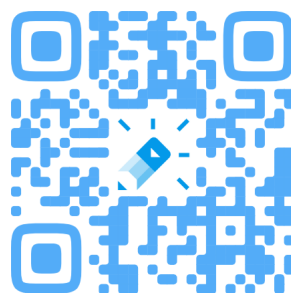


ВСЁ для первой части ЕГЭ по математике от «Школково»

Ссылки на разборы всех задач файла:



Стрим по №4,5,6,7,8,12



Стрим по №1,2,3,9,10,11

Содержание

№1. Планиметрия	3
№1. Планиметрия. Теория	3
№1. Планиметрия. Задачи	12
№1. Планиметрия. Ответы	19
№2. Векторы	20
№2. Векторы. Теория	20
№2. Векторы. Задачи	25
№2. Векторы. Ответы	28
№3. Стереометрия	29
№3. Стереометрия. Теория	29
№3. Стереометрия. Задачи	30
№3. Стереометрия. Ответы	37
№4,5. Теория вероятностей	38
№4,5. Теория по вероятностям	38
№4. Теория вероятностей. Задачи	43
№4. Теория вероятностей. Ответы	44
№5. Теория вероятностей. Задачи	45
№5. Теория вероятностей. Ответы	47
№6,7. Уравнения и значения выражений	48
№6,7. Уравнения и значения выражений. Теория	48
№6. Уравнения. Задачи	54
№6. Уравнения. Ответы	56
№7. Значения выражений. Задачи	57
№7. Значения выражений. Ответы	59

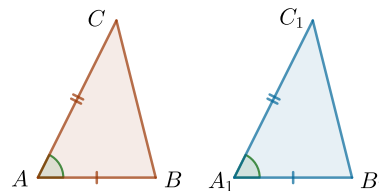
№8,12. Производная и исследование функции	60
№8,12. Производная и исследование функции. Теория	60
№8. Производная. Задачи	64
№8. Производная. Ответы	68
№12. Исследование функции. Задачи	69
№12. Исследование функции. Ответы	70
№9. Прикладные задачи	71
№9. Прикладные задачи	71
№9. Прикладные задачи. Ответы	73
№10. Текстовые задачи	74
№10. Текстовые задачи. Теория	74
№10. Текстовые задачи. Задачи	76
№10. Текстовые задачи. Ответы	78
№11. Графики	79
№11. Графики. Теория	79
№11. Графики. Задачи	91
№11. Графики. Ответы	101

№1. Планиметрия. Теория

Признаки равенства треугольников

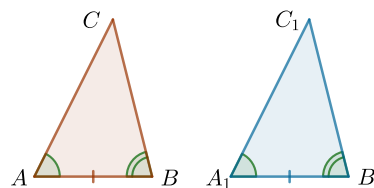
Первый признак (по двум сторонам и углу между ними)

Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



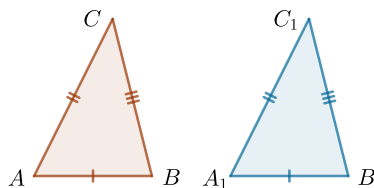
Второй признак (по стороне и двум прилежащим к ней углам)

Если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



Третий признак (по трем сторонам)

Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



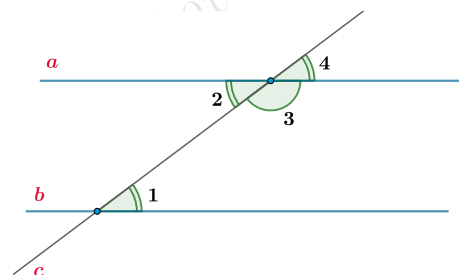
Свойства и признаки параллельных прямых

Если $a \parallel b$ и c — секущая, то

1. $\angle 1 = \angle 2$
2. $\angle 1 = \angle 4$
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

$a \parallel b$ при секущей c , если:

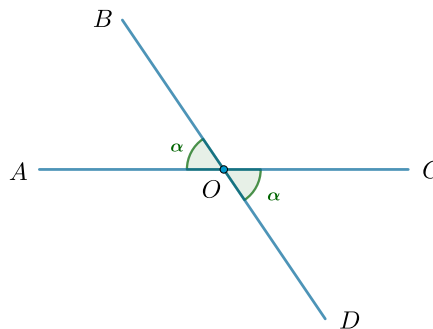
1. $\angle 1 = \angle 2$
2. $\angle 1 = \angle 4$
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$



Вертикальные углы

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

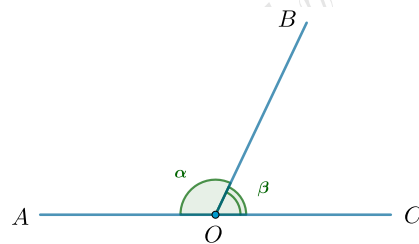
$$\angle AOB = \angle COD$$



Смежные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями друг друга, называются смежными. Сумма смежных углов равна 180° .

$$\angle AOB + \angle BOC = \alpha + \beta = 180^\circ$$



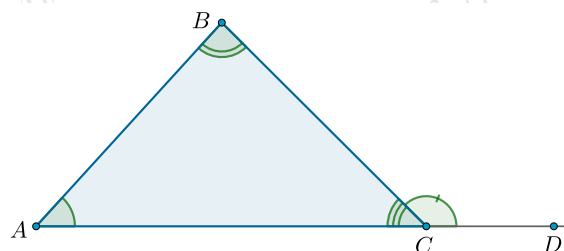
Сумма углов треугольника, внешний угол

Сумма углов треугольника равна 180° .

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$$



Обобщенная теорема Фалеса

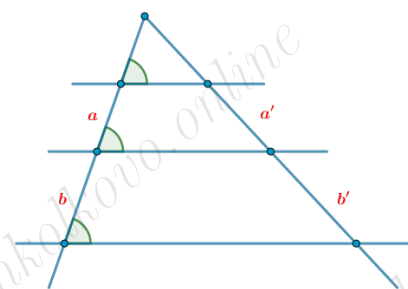
Прямая теорема Фалеса

Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки:

$$a : b = a' : b'$$

Обратная теорема Фалеса

Если прямые отсекают пропорциональные отрезки на сторонах угла, то эти прямые параллельны.



Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

1. Средняя линия треугольника равна половине третьей стороны и параллельна ей, то есть

$$MN = \frac{1}{2}AC \quad \text{и} \quad MN \parallel AC$$

2. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный ему треугольник:

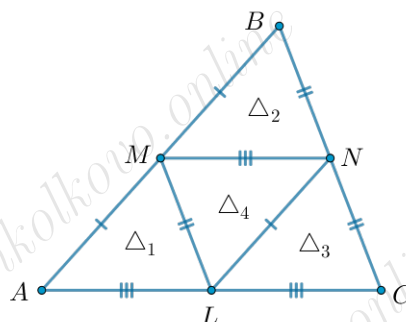
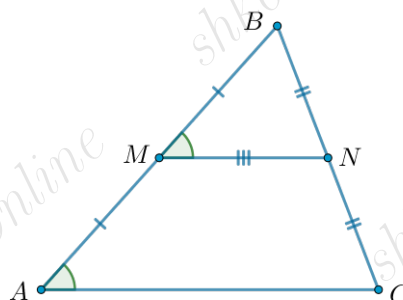
$$\triangle MBN \sim \triangle ABC$$

3. Средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника:

$$\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = \triangle_4$$

Следовательно, площади этих треугольников равны:

$$S_{\triangle_1} = S_{\triangle_2} = S_{\triangle_3} = S_{\triangle_4}$$

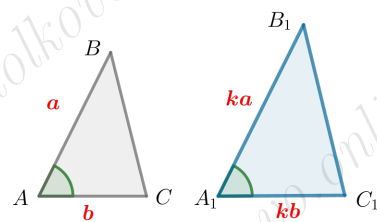


Признаки подобия треугольников

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а стороны, лежащие напротив равных углов, относятся друг к другу с одним и тем же коэффициентом.

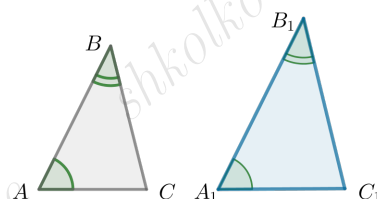
По отношению двух сторон и углу между ними

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны, то такие треугольники подобны.



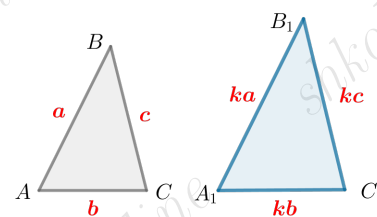
По двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



По отношению трех сторон

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Медиана, биссектриса и высота треугольника

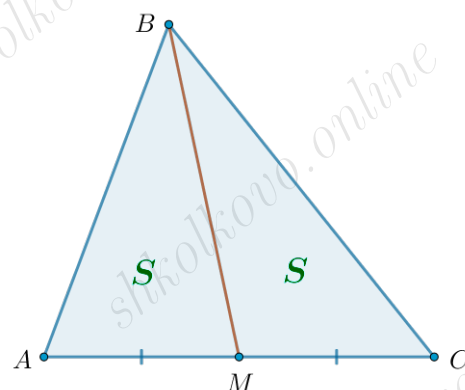
Медиана треугольника и площади

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника. Формула длины медианы треугольника:

$$BM = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}$$

Медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади (равновеликих):

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$$



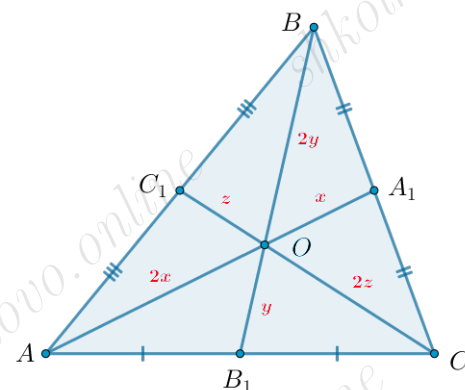
Точка пересечения медиан

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$$

При этом площади шести образовавшихся треугольников равны:

$$S_{AOB_1} = S_{COB_1} = S_{COA_1} = S_{BOA_1} = S_{BOC_1} = S_{AOC_1}$$



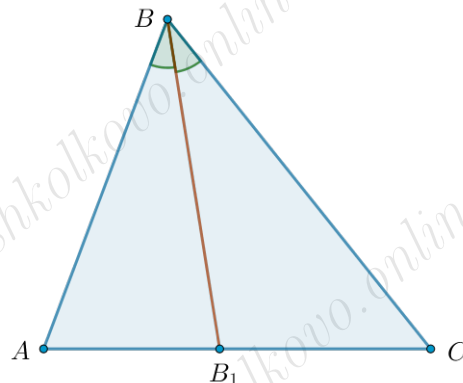
Биссектриса треугольника и ее главное свойство

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника.

Напомним, что биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.

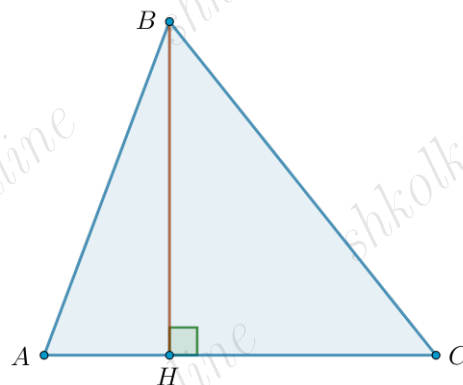
Пусть BB_1 — биссектриса в треугольнике ABC . Тогда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C}$$



Высота треугольника

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.



Прямоугольный треугольник и его свойства

Что такое прямоугольный треугольник?

Прямоугольный треугольник — это треугольник, в котором один угол прямой, то есть 90° : $\angle C = 90^\circ = \angle A + \angle B$.

Гипотенуза — это сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла.

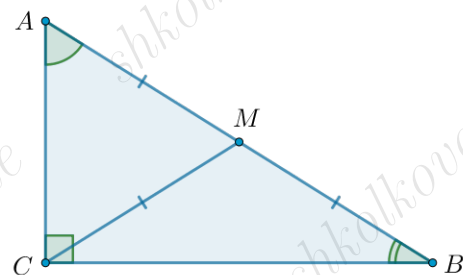
Катеты — это стороны прямого угла в прямоугольном треугольнике

Медиана прямоугольного треугольника

Медиана треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$CM = \frac{1}{2}AB = AM = MB$$

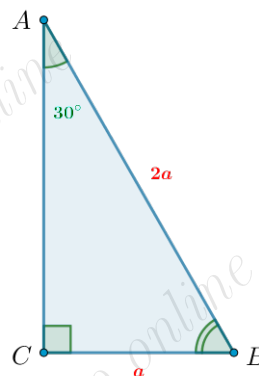
Таким образом, получаются два равнобедренных треугольника: $\triangle AMC$ и $\triangle CMB$.



Прямоугольный треугольник с углом в 30 градусов

Катет, лежащий против угла 30° , равен половине гипотенузы.

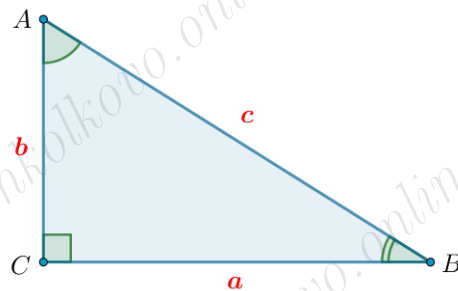
Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла 30° .



Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

1. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины прилежащего к этому углу катета к длине гипотенузы.

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

2. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины противолежащего этому углу катета к длине гипотенузы.

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

3. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему.

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

Параллелограмм

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Признаки параллелограмма.

