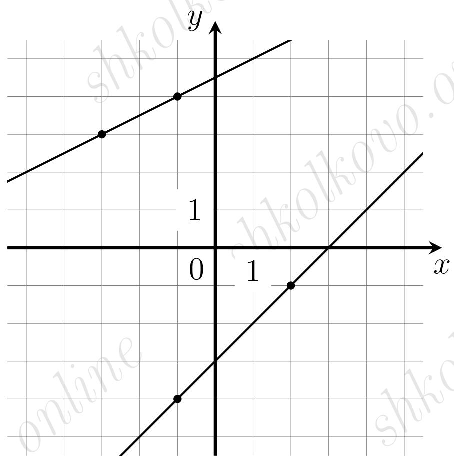
Значит, функция имеет вид

$$f(x) = 1,75x - 1,25$$

Имеем уравнение на x :

$$f(x) = -13,5 \quad \Leftrightarrow \quad 1,75x - 1,25 = -13,5 \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 5 = -54 \quad \Leftrightarrow \quad x = -7$$

2. На рисунке изображены графики двух функций вида $y = kx + b$, которые пересекаются в точке $A(x_0; y_0)$. Найдите x_0.



Ответ

15

Решение

Первый способ.

Пусть $y = k_1x + b_1$ — уравнение первой прямой, $y = k_2x + b_2$ — уравнение второй прямой.

Заметим, что первая прямая проходит через точки $(-1; 4)$ и $(-3; 3)$. Если прямая проходит через точку на плоскости, то координаты этой точки обращают уравнение этой прямой в верное равенство. Тогда мы получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 4 = k_1 \cdot (-1) + b_1 \\ 3 = k_1 \cdot (-3) + b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -k_1 + b_1 \\ 1 = 2k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4 + k_1 \\ k_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{9}{2} \\ k_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Значит, $y = \frac{x+9}{2}$ — уравнение первой прямой. Вторая прямая проходит через точки $(2; -1)$ и $(-1; -4)$. Следовательно, мы можем получить следующую систему:

$$\begin{cases} -1 = k_2 \cdot 2 + b_2 \\ -4 = k_2 \cdot (-1) + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2k_2 + b_2 \\ 3 = 3k_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = -(2k_2 + 1) \\ k_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = -3 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Значит, $y = x - 3$ — уравнение второй прямой. Обе прямые проходят через точку $A(x_0; y_0)$ по условию, тогда мы имеем систему:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{x_0+9}{2} \\ y_0 = x_0 - 3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 - 3 = \frac{x_0 + 9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x_0 - 6 = x_0 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 15$$

Второй способ.

Если прямая a на плоскости проходит через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то мы можем составить ее каноническое уравнение:

$$a : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

На рисунке видно, что одна из прямых проходит через точки $(-1; 4)$ и $(-3; 3)$. Тогда мы можем записать ее каноническое уравнение:

$$\frac{x - (-1)}{-3 - (-1)} = \frac{y - 4}{3 - 4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 4}{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + 1}{2} = y - 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x + 9}{2}$$

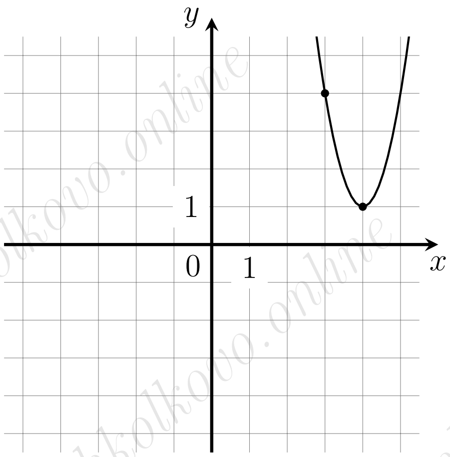
Другая прямая проходит через точки $(2; -1)$ и $(-1; -4)$. Аналогично запишем ее каноническое уравнение:

$$\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y - (-1)}{-4 - (-1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 2}{-3} = \frac{y + 1}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 3$$

Если прямая проходит через точку на плоскости, то координаты этой точки обращают уравнение прямой в верное равенство. Обе прямые проходят через точку $A(x_0; y_0)$ по условию, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{x_0+9}{2} \\ y_0 = x_0 - 3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 - 3 = \frac{x_0 + 9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x_0 - 6 = x_0 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 15$$

3. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-1)$.



Ответ

76

Решение

Любую параболу вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты ее вершины. По картинке несложно видеть, что вершина параболы имеет координаты $(4; 1)$. Также ветви параболы направлены вверх, значит, функция имеет вид

$$f(x) = a(x - 4)^2 + 1,\ \text{где } a > 0$$

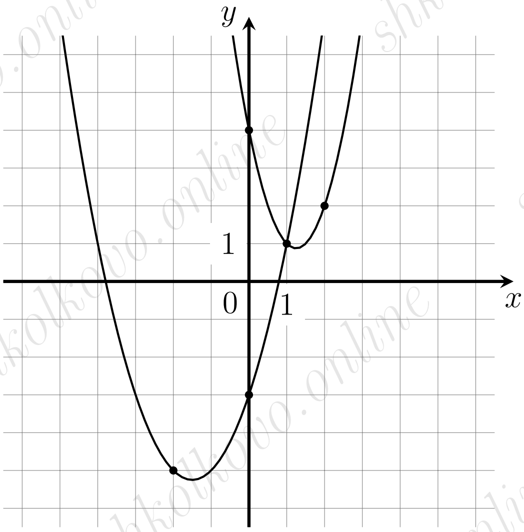
По картинке видно, что в точке $x = 3$ функция равна 4. Для того чтобы попасть в точку $(3; 4)$ из вершины с координатами $(4; 1)$, нам нужно сместиться на 1 влево и на 3 вверх. Тогда понятно, что перед нами график функции $y = 3x^2$, вершину которого сместили из точки $(0; 0)$ в точку $(4; 1)$. Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = 3(x - 4)^2 + 1$$

