

Тренировочный вариант «Школково» №11
Полный видеоразбор варианта можно посмотреть [здесь!](#)



Ответы, решения и критерии оценивания

№1

Ответ: 35

№2

Ответ: 192

№3

Ответ: 0, 4

№4

Ответ: 0, 02

№5

Ответ: -9

№6

Ответ: 0, 5

№7

Ответ: 4

№8

Ответ: 50

№9

Ответ: 1

№10

Ответ: 16

№11

Ответ: 6, 75

№12

Ответ: а) $\frac{\pi k}{4}, \pm \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{65\pi}{24}; \frac{11\pi}{4}; \frac{67\pi}{24}; 3\pi; \frac{77\pi}{24}; \frac{13\pi}{4}; \frac{79\pi}{24}$

№13

Ответ: б) 10

№14

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (\log_5 3; 1)$

№15

Ответ: 620 изделий

№16

Ответ: б) $\frac{120}{13}$

№17

Ответ: $a \in \{1\}$

№18

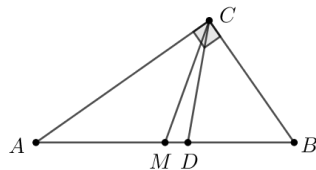
Ответ: а) Нет

б) 2, 3, 4, 5, 6, 7

в) 12

№1

Угол между биссектрисой CD и медианой CM , проведенными из вершины прямого угла C треугольника ABC , равен 10° . Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

**Ответ**

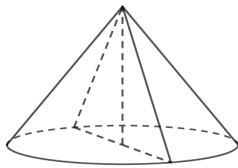
35

Решение

Так как CD — биссектриса, то $\angle ACD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle ACM = \angle ACD - \angle MCD = 45^\circ - 10^\circ = 35^\circ$. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два равнобедренных треугольника, то есть $\triangle ACM$ — равнобедренный и $AM = CM$. Следовательно, $\angle CAM = \angle ACM = 35^\circ$. Так как градусная мера меньшего угла прямоугольного треугольника не больше 45° , то $\angle A = \angle CAM = 35^\circ$ и есть меньший угол $\triangle ABC$.

№2

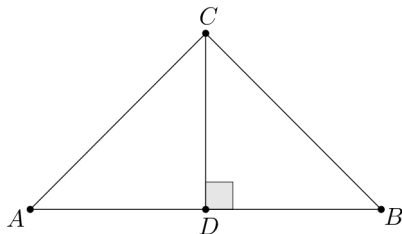
Диаметр основания конуса равен 32, а длина образующей равна 20. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

**Ответ**

192

Решение

Пусть AB — диаметр основания конуса, C — вершина конуса, D — центр основания конуса. Тогда осевое сечение конуса представляет собой равнобедренный $\triangle ABC$ с основанием AB и высотой CD . Тогда $BD = 16$, $BC = 20$, следовательно, по теореме Пифагора $CD = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.



Следовательно, площадь осевого сечения равна

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = 192.$$

№3

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет четной и меньше 7?

Ответ

0,4

Решение

Четных цифр от 0 до 7 — четыре: 0, 2, 4 и 6. Следовательно, вероятность равна

$$\frac{4}{10} = 0,4$$

№4

Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последние 2 раза промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ

0,02

Решение

Если вероятность попадания в мишень равна 0,8, то вероятность промахнуться равна $1 - 0,8 = 0,2$. Следовательно, вероятность 3 раза попасть в мишень и 2 раза промахнуться равна

$$0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02048.$$

После округления до сотых получаем 0,02.

№5

Решите уравнение $x = \frac{8x + 36}{x + 13}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ

−9

Решение

Уравнение равносильно

$$\begin{cases} x(x + 13) = 8x + 36 \\ x + 13 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 36 = 0 \\ x \neq -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 4 \end{cases}$$

Следовательно, наименьший корень уравнения равен $x = -9$.

