1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O — середина отрезка CB_1.

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A.

б) Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

Ответ

б) $24\sqrt{3}$

Решение

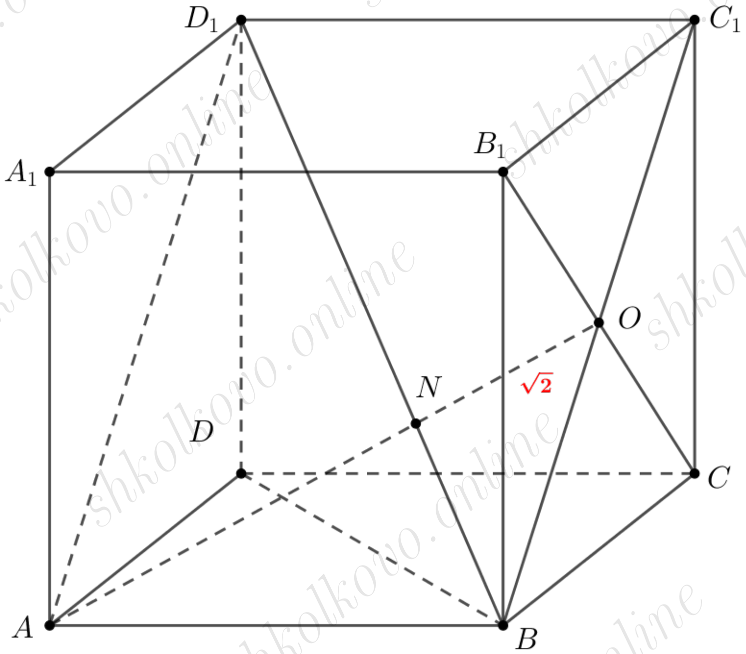
а) Точка O — середина диагоналей CB_1 и BC_1 прямоугольника BCC_1B_1. Следовательно, точка O лежит в плоскости (ABC_1D_1). Треугольники AD_1N и OBN подобны по двум сторонам и углу между ними:

$$\frac{AD_1}{BO} = 2 = \frac{D_1N}{BN}, \qquad \angle AD_1N = \angle AD_1B = \angle D_1BC_1 = \angle NBO$$

Тогда получаем:

$$\angle ANO = \angle AND_1 + \angle D_1NO = \angle ONB + \angle D_1NO = \angle D_1NB = 180^\circ$$

Таким образом, точка A лежит на прямой NO.



б) Прямые BD_1 и CB_1 скрещивающиеся, а длина отрезка NO равна расстоянию между ними, значит, отрезок NO перпендикулярен прямым BD_1 и CB_1. Таким образом, прямая CB_1 перпендикулярна плоскости (ABC_1), поскольку она перпендикулярна лежащим в ней прямым AB и AO. Следовательно, диагонали прямоугольника BCC_1B_1 перпендикулярны, то есть он является квадратом.

Из подобия треугольников AD_1N и OBN следует, что

$$AN = 2NO = 2\sqrt{2}$$

Отрезок BN — высота прямоугольного треугольника ABO. Получаем:

$$BN = \sqrt{AN \cdot NO} = 2,\ BD_1 = 6$$

$$BO = \sqrt{BN^2 + NO^2} = \sqrt{6}$$

$$AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = 2\sqrt{3}$$

Тогда

$$BC = BB_1 = \sqrt{2} \cdot BO = 2\sqrt{3}$$

Таким образом, в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны $2\sqrt{3}$. Следовательно, его объём равен $24\sqrt{3}$.

2. Дан тетраэдр $ABCD$. На ребре AC выбрана точка K так, что $AK : KC = 3 : 7$. Также на ребрах AD, BD и BC выбраны точки L, M и N соответственно так, что $KLMN$ — квадрат со стороной 3.

а) Докажите, что $AB : CD = 3 : 7$.

б) Найдите объем пирамиды $CKLMN$, если объем тетраэдра $ABCD$ равен 100.