Тогда

$$f(-1) = 3(-1 - 4)^2 + 1 = 3 \cdot 25 + 1 = 76$$

4. На рисунке изображены графики функций $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ

67

Решение

Определим какой из графиков («верхний» или «нижний») принадлежит функции $f(x)$. Заметим, что $f(0) = 4$, значит, график функции $f(x)$ проходит через точку $(0; 4)$, то есть функции $f(x)$ соответствует «верхний» график.

Восстановим уравнение функции $g(x)$. Заметим, что «нижний» график проходит через точку $(0; -3)$, следовательно справедливо равенство

$$g(0) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3 \quad \Leftrightarrow \quad c = -3$$

Также график функции $g(x)$ проходит через целые точки $(-2; -5)$ и $(1; 1)$, значит, можем составить систему уравнений:

$$\begin{cases} g(-2) = -5 \\ g(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -5 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b - 3 = -5 \\ a + b - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a + 1 \\ b = 4 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 4 - a \\ b = 4 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Таким образом, мы полностью восстановили уравнение функции $g(x)$:

$$g(x) = x^2 + 3x - 3$$

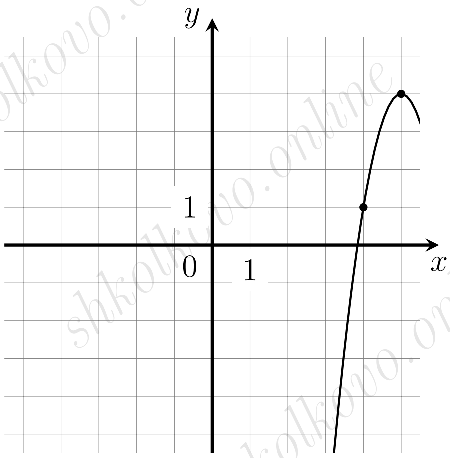
Теперь найдем абциссу второй точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 3x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)(x - 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= 7 \end{aligned}\right.$$

Значит, абсцисса точки B равна 7. Тогда ордината точки B равна

$$g(7) = 7^2 + 3 \cdot 7 - 3 = 49 + 21 - 3 = 67$$

5. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — действительные. Найдите значение $f(1)$.



Ответ

-44

Решение

Любую функцию вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты ее вершины. По картинке несложно видеть, что вершина параболы имеет координаты $(5; 4)$, значит, функция имеет вид

$$f(x) = a(x - 5)^2 + 4$$

Также по картинке видно, что в точке $x = 4$ значение функции равно 1. Это условие можно записать следующим образом:

$$1 = f(4) = a(4 - 5)^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a + 4 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3$$

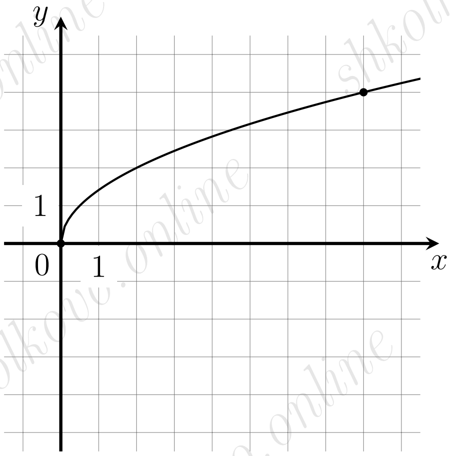
Теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = -3(x - 5)^2 + 4$$

Тогда

$$f(1) = -3(1 - 5)^2 + 4 = -3 \cdot (-4)^2 + 4 = -48 + 4 = -44$$

6. На рисунке изображён график функции $f(x)=k\sqrt{x}$. Найдите $f(32)$.



Ответ

8

Решение

Решим задачу методом подстановки. График функции $f(x)=k\sqrt{x}$ проходит через точку $(8;4)$. Тогда имеем уравнение:

$$f(8)=4 \quad\Leftrightarrow\quad k\sqrt{8}=4 \quad\Leftrightarrow\quad k\cdot 2\sqrt{2}=4 \quad\Leftrightarrow\quad k=\sqrt{2}$$

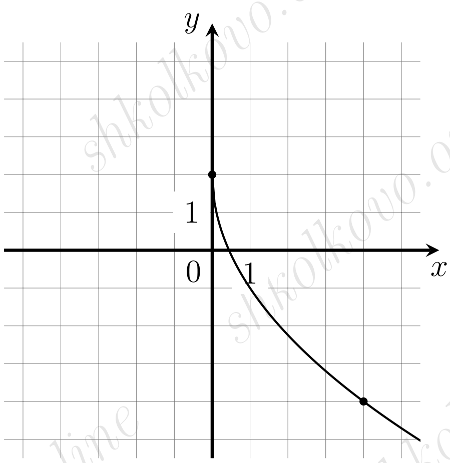
Значит, функция имеет вид

$$f(x)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}$$

Тогда

$$f(32)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 32}=\sqrt{64}=8$$

7. На рисунке изображен график функции $f(x)=k\sqrt{x}+p$. Найдите значение x, при котором $f(x)=-10$.