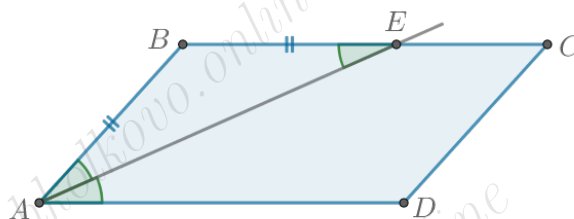
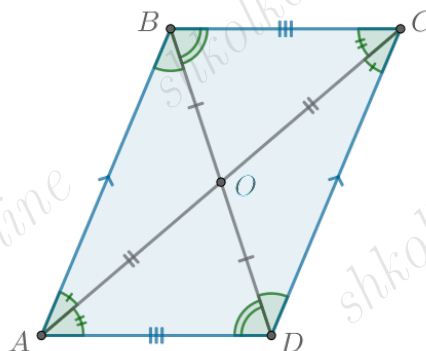
Четырехугольник является параллелограммом, если

1. противоположные стороны попарно равны.
2. две стороны равны и параллельны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Свойства параллелограмма:

1. противоположные стороны попарно равны.
2. противоположные углы попарно равны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Биссектриса AE параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть $AB = BE$ и $\angle BAE = \angle DAE = \angle BEA$.



Ромб

Ромб — четырехугольник, у которого все стороны равны. Таким образом, всякий ромб является параллелограммом. Соответственно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

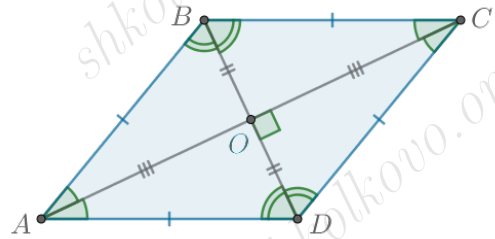
Признаки ромба.

Параллелограмм является ромбом, если

1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.

Свойства ромба:

1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.



Трапеция

Трапеция — это выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

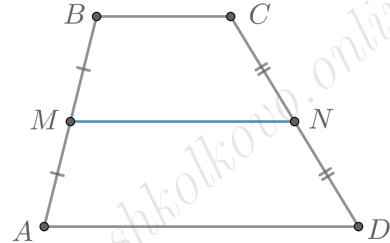
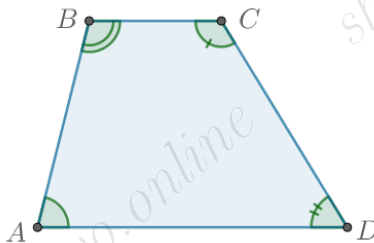
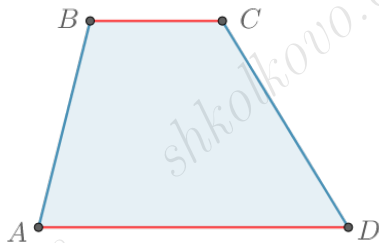
Параллельные стороны называются основаниями, а две другие — боковыми.

Сумма углов при боковой стороне равна 180° :

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ.$$

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Она параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме:

$$MN = \frac{1}{2} (AD + BC).$$



Равнобедренная трапеция

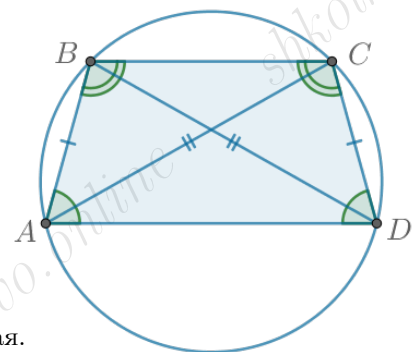
Если боковые стороны трапеции равны, то она равнобедренная.

Свойства равнобедренной трапеции:

1. В равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.
2. В равнобедренной трапеции длины диагоналей равны.
3. Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

Признаки равнобедренной трапеции:

1. Если в трапеции равны углы при основании, то она равнобедренная.
2. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
3. Если трапецию можно вписать в окружность, то она равнобедренная.

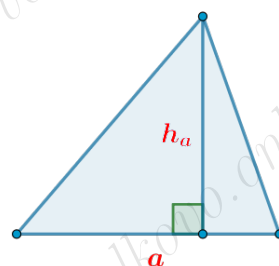


Площади

Площадь треугольника

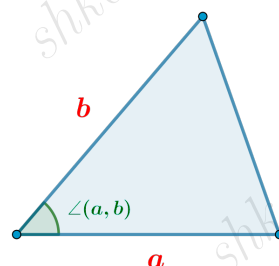
Площадь треугольника равна полупроизведению основания на высоту:

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$



Площадь треугольника равна полупроизведению сторон на синус угла между ними:

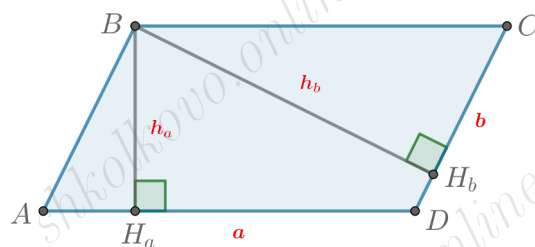
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \angle(a, b)$$



Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению высоты и стороны, к которой она проведена:

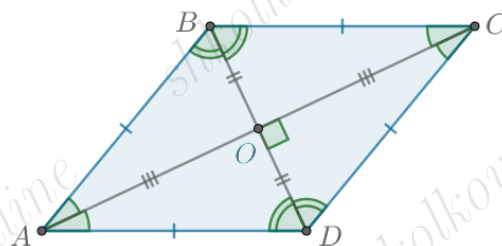
$$S = AD \cdot BH_a = a \cdot h_a = CD \cdot BH_b = b \cdot h_b$$



Площадь ромба

Так как ромб — это параллелограмм, то его площадь можно найти с помощью любой формулы, справедливой для параллелограмма. Следовательно, формула площади через диагонали примет следующий вид:

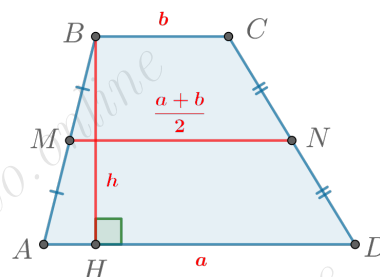
$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$$



Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению высоты и средней линии (полусуммы оснований):

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Окружности и вписанные четырехугольники

Центральные и вписанные углы

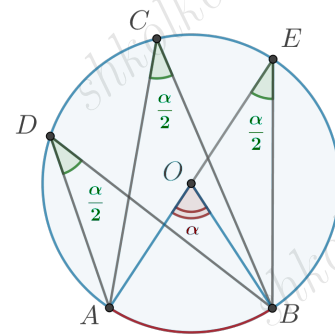
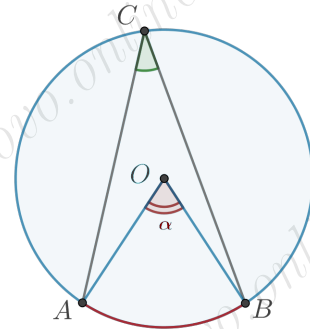
Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности. Пусть точки A и B лежат на окружности с центром в точке O . Тогда угол AOB — центральный.