№6

Найдите значение выражения $2^{4\sqrt{10}-3} \cdot 2^{1-3\sqrt{10}} : 2^{\sqrt{10}-1}$.

Ответ

0,5

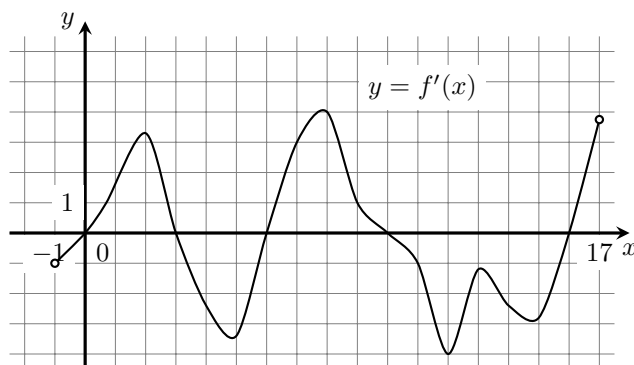
Решение

Пользуясь формулами $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ и $a^x : a^y = a^{x-y}$, получаем

$$2^{4\sqrt{10}-3} \cdot 2^{1-3\sqrt{10}} : 2^{\sqrt{10}-1} = 2^{4\sqrt{10}-3+1-3\sqrt{10}-\sqrt{10}+1} = 2^{-1} = 0,5$$

№7

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-1; 17)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

**Ответ**

4

Решение

Если производная $y = f'(x)$ положительна на промежутке $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ на этом промежутке возрастает. Следовательно, нам необходимо определить по графику те промежутки, которые соответствуют частям графика $y = f'(x)$, находящимся выше оси Ox . Это промежутки $(0; 3)$, $(6; 10)$ и $(16; 17)$. Наибольшую длину имеет промежуток $(6; 10)$ и длина его равна 4.

№8

При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, изменяется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура в градусах Цельсия. При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ

50

Решение

Перепишем формулу в виде:

$$l - l_0 = \alpha l_0 t$$

По условию рельс удлинился на 6 мм, то есть на $6 \cdot 10^{-3}$ м, следовательно, $l - l_0 = 6 \cdot 10^{-3}$. Тогда получаем

$$6 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot t \Leftrightarrow t = 50.$$

№9

Лодка в 5:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от пункта А. Пробыв 2 часа в пункте В, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 23:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 4 км/ч.

Ответ

1

Решение

Пусть v км/ч — скорость течения. Заметим, что если лодка проплыла от пункта А в пункт В и обратно, то она ровно один раз плыла по течению и один раз — против течения. Составим таблицу:

	S	v	t
против течения	30	$4 - v$	$\frac{30}{4-v}$
по течению	30	$4 + v$	$\frac{30}{4+v}$

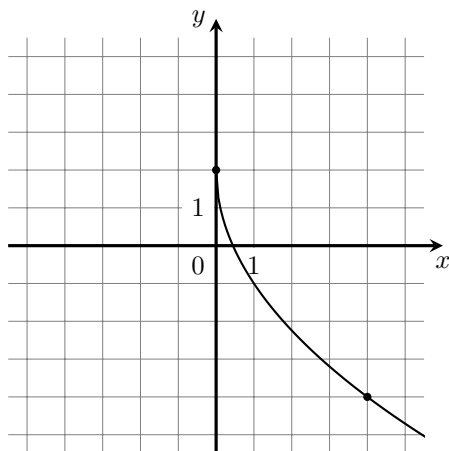
На путь туда и обратно, а также на остановку, лодка потратила $23 - 5 = 18$ часов. Так как остановка длилась 2 ч, то на путь туда и обратно лодка потратила 16 часов. Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{30}{4-v} + \frac{30}{4+v} = 16 \Leftrightarrow 30 \cdot 8 = 16 \cdot (16 - v^2) \Leftrightarrow v^2 = 1 \Leftrightarrow v = 1$$

Следовательно, скорость течения равна 1 км/ч.