Ответ

б) 29,4

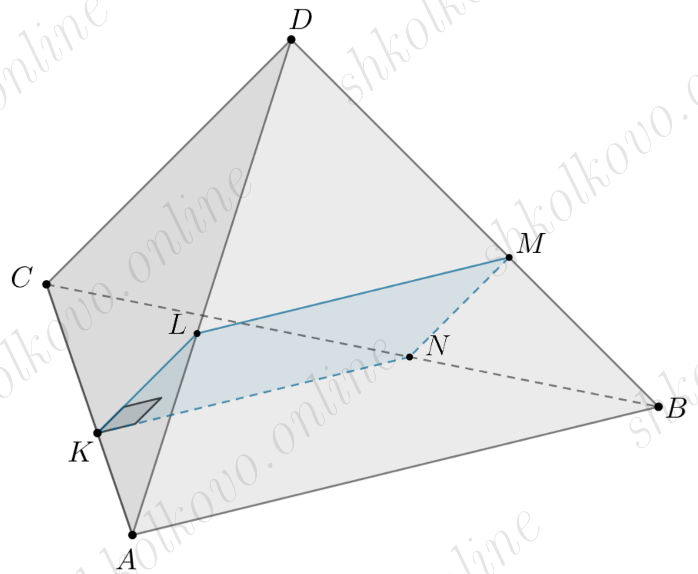
Решение

а) Так как $KLMN$ — квадрат, то $KL = KN$, $KL \perp KN$, $KL \parallel MN$, $KN \parallel ML$.

Докажем, что $KN \parallel AB$. Аналогично будет доказываться, что $KL \parallel CD$.

Рассмотрим плоскости (KLM), (ABC) и (ABD). Их линии пересечения KN, AB и ML либо параллельны друг другу, либо пересекаются в одной точке. Так как две из трех линий KN и ML друг другу параллельны, то и третья линия AB им параллельна. Следовательно, $KN \parallel AB \parallel ML$.

Значит и $KL \parallel CD \parallel MN$.



Из этих параллельностей следует, что $\triangle AKL \sim \triangle ACD$ и $\triangle CKN \sim \triangle CAB$. Следовательно,

$$KL : CD = AK : AC = 3 : 10 \quad \Rightarrow \quad KL = 0{,}3CD$$
$$KN : AB = CK : CA = 7 : 10 \quad \Rightarrow \quad KN = 0{,}7AB$$

Так как $KLMN$ — квадрат, то $KL = KN$, следовательно,

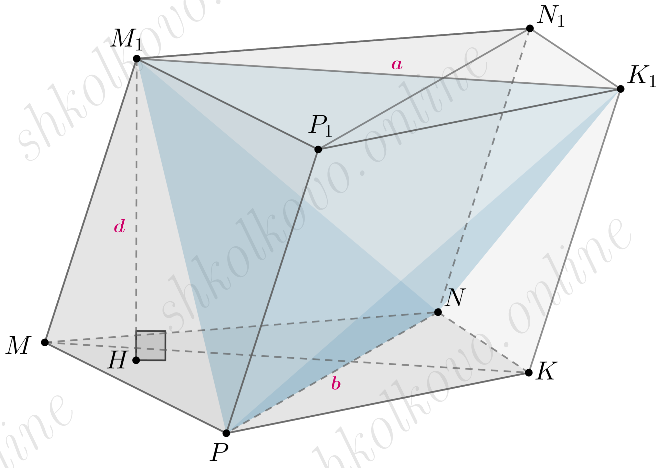
$$0{,}3CD = 0{,}7AB \quad \Rightarrow \quad AB : CD = 3 : 7$$

Что и требовалось доказать.

б) Докажем мини-задачу: если a и b — противоположные ребра тетраэдра, d — расстояние между ними, α — угол между ними, то объем этого тетраэдра равен $\dfrac{1}{6}\,abd\sin\alpha$.

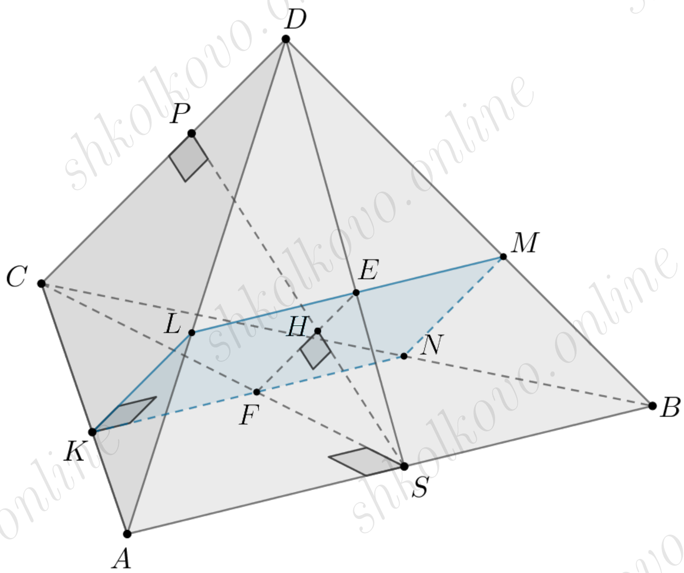
Рассмотрим призму $MNKPM_1N_1K_1P_1$, в основании которой лежит четырехугольник $MNKP$, диагонали которого соответственно равны и параллельны двум противоположным ребрам данного тетраэдра: $MK = a$, $NP = b$, $\angle(MK, NP) = \alpha$. Тогда расстояние между основаниями призмы равно d. Значит, объем этой призмы