Градусная мера дуги

Пусть $\angle AOB = \alpha$. Градусной мерой дуги AB будем называть градусную меру центрального угла, который опирается на эту дугу. Тогда $\overset{\frown}{AB} = \alpha$.

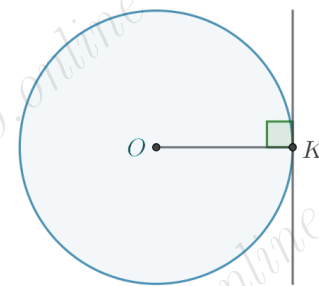
Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают эту окружность. Угол ACB — вписанный.

Все вписанные углы, опирающиеся на дугу AB , равны половине центрального угла, опирающегося на эту дугу.

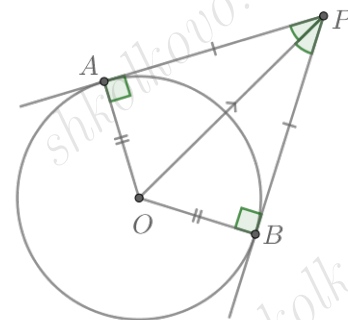


Окружность и касательные

Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.



Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Вписанный четырехугольник

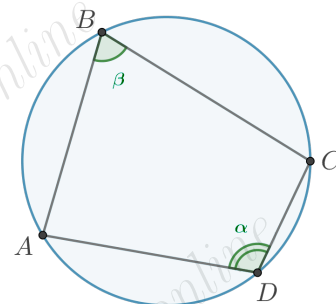
Вписанный четырехугольник — это четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности.

Свойство №1

Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180° .

Признак №1

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то вокруг него можно описать окружность.

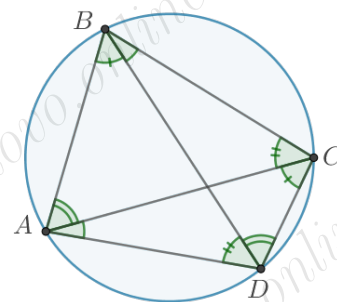


Свойство №2

Если четырехугольник вписанный, то углы, опирающиеся на одну сторону, равны.

Признак №2

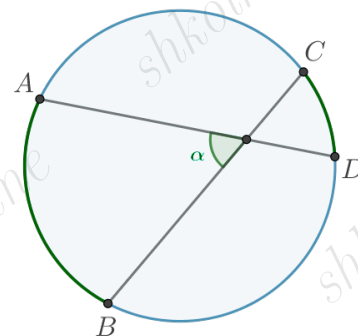
Если в четырехугольнике углы, опирающиеся на одну сторону, равны, то он вписанный.



Теоремы о хордах, касательных и секущих

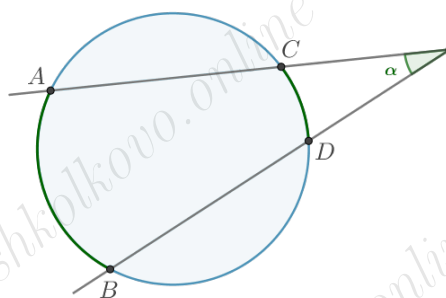
Угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2} (\widetilde{AB} + \widetilde{CD})$$

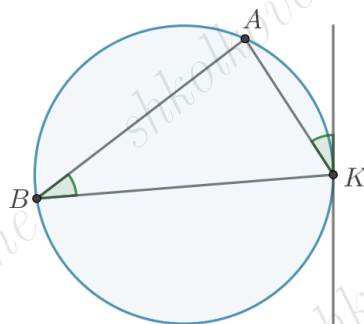


Угол между секущими, проведенными из одной точки к окружности, равен полуразности дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2} (\widetilde{AB} - \widetilde{CD})$$



Угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, отсеченную хордой.

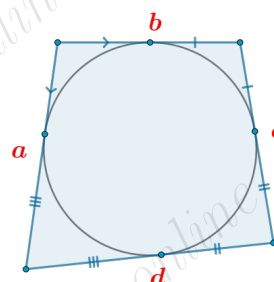


Описанный четырехугольник

Центр вписанной в четырехугольник (многоугольник) окружности лежит на пересечении биссектрис его углов.

1. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.
2. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

$$a + c = b + d$$

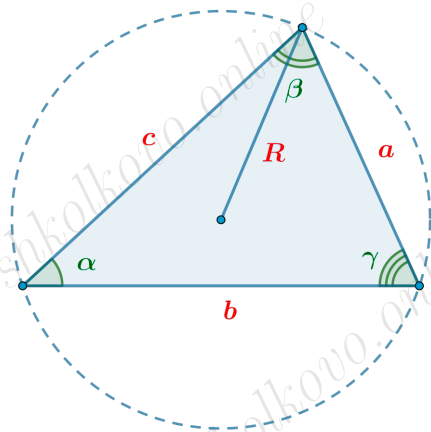


Теорема синусов

Для произвольного треугольника верно

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

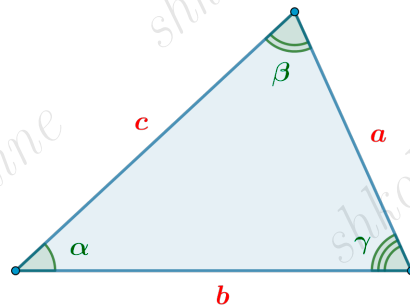
где a , b и c — стороны треугольника, α , β и γ — соответственно противолежащие им углы, а R — радиус окружности, описанной около треугольника.



Теорема косинусов

Для треугольника со сторонами a , b и c и углом α , противолежащим стороне a , справедливо соотношение:

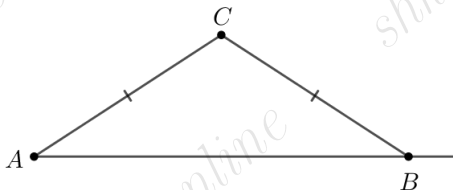
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$



№1. Планиметрия. Задачи

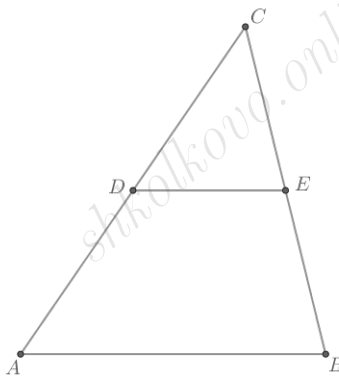
№1.1 #83430

В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Внешний угол при вершине B равен 107° . Найдите угол C .
Ответ дайте в градусах.



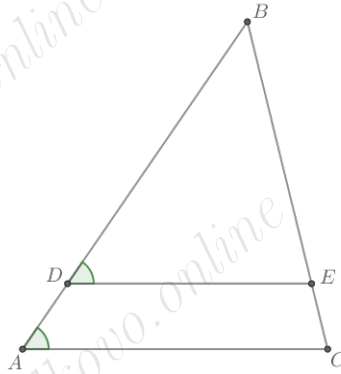
№1.2 #22836

Площадь треугольника ABC равна 8, DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE .



№1.3 #18489

Точки D и E на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таковы, что $\angle CAB = \angle EDB$. Найдите отношение $AC : DE$, если известно, что $BE : EC = 4 : 1$.



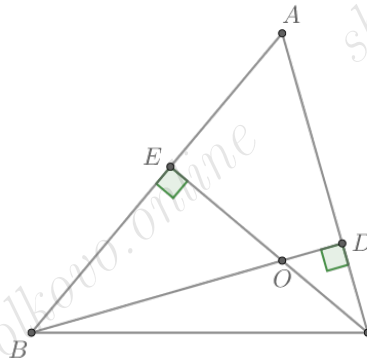
№1.4 #2472

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $CH = 4$ — высота, $BC = \sqrt{17}$. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.



№1.5 #2509

В треугольнике ABC угол A равен 56° , углы B и C — острые. Высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

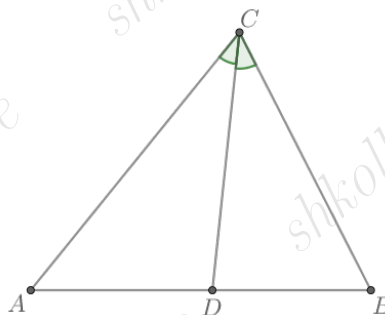


№1.6 #44446

Найдите проведенную к гипотенузе высоту прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.

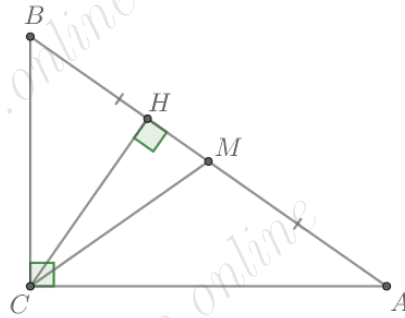
№1.7 #1394

В треугольнике ABC CD — биссектриса, $\angle B = 63^\circ$, $\angle ACD = 33^\circ$. Найдите $\angle ADC$. Ответ дайте в градусах.



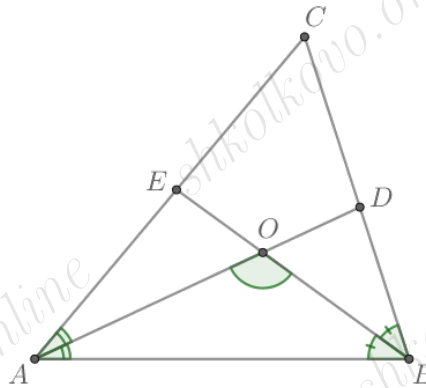
№1.8 #1272

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 55° . Найдите угол между высотой CH и медианой CM , проведенными из вершины прямого угла C . Ответ дайте в градусах.



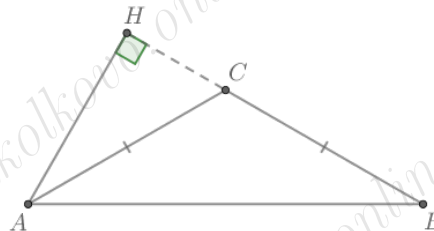
№1.9 #2508

В треугольнике ABC угол C равен 58° , биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



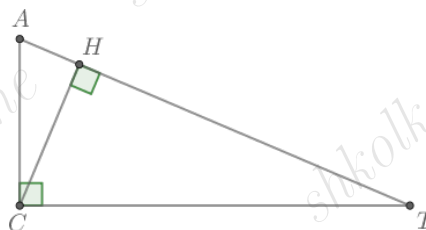
№1.10 #1197

В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{3}$, $\angle C = 120^\circ$. Найдите высоту AH .



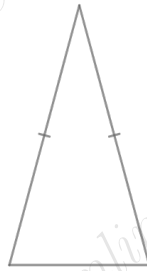
№1.11 #1973

В прямоугольном треугольнике CAT из вершины C прямого угла опущена высота CH . Известно, что $TH = 12$, $CH = 5$. Найдите $13 \sin \angle A$.



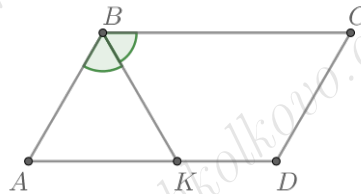
№1.12 #2478

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Найдите боковую сторону этого треугольника, если его площадь равна 25.



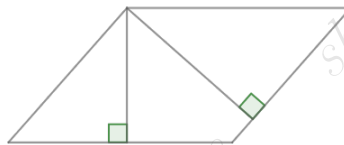
№1.13 #1834

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса, выходящая из вершины B , пересекает AD в точке K и равна 6, $\angle BAD = 60^\circ$, $AK : KD = 3 : 2$. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.



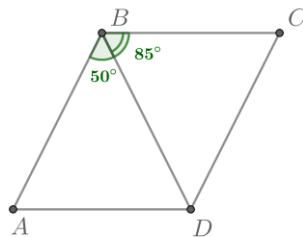
№1.14 #2511

Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.



№1.15 #23883

Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 50° и 85° . Найдите меньший угол этого параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



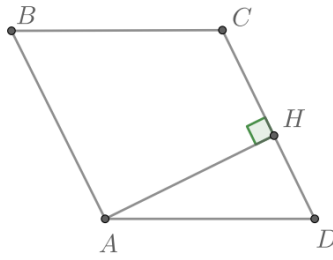
№1.16 #16085

Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.

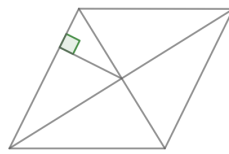


№1.17 #23900

Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 12$ и $CH = 3$. Найдите высоту ромба.

**№1.18 #23898**

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 10, а одна из диагоналей ромба равна 40. Найдите острый угол ромба. Ответ дайте в градусах.

**№1.19 #16097**

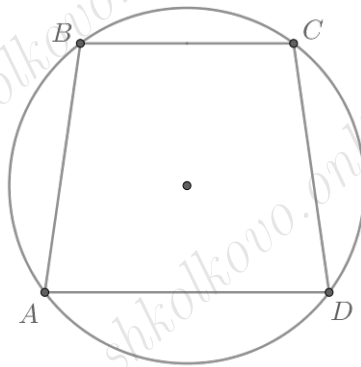
Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне. Ответ выразите в градусах.

**№1.20 #1055**

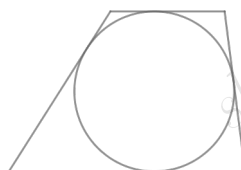
Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.

№1.21 #1147

Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.

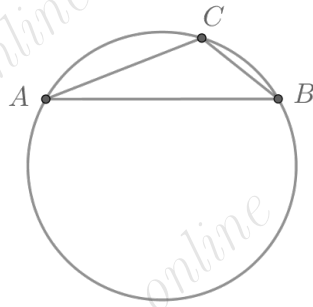
**№1.22 #2502**

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 9 и 12. Найдите среднюю линию трапеции.