Ответ

16

Решение

График функции $f(x)$ проходит через точки $(0;2)$ и $(4;-4)$. Значит, координаты этих точек обращают уравнение функции $f(x)$ в верное равенство. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 = f(0) \\ -4 = f(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k\sqrt{0} + p \\ -4 = k\sqrt{4} + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ -4 = 2k + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ k = -3 \end{cases}$$

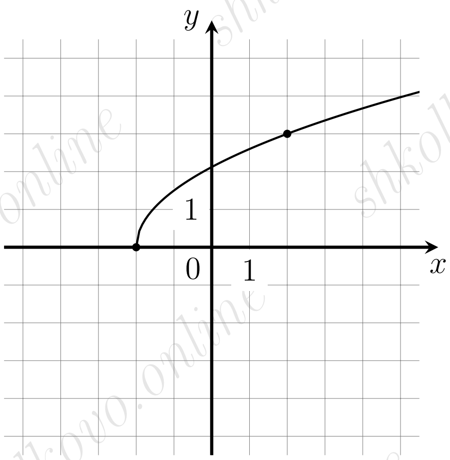
Таким образом, мы полностью восстановили уравнение функции:

$$f(x) = -3\sqrt{x} + 2$$

Тогда

$$f(x) = -10 \quad \Leftrightarrow \quad -3\sqrt{x} + 2 = -10 \quad \Leftrightarrow \quad -3\sqrt{x} = -12 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 16$$

8. На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x+p}$. Найдите $f(0,25)$.



Ответ

2,25

Решение

График функции $f(x)$ проходит через точки $(-2;0)$ и $(2;3)$. Значит, координаты этих точек обращают уравнение функции $f(x)$ в верное равенство. Тогда

$$f(-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k\sqrt{-2+p} = 0$$

Заметим, что $k \neq 0$, поэтому

$$k\sqrt{-2+p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{p-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 2$$

Также

$$f(2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad k\sqrt{2+p} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad k\sqrt{2+2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1,5$$

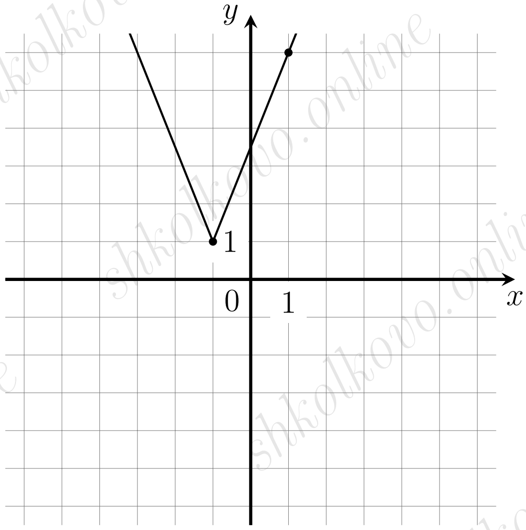
Таким образом, мы полностью восстановили уравнение функции:

$$f(x) = 1,5\sqrt{x+2}$$

Тогда

$$f(0,25) = 1,5 \cdot \sqrt{0,25+2} = 1,5 \cdot \sqrt{2,25} = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25$$

9. На рисунке изображен график функции $f(x) = a|x-b| + c$. Найдите $f(-8)$.



Ответ

18,5

Решение

На рисунке изображен «уголок модуля» — график функции

$$f(x) = a|x-b| + c$$

Коэффициент a отвечает за угол наклона прямых, содержащих ветви графика. Он равен тангенсу угла наклона правой ветви.

Коэффициент b отвечает за сдвиг вершины уголка по оси Ox, он равен координате вершины уголка модуля по оси абсцисс. Коэффициент c отвечает за сдвиг вершины уголка по оси Oy, он равен координате вершины уголка модуля по оси ординат.

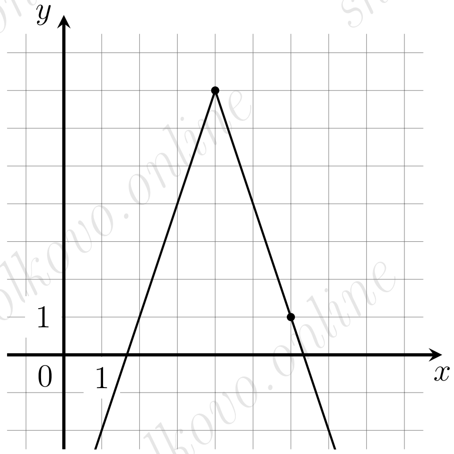
На рисунке видно, что правая ветвь графика проходит через точки $(-1;1)$ и $(1;6)$. Если прямая проходит через точки $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$, то тангенс угла ее наклона равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1-6}{-1-1} = \frac{5}{2}$$

Вершина уголка модуля находится в точке $(-1;1)$, значит, $b = -1$ и $c = 1$.
Тогда

$$f(x) = \frac{5}{2} \cdot |x+1| + 1 \quad \Rightarrow \quad f(-8) = \frac{5}{2} \cdot |-8+1| + 1 = \frac{35}{2} + 1 = 18,5$$

10. На рисунке изображен график функции $f(x) = a|x - b| + c$. Найдите $f(12)$.