№10

На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x} + p$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -10$.

**Ответ**

16

Решение

График функции $f(x)$ проходит через точки $(0; 2)$ и $(4; -4)$. Значит, координаты этих точек обращают уравнение функции $f(x)$ в верное равенство. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 = f(0) \\ -4 = f(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k\sqrt{0} + p \\ -4 = k\sqrt{4} + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ -4 = 2k + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ k = -3 \end{cases}$$

Таким образом, мы полностью восстановили уравнение функции:

$$f(x) = -3\sqrt{x} + 2$$

Тогда

$$f(x) = -10 \Leftrightarrow -3\sqrt{x} + 2 = -10 \Leftrightarrow -3\sqrt{x} = -12 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$$

№11

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 3x + 9$ на отрезке $[0, 25; 30]$.

Ответ

6, 75

Решение

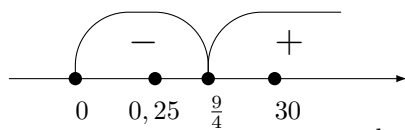
Исследуем функцию на области определения $x \geq 0$. Найдем ее производную:

$$y' = \left(\frac{4}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 3x + 9 \right)' = 2x^{\frac{1}{2}} - 3 = 2\sqrt{x} - 3$$

Нули производной:

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков.



Таким образом, $x = \frac{9}{4}$ — точка минимума, и как раз в ней функция принимает свое наименьшее значение. Оно равно

$$y\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{27}{4} = 6,75$$

№12

а) Решите уравнение $\cos 2x \sin 2x \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4} \cos \left(8x - \frac{3\pi}{2} \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, лежащие на отрезке $\left[\frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3} \right]$.

Ответ

а) $\frac{\pi k}{4}, \pm \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{65\pi}{24}; \frac{11\pi}{4}; \frac{67\pi}{24}; 3\pi; \frac{77\pi}{24}; \frac{13\pi}{4}; \frac{79\pi}{24}$

Решение

а) Воспользуемся в левой части формулой двойного аргумента для синуса $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$:

$$\frac{1}{2} \sin 4x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} (-\sin 8x) \Leftrightarrow$$

$$2 \sin 4x \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 4x (2 \cos 4x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) Отберем корни неравенствами.

Для серии решений $x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{8\pi}{3} \leq \frac{\pi k}{4} \leq \frac{10\pi}{3} \Leftrightarrow 10 \frac{2}{3} \leq k \leq 13 \frac{1}{3} \Rightarrow k = 11; 12; 13 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{4}; 3\pi; \frac{13\pi}{4}$$

Для серии решений $x = -\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{8\pi}{3} \leq -\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} \leq \frac{10\pi}{3} \Leftrightarrow 5 \frac{3}{4} \leq k \leq 7 \frac{1}{12} \Rightarrow k = 6; 7 \Rightarrow x = \frac{67\pi}{24}; \frac{79\pi}{24}$$

Для серии решений $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{8\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} \leq \frac{10\pi}{3} \Leftrightarrow 4 \frac{11}{12} \leq k \leq 6 \frac{1}{4} \Rightarrow k = 5; 6 \Rightarrow x = \frac{65\pi}{24}; \frac{77\pi}{24}$$

Следовательно, на отрезке $\left[\frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3} \right]$ лежат корни $\frac{65\pi}{24}; \frac{11\pi}{4}; \frac{67\pi}{24}; 3\pi; \frac{77\pi}{24}; \frac{13\pi}{4}; \frac{79\pi}{24}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Комментарий

Ответ в задании с развёрнутым ответом – это решение и вывод (называемый ответом).

№13

Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка M — середина ребра AA_1 . Плоскость α проходит через ребро BB_1 и перпендикулярна прямой CM .

а) Докажите, что одна из диагоналей грани AA_1C_1C равна одной из ее сторон.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если α делит ребро AC в отношении $1 : 5$, считая от точки A , $AC = 20$ и $AA_1 = 32$.