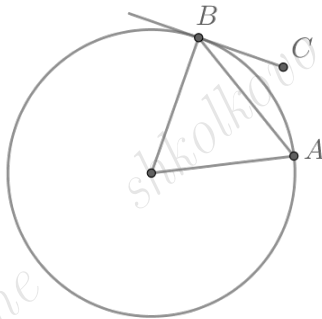


№1.23 #18124

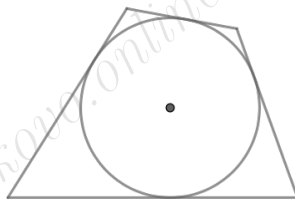
В треугольнике ABC сторона AB равна $2\sqrt{3}$, угол C равен 120° . Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

**№1.24 #2486**

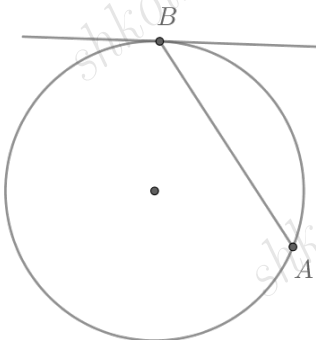
Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32° . Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB . Ответ дайте в градусах.

**№1.25 #1059**

Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как $2 : 3 : 6$. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр равен 54.

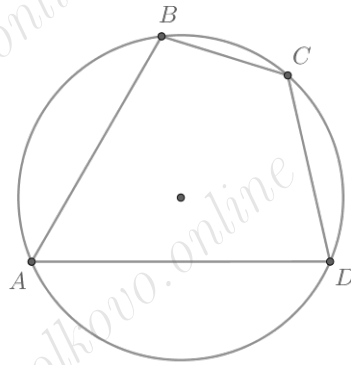
**№1.26 #1551**

Прямая b касается окружности в точке B и образует с хордой AB угол, равный 55° . Найдите градусную меру дуги AB , которая меньше полуокружности. Ответ дайте в градусах.



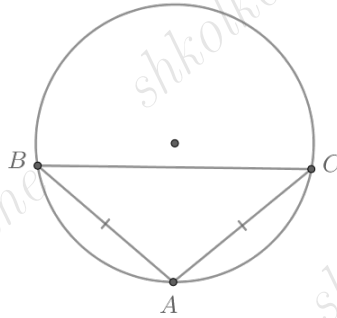
№1.27 #1144

Точки A, B, C, D , расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD, DA , градусные величины которых относятся соответственно как $4 : 2 : 3 : 6$. Найдите угол A четырехугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.



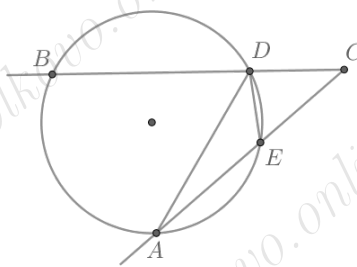
№1.28 #1990

Точки A и C разбивают окружность на две дуги, одна из которых равна 280° и на которой отмечена точка B . Найдите угол BAC , если $AB = AC$. Ответ дайте в градусах.



№1.29 #2489

Найдите угол ACB между секущими из точки C к окружности, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности с градусными мерами 118° и 38° соответственно. Ответ дайте в градусах.



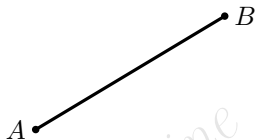
№1. Планиметрия. Ответы

1.1. 34	1.10. 3	1.20. 6
1.2. 2	1.11. 12	1.21. 7
1.3. 1,25	1.12. 10	1.22. 10,5
1.4. 0,25	1.13. 32	1.23. 2
1.5. 124	1.14. 6	1.24. 64
1.6. 2,4	1.15. 45	1.25. 20,25
1.7. 96	1.16. 2	1.26. 110
1.8. 20	1.17. 9	1.27. 60
1.9. 119	1.18. 60	1.28. 100
	1.19. 30	1.29. 40

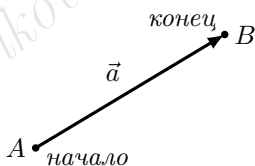
№2. Векторы. Теория

Понятие вектора

Рассмотрим произвольный отрезок AB . На нём можно указать два направления: от A к B и наоборот.



Чтобы выбрать одно из этих направлений, одну из точек A и B назовём началом отрезка, а вторую — концом отрезка и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.



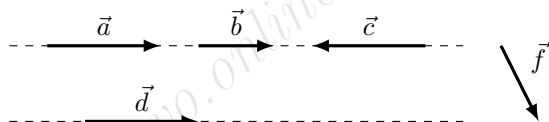
Определение Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется **направленным отрезком**, или **вектором**.

Любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется **нулевым**. Начало нулевого вектора совпадает с его концом. Нулевой вектор обозначается символом $\vec{0}$.

Длиной, или **модулем** ненулевого вектора $\vec{AB}$, называется длина отрезка AB . Длина вектора $\vec{AB}$ обозначается так: $|\vec{AB}| = AB$. Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.



Пусть две пунктирные прямые параллельны. Тогда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, а вот $\vec{f}$ не коллинеарен ни одному из них, так как он не находится ни на одной из пунктирных прямых, ни на прямой, параллельной им.

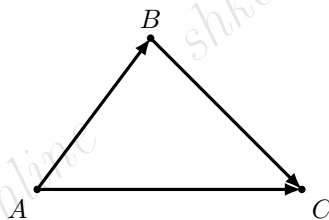
Коллинеарные векторы можно разбить на две группы: **сонаправленные** и **противоположно направленные** векторы. В нашем примере сонаправленными являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$; векторы $\vec{c}$ и $\vec{a}$ являются противоположно направленными; векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ являются противоположно направленными; векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ являются противоположно направленными.

Равенство векторов

Определение Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

Сложение векторов

Пусть точка переместилась из точки A в точку B , а затем из точки B в точку C . В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$, точка переместилась из точки A в точку C . Поэтому результат перемещения можно представить как вектор $\vec{AC}$.

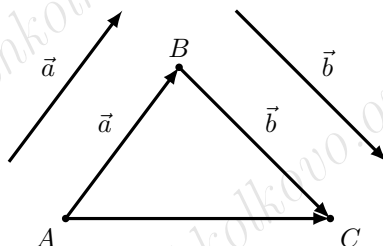


Поскольку перемещение из A в C складывается из перемещения из A в B и перемещения из B в C , то

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

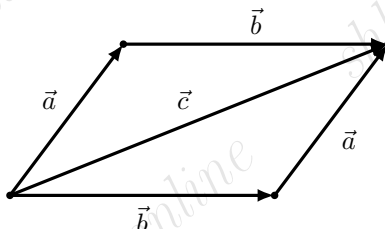
Правило треугольника

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора. Обозначим начало вектора $\vec{a}$ за точку A , его конец за точку B и параллельно перенесем начало вектора $\vec{b}$ в точку B . Пусть получился вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такое правило сложения векторов называется **правилом треугольника**.



Правило параллелограмма

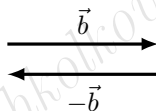
Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выходят из одной точки. В таком случае мы можем достроить эту конструкцию до параллелограмма и получить из каждой пары противоположных сторон пары равных векторов.