Ответ

-17

Решение

На рисунке изображен «уголок модуля» — график функции

$$f(x) = a|x - b| + c$$

Коэффициент a отвечает за угол наклона прямых, содержащих ветви графика. Он равен тангенсу угла наклона правой ветви.

Коэффициент b отвечает за сдвиг вершины уголка по оси Ox, он равен координате вершины уголка модуля по оси абсцисс. Коэффициент c отвечает за сдвиг вершины уголка по оси Oy, он равен координате вершины уголка модуля по оси ординат.

На рисунке видно, что правая ветвь графика проходит через точки $(4; 7)$ и $(6; 1)$. Если прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то тангенс угла ее наклона равен

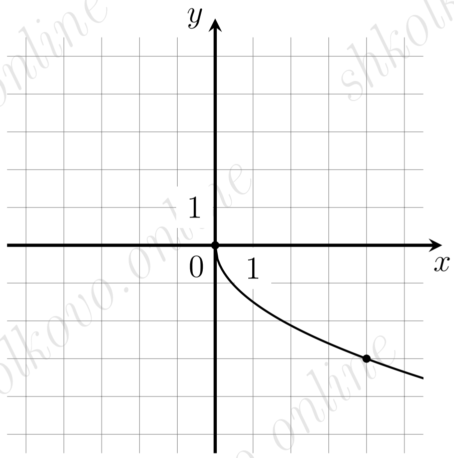
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{7-1}{4-6} = -3$$

Вершина уголка модуля находится в точке $(4; 7)$, значит, $b = 4$ и $c = 7$.

Тогда

$$f(x) = -3 \cdot |x - 4| + 7 \quad \Rightarrow \quad f(12) = -3 \cdot |12 - 4| + 7 = -24 + 7 = -17$$

11. На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(2,56)$.



Ответ

−2,4

Решение

Решим задачу методом подстановки. График функции $f(x) = k\sqrt{x}$ проходит через точку $(4; -3)$. Тогда имеем уравнение:

$$f(4) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad k\sqrt{4} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot 2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1,5$$

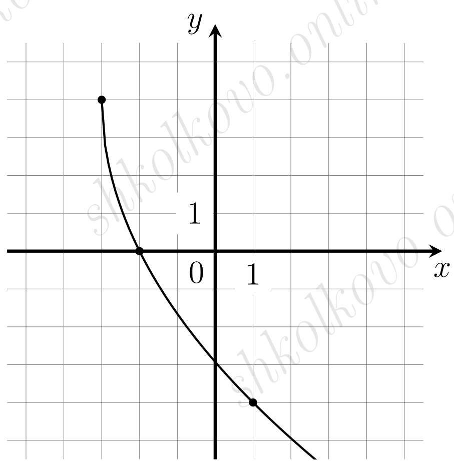
Значит, функция имеет вид

$$f(x) = -1,5\sqrt{x}$$

Тогда

$$f(2,56) = -1,5\sqrt{2,56} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{10} = -\frac{24}{10} = -2,4$$

12. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\sqrt{x - x_0} + y_0$, где числа a, x_0 и y_0 — действительные. Найдите значение $f(6)$.



Ответ

−8

Решение

График функции $f(x) = a\sqrt{x-x_0} + y_0$ получается сдвигом графика функции $g(x) = a\sqrt{x}$ на x_0 вправо при положительном x_0 (на $-x_0$ влево при отрицательном x_0) и на y_0 вверх при положительном y_0 (на $-y_0$ вниз при отрицательном y_0). Следовательно, вершина такого видоизмененного графика корня имеет координаты $(x_0; y_0)$.

По картинке несложно видеть, что вершина графика имеет координаты $(-3; 4)$, значит, функция имеет вид

$$f(x) = a\sqrt{x-(-3)} + 4 = a\sqrt{x+3} + 4$$

Также по картинке видно, что в точке $x = -2$ функция равна 0. Это условие можно записать следующим образом:

$$f(-2) = a\sqrt{-2+3} + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -4$$

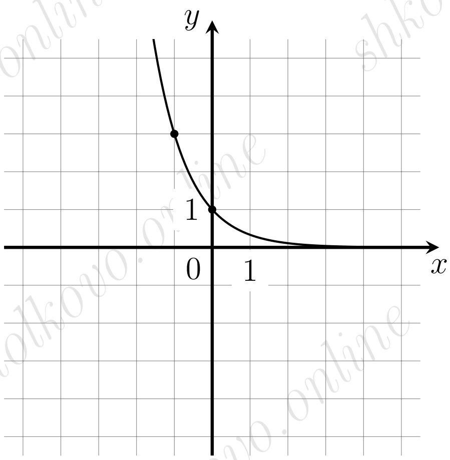
Теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = -4\sqrt{x+3} + 4$$

Тогда

$$f(6) = -4\sqrt{6+3} + 4 = -8$$

13. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-3)$.