Ответ

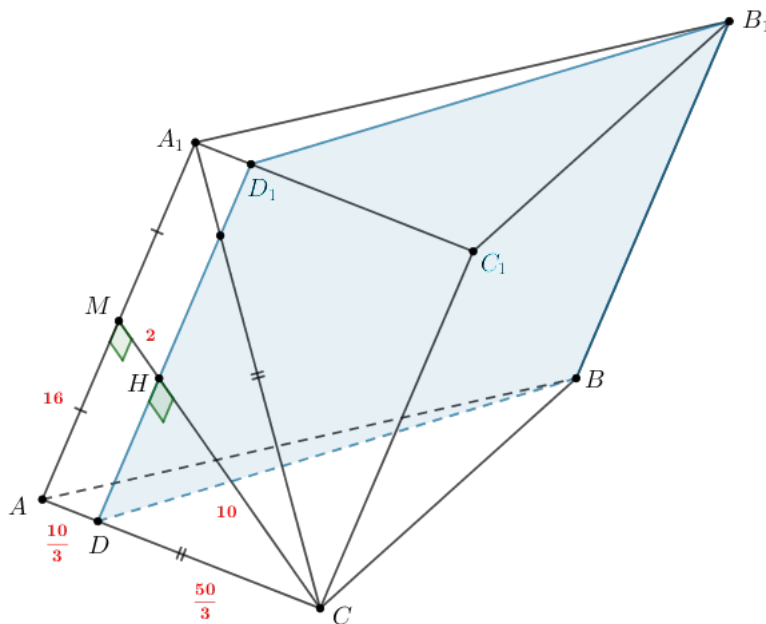
б) 10

Решение

а) По условию $CM \perp \alpha$. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости, в частности, $CM \perp BB_1$.

Так как $ABCA_1B_1C_1$ — призма, то $AA_1 \parallel BB_1$, следовательно, $CM \perp AA_1$.

Рассмотрим треугольник AA_1C в одноименной плоскости. Отрезок CM является его медианой и высотой, значит, $\triangle AA_1C$ — равнобедренный, то есть $AC = A_1C$. Таким образом, в грани AA_1C_1C диагональ A_1C равна стороне AC .



б) Пусть плоскость α пересекает прямую CM в точке H , прямую AC — в точке D , прямую A_1C_1 — в точке D_1 . Заметим, что все эти три точки лежат в грани AA_1C_1C , значит, они лежат на прямой пересечения грани AA_1C_1C плоскостью α .

Нам нужно найти расстояние от точки C до плоскости α , то есть длину CH , так как $CM \perp \alpha$, а H — точка пересечения CM и α .

По условию $AD : DC = 1 : 5$ и $AC = 20$, следовательно, $AD = \frac{10}{3}$ и $DC = \frac{50}{3}$. По условию $CM \perp \alpha$, значит, $CM \perp DD_1$. Тогда $AA_1 \parallel DD_1$.

Рассмотрим треугольники AMC и DHC . Они подобны, так как $\angle ACM$ — общий и $\angle MAC = \angle HDC$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми AA_1 и DD_1 и секущей AC . Тогда

$$\frac{CH}{CM} = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{50}{3}}{20} = \frac{5}{6} \Rightarrow CH = \frac{5}{6}CM$$

Найдем CM . По условию M — середина AA_1 , значит, $AM = \frac{1}{2}AA_1 = 16$. Треугольник AMC — прямоуголь-

ный, тогда по теореме Пифагора:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 \Rightarrow CM^2 = AC^2 - AM^2 = 20^2 - 16^2 = 4^2 \cdot (5^2 - 4^2) = 4^2 \cdot 3^2 \Rightarrow CM = 12$$

Теперь можем найти длину CH :

$$CH = \frac{5}{6}CM = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10$$

Содержание критерия	Балл
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

№14

Решите неравенство

$$(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 + 8 \cdot 5^x < 2 \cdot 25^x + 15$$