$$V = d \cdot \frac{1}{2} ab \sin\alpha$$



Распишем, чему равен объем данного тетраэдра M_1NK_1P :

$$V_{M_1NK_1P} = V - \left(\underbrace{V_{M_1MNP} + V_{K_1NKP}}_{=V_{M_1MNKP}} + \underbrace{V_{NM_1N_1K_1} + V_{PM_1K_1P_1}}_{=V_{NM_1N_1K_1P_1}} \right) = V - \left(\frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V\right) = \frac{1}{3}V = \frac{1}{6}abd\sin\alpha$$



Заметим, что так как $AB \parallel (KLM)$, то расстояние от любой точки прямой AB до этой плоскости будет одинаковым. Аналогично, так как $CD \parallel (KLM)$, то расстояние от любой точки прямой CD до этой плоскости будет одинаковым. Найдем расстояние от прямой CD до этой плоскости. Оно будет являться высотой пирамиды $CKLMN$.

Проведем $CS \perp AB$. Тогда $AB \perp (CSD)$. Проведем $SP \perp CD$. Пусть $SP \cap (KLM) = H$. Тогда $PH \perp (KLM)$, так как $PH \perp KN \parallel AB$ и $PH \perp KL \parallel CD$. Следовательно, PH — искомое расстояние.

Из $\triangle CKN \sim \triangle CAB$ следует, что $KN = \dfrac{7}{10}AB = 3$. Следовательно, $AB = \dfrac{30}{7}$. Аналогично $KL = \dfrac{3}{10}CD = 3$, откуда $CD = 10$.

Из доказанной формулы следует, что объем тетраэдра $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{6}\cdot CD\cdot AB\cdot SP\cdot \sin 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 100 = \frac{1}{6}\cdot\frac{30}{7}\cdot 10\cdot SP \quad \Leftrightarrow \quad SP = 14$$

Так как по теореме Фалеса $3:7 = AK:KC = SF:FC = SH:HP$, то $PH:SP = 7:10$. Тогда

$$PH = \frac{7}{10}SP = 9{,}8.$$

Следовательно, объем пирамиды $CKLMN$ равен

$$V_{CKLMN} = \frac{1}{3}\cdot PH\cdot S_{KLMN} = \frac{1}{3}\cdot 9{,}8\cdot 3^2 = 29{,}4.$$

3. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 — середина AD. На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина B_1E.

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE, если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.

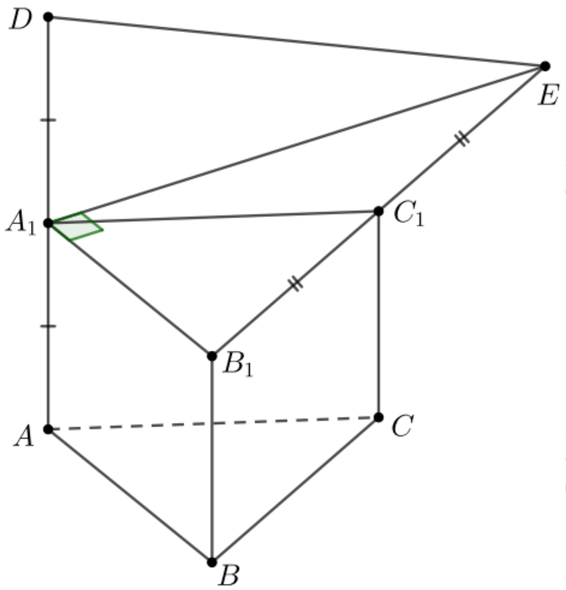
Ответ

б) $\dfrac{8\sqrt{3}}{7}$

Решение

а) Прямая AD перпендикулярна плоскости $A_1B_1C_1$, поэтому прямая A_1E является проекцией прямой DE на эту плоскость.

Заметим, что $A_1C_1 = B_1C_1$, значит, в треугольнике A_1EB_1 медиана A_1C_1 равна половине стороны B_1E, поэтому треугольник A_1EB_1 прямоугольный с прямым углом A_1. Тогда по теореме о трех перпендикулярах получаем, что прямая A_1B_1 перпендикулярна прямой DE.