Ответ

27

Решение

Найдем основание a, подставив в уравнение функции точку $(-1; 3)$, через которую проходит график:

$$f(-1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

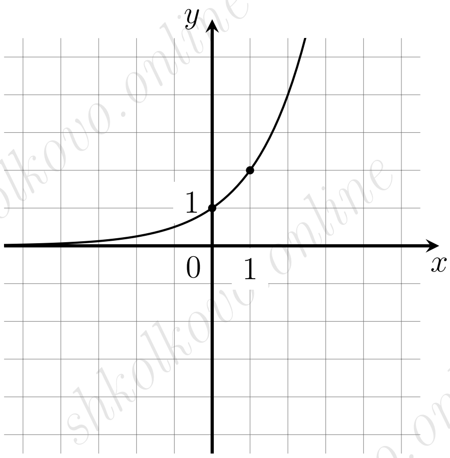
Значит, мы восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Тогда

$$f(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$$

14. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



Ответ

8

Решение

Найдем основание a, подставив в уравнение функции точку $(1; 2)$, через которую проходит график:

$$f(1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

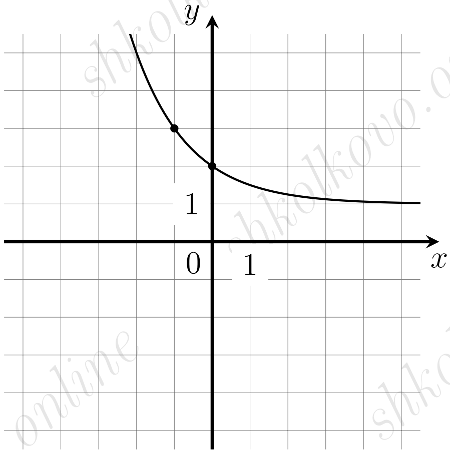
Значит, мы восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = 2^x$$

Тогда

$$f(3) = 2^3 = 8$$

15. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 33.



Ответ

-5

Решение

Найдем коэффициент b, подставив в уравнение функции точку $(0;2)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(0)=2 \quad\Leftrightarrow\quad a^0+b=2 \quad\Leftrightarrow\quad 1+b=2 \quad\Leftrightarrow\quad b=1$$

Теперь найдем основание a, подставив в уравнение функции точку $(-1;3)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(-1)=3 \quad\Leftrightarrow\quad a^{-1}+1=3 \quad\Leftrightarrow\quad a^{-1}=2 \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{1}{2}$$

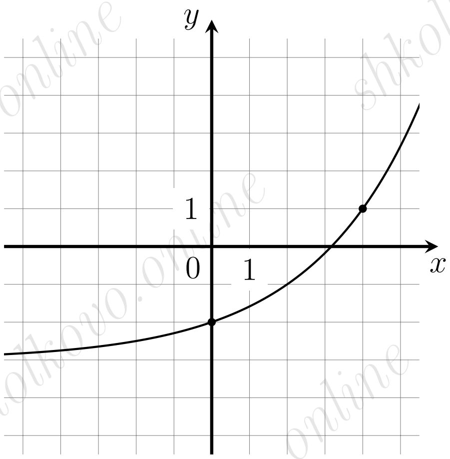
Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$$

Тогда

$$f(x)=33 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x+1=33 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x=32 \quad\Leftrightarrow\quad x=-5$$

16. На рисунке изображён график функции $f(x)=a^x+b$. Найдите $f(10)$.



Ответ

29

Решение

Найдем коэффициент b, подставив в уравнение функции точку $(0;-2)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(0)=-2 \quad\Leftrightarrow\quad a^0+b=-2 \quad\Leftrightarrow\quad 1+b=-2 \quad\Leftrightarrow\quad b=-3$$

Теперь найдем основание a, подставив в уравнение функции точку $(4;1)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(4)=1 \quad\Leftrightarrow\quad a^4-3=1 \quad\Leftrightarrow\quad a^4=4 \quad\Leftrightarrow\quad a=\pm\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt{2}$$

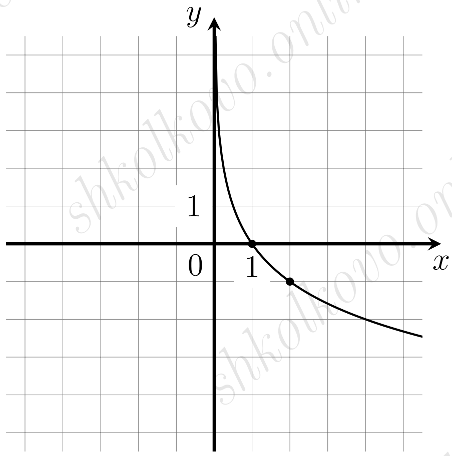
По условию a — основание степени с действительным показателем, поэтому $a > 0$. Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x - 3$$

Тогда

$$f(10) = \left(\sqrt{2}\right)^{10} - 3 = 2^5 - 3 = 32 - 3 = 29$$

17. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ

-3

Решение

По картинке видно, что график функции $f(x) = \log_a x$ проходит через точку $(2; -1)$. Тогда мы можем составить уравнение:

$$f(2) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1} = 2 \quad \underset{a>0}{\Leftrightarrow} \quad a = \frac{1}{2}$$

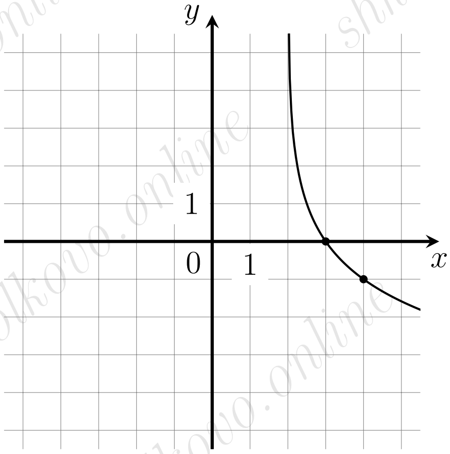
Отсюда уравнение функции имеет вид

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Тогда

$$f(8) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$$

18. На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -5$.