Ответ

$$(-\infty; 0) \cup (\log_5 3; 1)$$

Решение

Неравенство равносильно

$$(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 - 2(25^x - 4 \cdot 5^x) - 15 < 0$$

Сделаем замену $t = 25^x - 4 \cdot 5^x$. Тогда неравенство примет вид

$$t^2 - 2t - 15 < 0 \Leftrightarrow (t + 3)(t - 5) < 0 \Leftrightarrow -3 < t < 5$$

Сделаем замену $5^x = y$. Тогда $t = y^2 - 4y$. Перейдем к переменной y :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y^2 - 4y < 5 \\ y^2 - 4y > -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (y + 1)(y - 5) < 0 \\ (y - 1)(y - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < y < 5 \\ y > 3 \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < y < 1 \\ 3 < y < 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} -1 < 5^x < 1 \\ 3 < 5^x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \log_5 3 < x < 1 \end{cases}$$

Тогда окончательно получаем $x \in (-\infty; 0) \cup (\log_5 3; 1)$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением/включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤» или наоборот. Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то выставляется оценка «0 баллов».

№15

На каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 деталь А или 3 детали В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на третий комбинат, где собирают изделие, для изготовления которого нужна или 1 деталь А, или 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать третий комбинат за смену?

Ответ

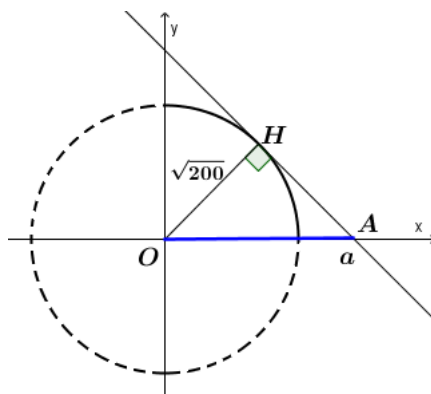
620 изделий

Решение

Заметим, что на первом комбинате производительность труда одного рабочего в три раза выше при изготовлении детали В, чем при изготовлении детали А, и поскольку детали А и В взаимозаменяемы, то поэтому всех рабочих целесообразно направить на изготовление деталей В. Тогда получим количество деталей В, изготовленных на первом комбинате $200 \cdot 3 = 600$ шт.

На втором комбинате рабочих надо распределить таким образом, чтобы количество изготавливаемых деталей было максимальным. Пусть x — количество деталей А и на их изготовление потребуется x^2 человеко-смен, y — количество деталей В и на их изготовление потребуется y^2 человеко-смен, тогда $x^2 + y^2 = 200$, так как на втором комбинате тоже работает 200 человек. Надо найти наибольшее значение выражения $(x + y)$ — количество изготавливаемых деталей на втором комбинате.

Решим задачу графически. Пусть $x + y = a$, тогда $y = -x + a$. Таким уравнением задаётся множество всех прямых, параллельных биссектрисе II и IV четвертей графика. Уравнение $x^2 + y^2 = 200$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{200}$.



Наибольшее значение a достигается, когда прямая $x + y = a$ касается окружности. Треугольник OHA — прямоугольный и равнобедренный:

$$OA = \sqrt{2}OH = \sqrt{200} \cdot \sqrt{2} = 20$$

Получили, что на втором комбинате изготавливают максимальное количество деталей А и В в количестве 20 шт.

Значит, в сумме рабочие будут делать $600 + 20 = 620$ деталей за смену и поставлять их на комбинат, чтобы собрать 620 изделий.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Подробнее: 1 балл выставляется в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи, но именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п. Предъявленный текст должен включать описание того, как построена модель.

№16

В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На продолжениях сторон AD и CD за точку D выбраны точки M и N соответственно, причем $AN = AD$ и $CM = CD$.

а) Докажите, что $BN = BM$.