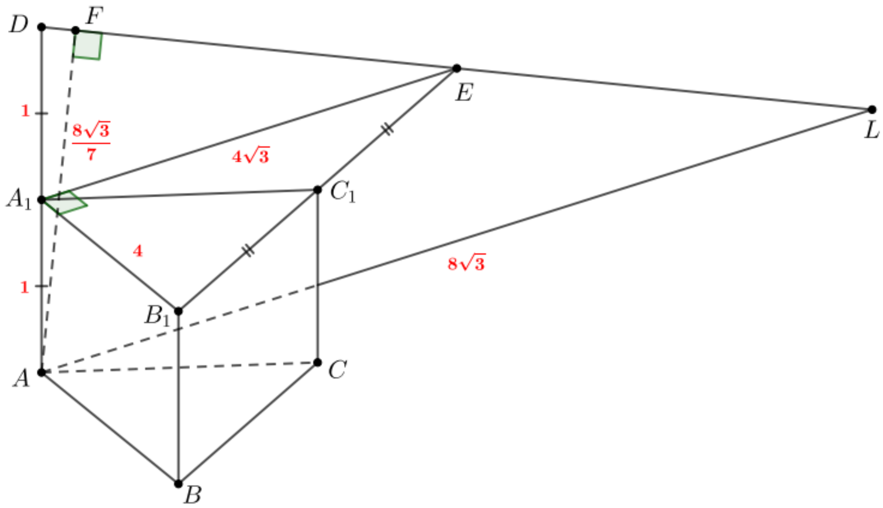
б) Пусть L — точка пересечения прямой DE и плоскости (ABC). Тогда отрезки AL и A_1E параллельны, так как лежат в параллельных плоскостях (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ соответственно.

Рассмотрим треугольник ADL в плоскости (ADL). Отрезок A_1E — средняя линия этого треугольника, значит, $AL = 2A_1E$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника A_1EB_1 :

$$A_1E = \sqrt{B_1E^2 - A_1B_1} = \sqrt{4B_1C_1^2 - A_1B_1^2} = \sqrt{3A_1B_1^2} = AB\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad AL = 8\sqrt{3}$$

Заметим, что $A_1B_1 \perp AA_1$, так как призма правильная, и $A_1B_1 \perp A_1E$, следовательно, $A_1B_1 \perp (ADL)$. Прямые $AB \parallel A_1B_1$, значит, $AB \perp (ADL)$.

Тогда расстояние между прямыми DE и AB равно расстоянию от точки A до прямой DE, то есть высоте AF прямоугольного треугольника ADL. Его катеты равны $AD = 2AA_1 = 2$ и $AL = 8\sqrt{3}$.



Тогда по теореме Пифагора его гипотенуза равна

$$DL = \sqrt{AD^2 + AL^2} = \sqrt{4 + 192} = \sqrt{196} = 14$$

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна

$$AF = \frac{AD \cdot AL}{DL} = \frac{2 \cdot 8\sqrt{3}}{14} = \frac{8\sqrt{3}}{7}$$

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1C_1 = C_1M$, а на продолжении отрезка B_1C за точку C отмечена точка N так, что $B_1C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и MN.

Ответ

б) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Решение

а) Рассмотрим треугольник A_1B_1M. В нем $A_1B_1 = 1$, $A_1M = 2A_1C_1 = 2\sqrt{2}$ и $\angle B_1A_1M = 45°$. Тогда по теореме косинусов:

$$B_1M^2 = A_1B_1^2 + A_1M^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1M \cdot \cos\angle B_1A_1M = 1 + 8 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

Отсюда $B_1M = \sqrt{5}$.

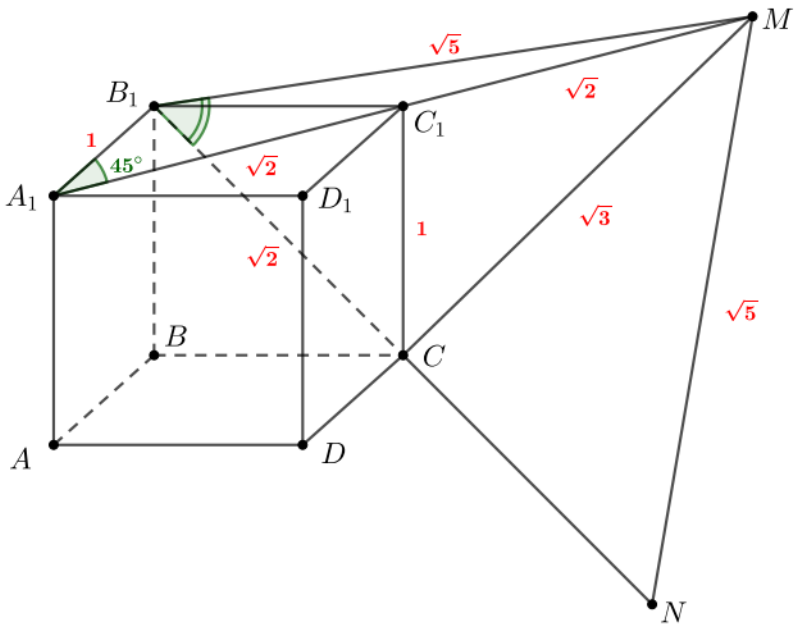
Рассмотрим треугольник B_1CM. В нем $B_1C = \sqrt{2}$, $B_1M = \sqrt{5}$ и $CM = \sqrt{CC_1^2 + C_1M^2} = \sqrt{3}$. Тогда по теореме косинусов:

$$CM^2 = B_1M^2 + B_1C^2 - 2B_1M \cdot B_1C \cdot \cos\angle MB_1C \quad \Rightarrow \quad \cos\angle MB_1C = \frac{2\sqrt{10}}{10}$$

Рассмотрим треугольник B_1MN. В нем $B_1M = \sqrt{5}$, $B_1N = 2B_1C = 2\sqrt{2}$ и $\cos\angle MB_1C = \frac{2\sqrt{10}}{10}$. Тогда по теореме косинусов:

$$MN^2 = B_1M^2 + B_1N^2 - 2B_1M \cdot B_1N \cdot \cos\angle MB_1C = 5 + 8 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{10} = 5$$

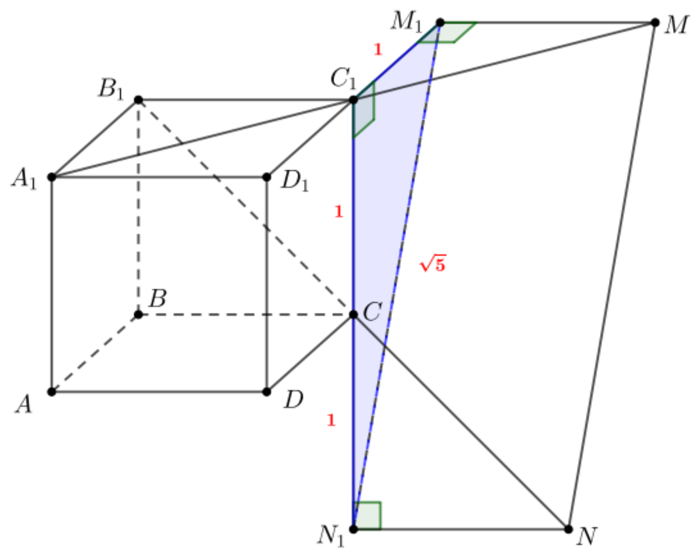
Отсюда $MN = \sqrt{5} = B_1M$.



б) Заметим, что $B_1C_1 \perp (CC_1D)$. Тогда проекцией прямой B_1C_1 на плоскость (CC_1D) является точка C_1.

Найдем проекцию MN на плоскость (CC_1D). Пусть точка M_1 — такая точка на продолжении отрезка C_1D_1 за точку C_1, что $C_1D_1 = C_1M_1$. Тогда M_1 — проекция точки M на (CC_1D), так как $A_1M_1MD_1$ — параллелограмм и $A_1D_1 \perp (CC_1D)$.

Пусть точка N_1 — такая точка на продолжении отрезка CC_1 за точку C, что $CC_1 = C_1N_1$. Тогда N_1 — проекция точки N на (CC_1D), так как $B_1N_1NC_1$ — параллелограмм и $B_1C_1 \perp (CC_1D)$.



Тогда по построению прямая B_1C_1 параллельна плоскости (MNN_1M_1) и искомое расстояние равно расстоянию между этими прямой и плоскостью. При этом перпендикуляр из точки C_1 к прямой M_1N_1 по построению перпендикулярен двум прямым плоскости (MNN_1M_1).

Тогда расстояние между прямыми B_1C_1 и MN равно расстоянию между точкой C_1 и прямой M_1N_1.

Рассмотрим треугольник $N_1C_1M_1$. В нем $C_1M_1 \perp C_1N_1$, $C_1M_1 = C_1D_1 = 1$ и $C_1N_1 = 2CC_1 = 2$. Значит, по теореме Пифагора $N_1M_1 = \sqrt{5}$. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна $\frac{1\cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Значит, расстояние между прямыми B_1C_1 и MN равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.