Ответ

34

Решение

По графику видно, что:

1) значение функции в точке $x = 3$ равно 0, то есть

$$0 = f(3) = \log_a(3+b)$$

2) значение в точке $x = 4$ равно -1, то есть

$$-1 = f(4) = \log_a(4+b)$$

Значение логарифма $\log_a(3+b)$ будет равно 0 тогда и только тогда, когда $3+b = 1$, то есть $b = -2$. Подставив $b = -2$ в выражение для $f(4)$, получим:

$$-1 = \log_a(4+b) = \log_a(4-2) = \log_a(2) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Тогда функция имеет вид

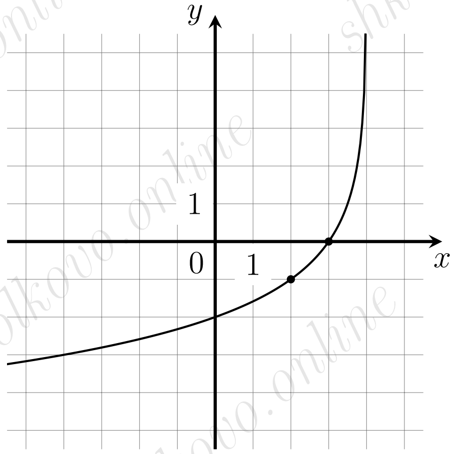
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -\log_2(x-2)$$

Осталось найти значение x, при которых значение функции равно -5:

$$f(x) = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -\log_2(x-2) = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(x-2) = 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2(x-2) = \log_2 2^5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2 = 2^5 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 34$$

19. На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -3$.



Ответ

-4

Решение

По картинке видим, что целые точки $(2; -1)$ и $(3; 0)$ принадлежат графику функции $f(x)$. Тогда можем составить систему:

$$\begin{cases} -1 = f(2) \\ 0 = f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \log_{\frac{1}{2}}(2a + b) \\ 0 = \log_{\frac{1}{2}}(3a + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2a + b \\ 1 = 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

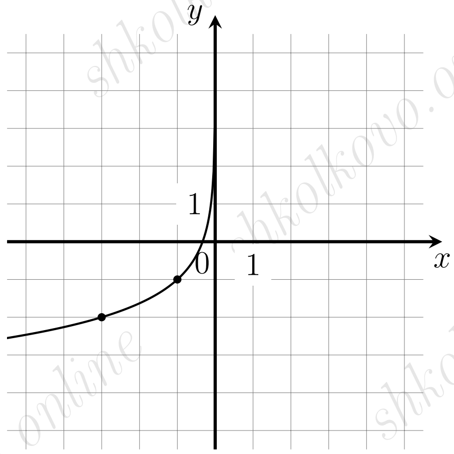
Значит, функция имеет вид

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x + 4)$$

Осталось найти x, при котором значение функции равно -3:

$$-3 = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad -3 = \log_{\frac{1}{2}}(-x + 4) \quad \Leftrightarrow \quad 8 = -x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

20. На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(bx)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -4$.



Ответ

-27

Решение

По картинке видим, что целые точки $(-3;-2)$ и $(-1;-1)$ принадлежат графику функции $f(x)$. Тогда можем составить систему:

$$\begin{cases}-2=f(-3)\\ -1=f(-1)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-2=\log_a(-3b)\\ -1=\log_a(-b)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}1=\log_a\left(\frac{1}{3}\right)\\ -1=\log_a(-b)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=-3\end{cases}$$

Здесь во второй системе из второго уравнения вычли первое.

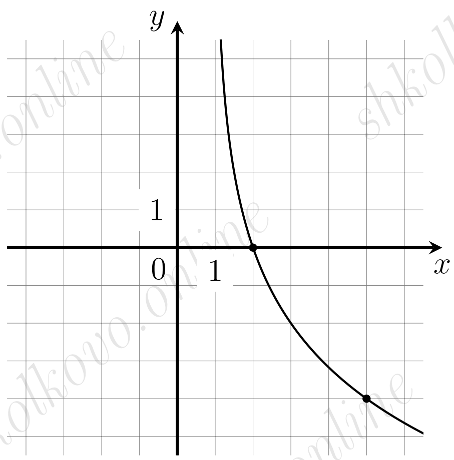
Тогда функция имеет вид

$$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(-3x)$$

Осталось найти x, при котором значение функции равно $-4:$

$$-4=f(x)\quad\Leftrightarrow\quad -4=\log_{\frac{1}{3}}(-3x)\quad\Leftrightarrow\quad 81=-3x\quad\Leftrightarrow\quad x=-27$$

21. На рисунке изображен график функции $f(x)=-2\log_a(x-b)$. Найдите значения a и b. Запишите эти значения подряд без пробелов.