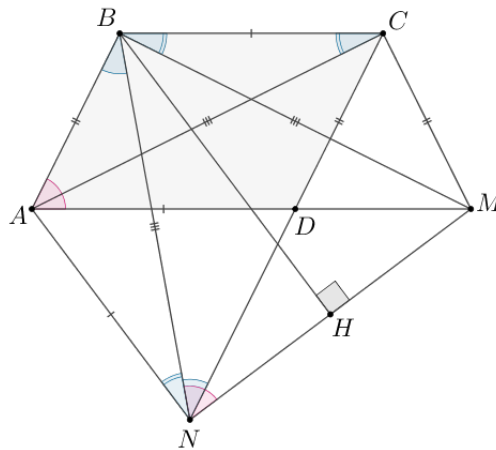
б) Найдите MN , если $AC = 5$, $\sin \angle BAD = \frac{5}{13}$.

Ответ

б) $\frac{120}{13}$

Решение

а) Заметим, что по построению $NABC$ и $ABCM$ — равнобедренные трапеции, следовательно, диагонали каждой трапеции равны. Тогда у трапеции $NABC$ равны BN и AC , у трапеции $ABCM$ равны AC и BM . Следовательно, $BN = BM$. Что и требовалось доказать.



б) Так как $NABC$ и $ABCM$ — равнобедренные трапеции, следовательно,

$$\angle ANC = \angle BCD = \angle BAD = \angle CMA$$

Обозначим $\phi = \angle ANC$, $\alpha = \angle BNC$, $\beta = \angle ANB$. Тогда $\angle ABN = \alpha$, $\angle BCA = \angle MBC = \beta$. Заметим, что $\alpha + \beta = \phi$.

$\triangle NBM$ — равнобедренный, причем

$$\angle NBM = (180^\circ - \phi) - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 2\phi$$

Следовательно, $\angle BNM = \phi$. Проведем высоту $BH \perp MN$. Тогда BH также является и медианой. Из прямоугольного треугольника BNH имеем:

$$\frac{12}{13} = \cos \phi = \frac{NH}{BN} = \frac{NH}{5}$$

Таким образом,

$$NH = \frac{60}{13} \Rightarrow MN = \frac{120}{13}$$

Содержание критерия	Балл
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

№17

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x-2}{ax^2 - (a^2+1)x + a} \geq 0$$

является некоторый луч.

Ответ

$$a \in \{1\}$$

Решение

Так как мы рассматриваем данное неравенство только при $a > 0$, то знаменатель представляет собой квадратичный трехчлен от x . Заметим, что по теореме Виета его корнями являются числа $x = \frac{1}{a}$ и $x = a$, так как

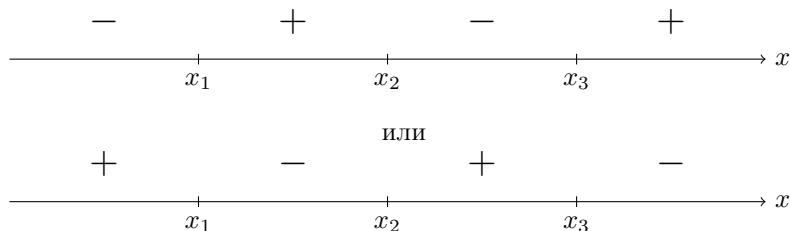
$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = a + \frac{1}{a} \end{cases}$$

Следовательно, неравенство можно переписать в виде:

$$\frac{x-2}{a(x-\frac{1}{a})(x-a)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x-\frac{1}{a})(x-a)} \geq 0$$

Если решать данное неравенство методом интервалов, то необходимо отметить нули числителя и знаменателя на вещественной прямой, они образуют промежутки, на каждом из которых левая часть неравенства принимает значения одного знака. Далее необходимо найти знак на каждом из таких промежутков. Тогда решением неравенства будут те x , над которыми будет стоять знак «+».