Ответ

21

Решение

Найдем коэффициент b, подставив в уравнение функции точку $(2;0)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(2)=0\quad\Leftrightarrow\quad -2\log_a(2-b)=0\quad\Leftrightarrow\quad 2-b=1\quad\Leftrightarrow\quad b=1$$

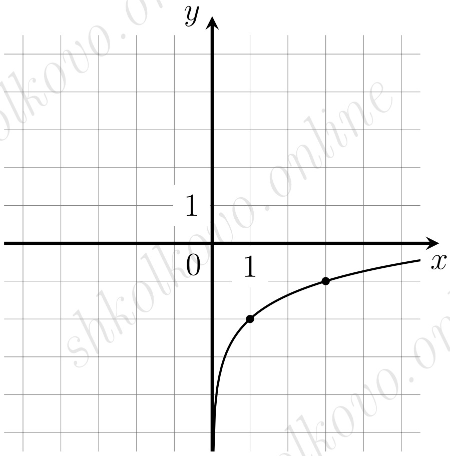
Теперь найдем основание a, подставив в уравнение точку $(5;-4)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(5)=-4\quad\Leftrightarrow\quad -2\log_a(5-1)=-4\quad\Leftrightarrow\quad \log_a 4=2\quad\Leftrightarrow\quad a=2$$

Теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = -2\log_2(x-1)$$

22. На рисунке изображен график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f\left(\frac{1}{3}\right)$.



Ответ

-3

Решение

По картинке видим, что целые точки $(1;-2)$ и $(3;-1)$ принадлежат графику функции $f(x)$, поэтому можем составить систему:

$$\begin{cases} -2 = f(1) \\ -1 = f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = b + \log_a 1 \\ -1 = b + \log_a 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 - \log_a 1 \\ \log_a 3 = -1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ \log_a 3 = -1 - (-2) \end{cases}$$

Теперь мы можем найти коэффициент a :

$$\log_a 3 = -1 - (-2) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$

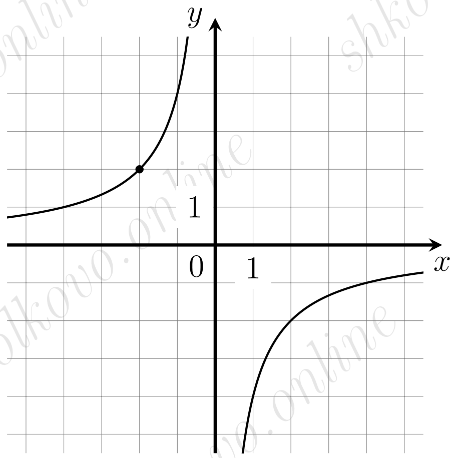
Значит, функция имеет вид

$$f(x) = -2 + \log_3 x$$

Осталось найти $f\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 + \log_3 \frac{1}{3} = -2 + \log_3 3^{-1} = -2 - \log_3 3 = -2 - 1 = -3$$

23. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \dfrac{k}{x}$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ

$-0{,}5$

Решение

По картинке видно, что график функции $f(x)$ проходит через целую точку $(-2; 2)$, следовательно, справедливо следующее равенство:

$$f(-2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{-2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = -4$$

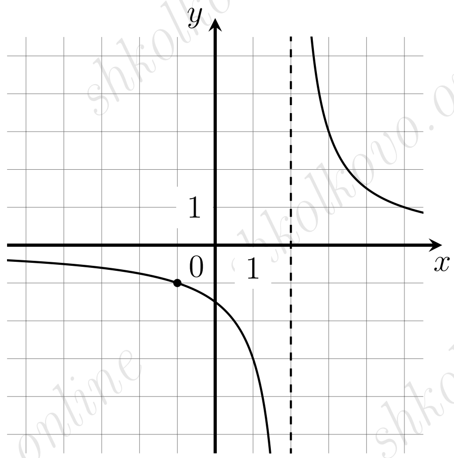
Таким образом, мы восстановили уравнение функции:

$$f(x) = -\frac{4}{x}$$

Найдем $f(8)$:

$$f(8) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

24. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -0,2$.



Ответ

-13

Решение

График функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$ — это гипербола $y = \dfrac{k}{x}$, но сдвинутая на a влево при $a > 0$ и на $-a$ вправо при $a < 0$. На картинке видим, что график сдвинут на 2 вправо, так как вертикальная асимптота имеет уравнение $x = 2$. Следовательно, $a = -2$.

Также точка $(-1; -1)$ принадлежит графику функции f, поэтому можем найти k :

$$f(-1) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{-1-2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 3$$

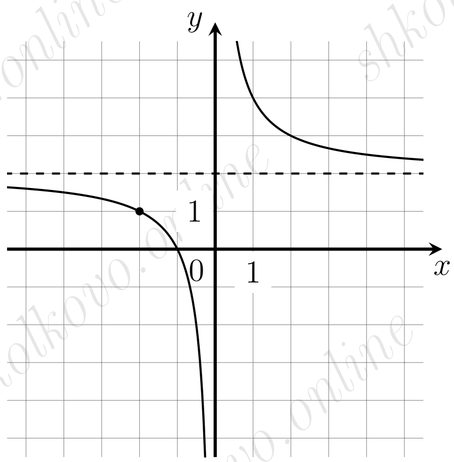
Значит, функция имеет вид

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

Осталось найти x, при котором значение функции равно $(-0,2)$:

$$-0,2 = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad -0,2 = \frac{3}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 = -0,2x + 0,4 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -13$$

25. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 7.



Ответ

0,4

Решение

График функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$ — это гипербола $y = \dfrac{k}{x}$, сдвинутая на a вдоль оси Oy. По рисунку видим, что гипербола сдвинута на 2 вверх, так как горизонтальная асимптота имеет вид $y = 2$. Следовательно, $a = 2$.

Также точка $(-2; 1)$ принадлежит графику функции f, поэтому можем найти k :

$$f(-2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{-2} + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$$

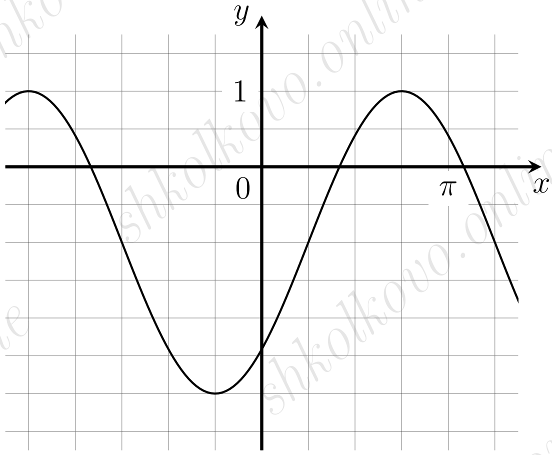
Значит, функция имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2$$

Осталось найти x, при котором значение функции равно 7:

$$7 = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 7 = \frac{2}{x} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7x = 2 + 2x \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0{,}4$$

26. На рисунке изображен график функции $f(x) = a\sin(x + b) + c$. Найдите c.



Ответ

-1

Решение

Заметим, что максимальное значение функции $\sin(x+b)$ равно 1, а минимальное — (-1).

Тогда при $a > 0$ максимальное значение $f(x)$ равно $a + c$, минимальное равно $(-a + c)$.

Если $a < 0$, то наоборот, максимальное значение $f(x)$ равно $(-a + c)$, а минимальное равно $a + c$.

Сложив максимальное и минимальное значения $f(x)$, мы получим

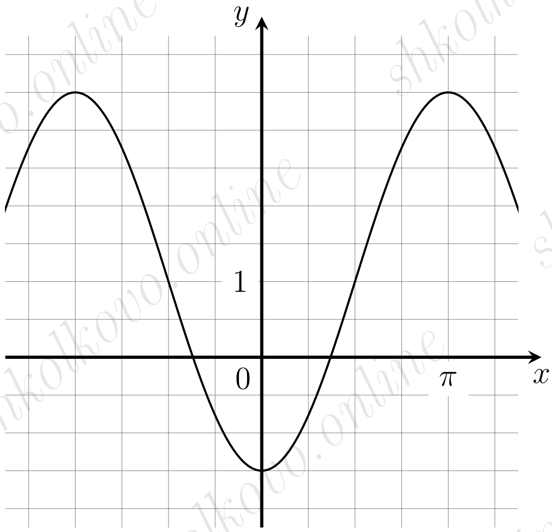
$$(a + c) + (-a + c) = 2c$$

По картинке видно, что максимальное значение $f(x)$ равно 1, а минимальное равно (-3).

Тогда окончательно имеем:

$$2c = 1 + (-3) \quad \Leftrightarrow \quad 2c = -2 \quad \Leftrightarrow \quad c = -1$$

27. На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cdot \cos x + b$. Найдите a.



Ответ

−2,5

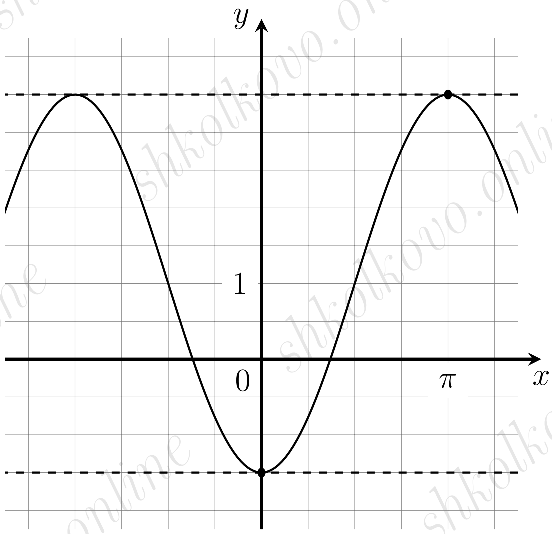
Решение

С самого начала определим знак коэффициента a. Так как нам дана функция вида $f(x) = a \cdot \cos x + b$, а в окрестности точки $x = 0$ ее график выглядит как $\smile$, мы можем сделать вывод, что $a < 0$.

Определим величину «коридора», в котором меняется функция. Наименьшее значение, которое принимает функция, равно $(-1,5)$, а наибольшее значение равно $3,5$. Тогда величина коридора равна $3,5 - (-1,5) = 5$.

У классического графика косинуса величина коридора равна 2. После домножения функции на коэффициент a величина коридора изменяется в $|a|$ раз, то есть

$$5 = 2|a| \quad \Rightarrow \quad |a| = 2,5 \quad \underset{a<0}{\Rightarrow} \quad a = -2,5$$



Найдем также b. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = -2,5\cos x$$

Она лежит в коридоре от $-2,5$ до $2,5$. При этом функция $f(x)$ лежит в коридоре от $-1,5$ до $3,5$. Это значит, что если мы сдвинем коридор функции $g(x)$ на 1 вверх, то получим коридор функции $f(x)$. Все точки графиков также совпадут, тогда $b = 1$.