Заметим, что если все три корня различны: $2 \neq \frac{1}{a} \neq a$, то картинка будет выглядеть одним из двух способов:



Видим, что в любом случае решение неравенства будет представлять собой объединение луча и отрезка/полуинтервала/интервала. Следовательно, этот случай нам не подходит.

Пусть $\frac{1}{a} = a$. Тогда $a = 1$. Следовательно, неравенство имеет вид

$$\frac{x-2}{(x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Получили луч, следовательно, этот случай нам подходит.

Пусть $\frac{1}{a} = 2$. Тогда $a = \frac{1}{2}$. Неравенство примет вид

$$\frac{x-2}{(x-2)(x-\frac{1}{2})} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty).$$

Этот случай нам не подходит.

Пусть $a = 2$. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{x-2}{(x-2)(x-\frac{1}{2})} \geq 0$$

Получили тот же случай, что мы рассмотрели выше. Он нам не подходит.

Таким образом, единственное положительное значение параметра a , которое нам подходит, это $a = 1$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено искомое значение параметра, но допущена одна вычислительная ошибка (описка)	3
С помощью верного рассуждения получено значение параметра (возможно неверное из-за одной вычислительной ошибки), но решение недостаточно обосновано (например, не обосновано наличие ровно одного значения a или не рассмотрен один из случаев $a = 2$ или $a = 0,5$)	2
Задача сведена к методу интервалов или исследованию графика, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

№18

а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Ответ

а) Нет

б) 2, 3, 4, 5, 6, 7

в) 12

Решение

Пусть a — первый член прогрессии, d — ее разность. Допустим, не умаляя общности, сама последовательность возрастающая. Тогда a и d — натуральные числа.

а) Пусть последовательность, описанная в условии, существует. Заметим, что пятый член такой арифметической прогрессии будет равен $a + 4d$. Тогда сумма первого и пятого членов будет равна $2a + 4d$.

Наибольший и наименьший члены — последний и первый члены соответственно. Таким образом, их сумма равна $2a + 4d$.

По условию $2a + 4d = 99$, но $2a + 4d$ — четное число. Противоречие. Значит, такая последовательность не существует.

б) Заметим, что шестой член этой арифметической прогрессии будет равен $a + 5d$. Тогда сумма первого и шестого членов будет равна $2a + 5d$.

Наибольший и наименьший члены — последний и первый члены соответственно. Таким образом, их сумма равна $2a + 5d$.

Значит, $2a + 5d = 9$. Заметим, что d — натуральное число, значит, $d = 1$. Тогда $a = 2$. Значит, 2, 3, 4, 5, 6, 7 — искомая последовательность.

в) Среднее арифметическое членов арифметической прогрессии равно среднему арифметическому его крайних чисел. Пусть в данной арифметической прогрессии n членов. Тогда ее первый член равен a , последний — $a + (n - 1)d$. Значит,

$$\frac{2a + (n - 1)d}{2} = 6,5 \Rightarrow 2a + (n - 1)d = 13 \Rightarrow n = \frac{13 - 2a}{d} + 1$$

a — натуральное число, поэтому $2a \geq 2$. Значит,

$$13 - 2a \leq 13 - 2 = 11$$

Таким образом,

$$n = \frac{13 - 2a}{d} + 1 \leq \frac{11}{d} + 1$$

d — натуральное число, поэтому $d \geq 1$. Значит,

$$\frac{11}{d} \leq \frac{11}{1} = 11$$

Значит,

$$n \leq \frac{11}{d} + 1 \leq 11 + 1 = 12$$

Поэтому в такой последовательности может быть не больше 12 членов.

При этом существует последовательность, состоящая из 12 членов, со средним арифметическим членов, равным 6,5. Это последовательность натуральных чисел от 1 до 12:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12}{12} = \frac{13 \cdot 6}{12} = 6,5$$

Содержание критерия	Балл
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в пункте а); — обоснованное решение в пункте б); — искомая оценка в пункте в); — пример в пункте в), обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4