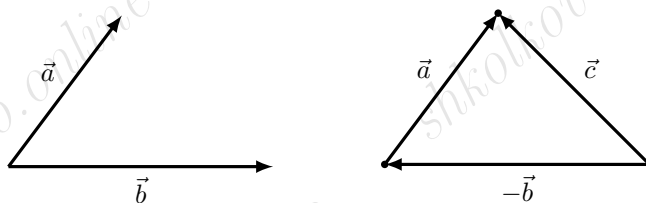
Тогда по правилу треугольника $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$.

Вычитание векторов

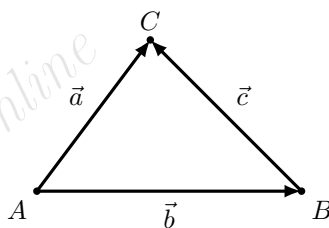
Для начала поймем, что « $-$ » перед вектором просто меняет его направление. Таким образом, векторы $\vec{b}$ и $-\vec{b}$ равны по длине, коллинеарны и противоположно направлены.



Пусть есть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при этом пусть вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Тогда $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Таким образом, можем изобразить вектор $\vec{c}$:



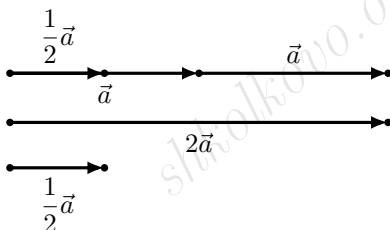
На это можно смотреть с другой стороны. Выразив вектор $\vec{a}$, получим, что $\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$. Таким образом, $\vec{a}$ — результат сложения вектора $\vec{b}$ с каким-то вектором $\vec{c}$.



Значит, нам нужен такой вектор, который перенесет точку B в точку C . Очевидно, это и есть вектор $\vec{c}$.

Умножение вектора на число

Возьмем вектор $\vec{a}$. Попробуем найти вектор $2\vec{a}$. Переместить точку на вектор $2\vec{a}$ — это тоже самое, что и дважды переместить её на вектор $\vec{a}$. Также можем разделить вектор $\vec{a}$ на два равных вектора и получить вектор $\frac{1}{2}\vec{a}$:



Правила умножения вектора на число

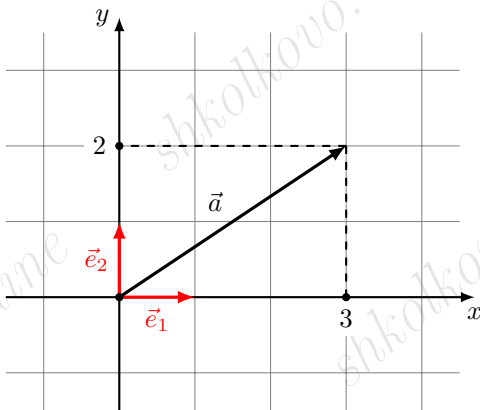
Пусть α и β — некоторые числа, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — некоторые векторы. Тогда

1. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$;
2. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$;
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$.

Разложение по единичным векторам

Рассмотрим декартову систему координат. Обозначим единичные векторы как $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда $|\vec{e}_1| = 1 = |\vec{e}_2|$.

Вектор, выходящий из начала координат, называется **радиус-вектором**. Возьмем радиус-вектор $\vec{a}$, конец которого находится в точке $(3; 2)$.



Мы знаем, что любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам. Тогда мы можем разложить $\vec{a}$ по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$:

$$\vec{a} = 3 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2.$$

Значит, радиус-вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(3; 2)$, то есть координаты точки его конца.

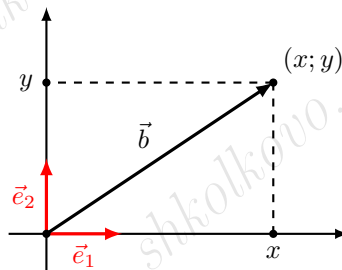
Таким образом, любой вектор мы можем воспринимать как движение по горизонтали + движение по вертикали, при этом перемещение по горизонтали и вертикали будет соответственно равно координатам вектора по осям абсцисс и ординат.

Длина вектора по его координатам

Так как система координат прямоугольная, то, разложив вектор по базису, мы получаем прямоугольный треугольник, поэтому длина вектора по теореме Пифагора равна $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Обобщая, получаем следующую формулу длины вектора $\vec{b}$ с координатами $(x; y)$:

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Координаты вектора

Сложение, вычитание, умножение на число

- При сложении векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ их координаты складываются, то есть

$$\vec{a}(x_1; y_1) + \vec{b}(x_2; y_2) = \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

- При вычитании из вектора $\vec{a}(x_1; y_1)$ вектора $\vec{b}(x_2; y_2)$ их координаты вычитаются, то есть

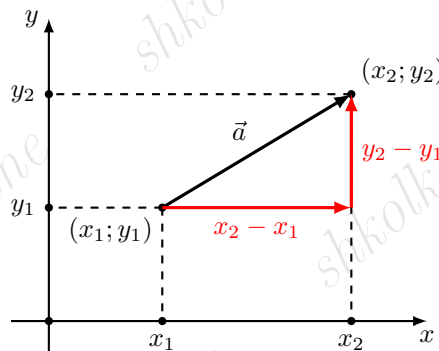
$$\vec{a}(x_1; y_1) - \vec{b}(x_2; y_2) = \vec{c}(x_1 - x_2; y_1 - y_2).$$

- При умножении вектора $\vec{a}(x_1; y_1)$ на число k его координаты умножаются на k :

$$k \cdot \vec{a}(x_1; y_1) = \vec{a}(kx_1; ky_1).$$

Связь координат вектора с координатами его начала и конца

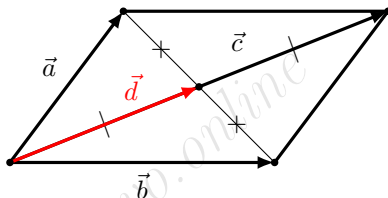
Пусть есть вектор $\vec{a}$ с началом в точке $(x_1; y_1)$ и концом в точке $(x_2; y_2)$.



Вектор — последовательное перемещение по горизонтали и вертикали. Тогда для перемещения из начала вектора, точки $(x_1; y_1)$, в его конец, точку $(x_2; y_2)$, надо сначала сместиться по горизонтали на $x_2 - x_1$, а затем по вертикали на $y_2 - y_1$. Таким образом координаты вектора $\vec{a}$ равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, то есть для получения координат вектора нужно вычесть из координат его конца координаты его начала.

Задача про медиану треугольника

Вспомним правило параллелограмма. Возьмем два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

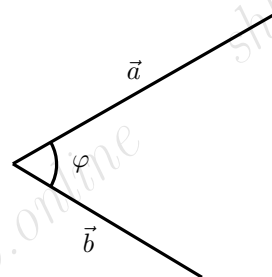


Скалярное произведение

Определение Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$) с углом φ между ними называют следующее выражение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

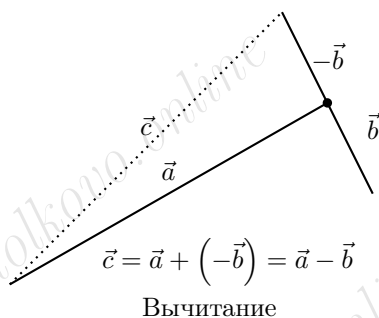
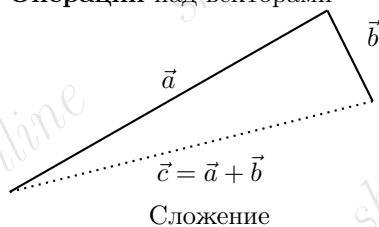
где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины соответствующих векторов.



Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $k\vec{a} \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
5. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}((\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2)$;
7. В декартовой системе координат, если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$;
8. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

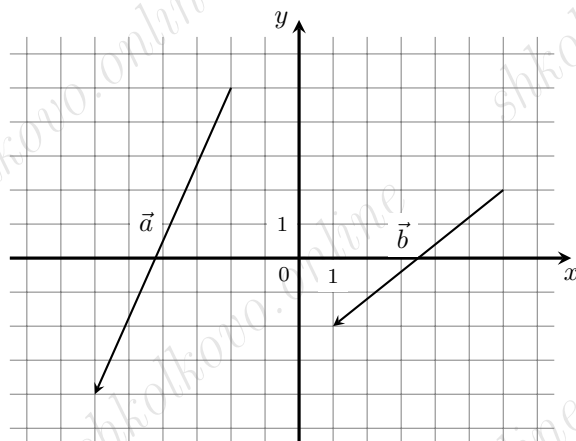
Операции над векторами



№2. Векторы. Задачи

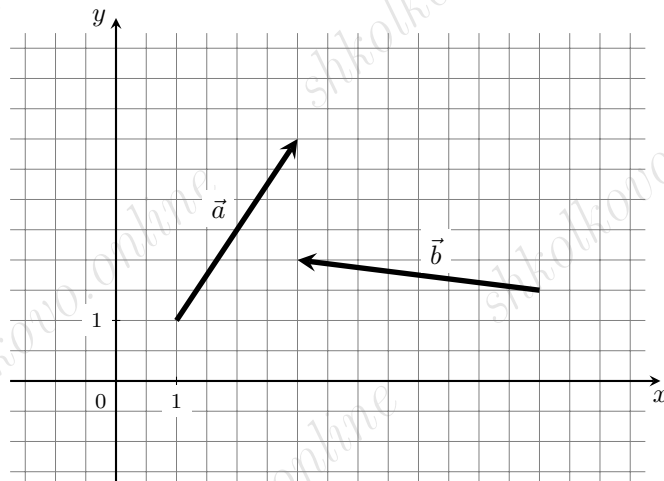
№2.1 #83431

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



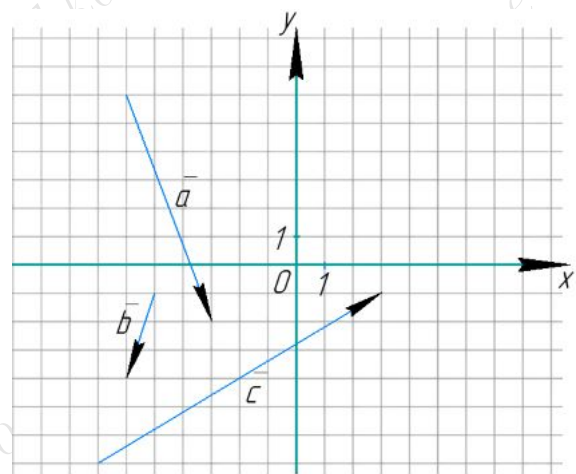
№2.2 #68046

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



№2.3 #75891

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

№2.4 #67828

Даны векторы $\vec{a}(1; 7)$, $\vec{b}(5; -6)$ и $\vec{c}(-3; 3)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$.

№2.5 #67829

Даны векторы $\vec{a}(-10; 4)$, $\vec{b}(0; 5)$ и $\vec{c}(2; 6)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

№2.6 #67842

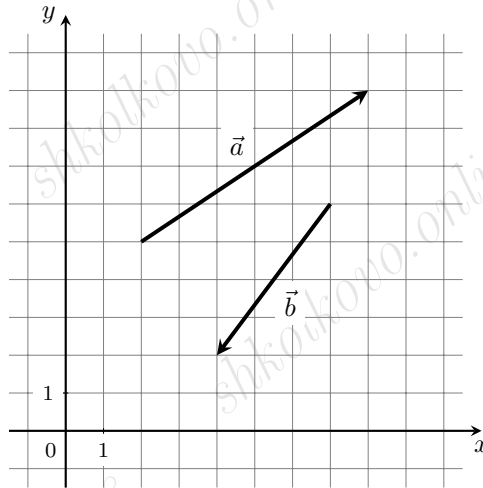
Даны векторы $\vec{a}(-1; 4)$ и $\vec{b}(2; 5)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

№2.7 #74679

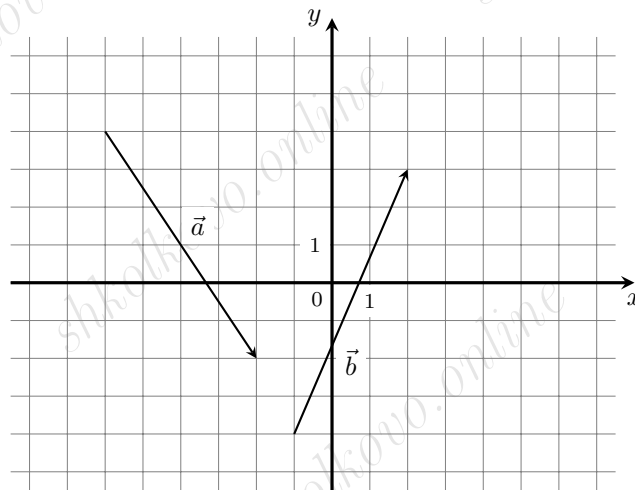
Даны векторы $\vec{a}(2; 2; -4)$ и $\vec{b}(-1; 25; -1)$. Найдите скалярное произведение векторов $3\vec{a}$ и $4\vec{b}$.

№2.8 #67946

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

**№2.9 #74676**

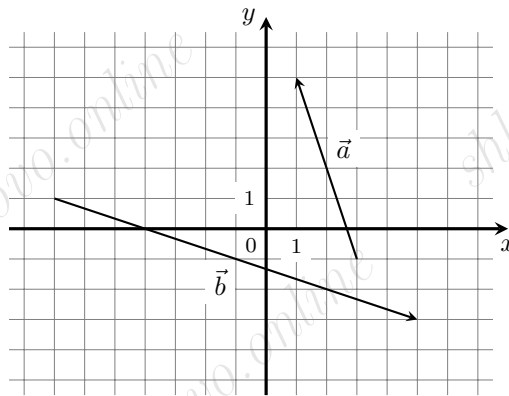
На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение векторов $2\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**№2.10 #74702**

Даны векторы $\vec{a}(-6; 2)$ и $\vec{b}(9; 13)$. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

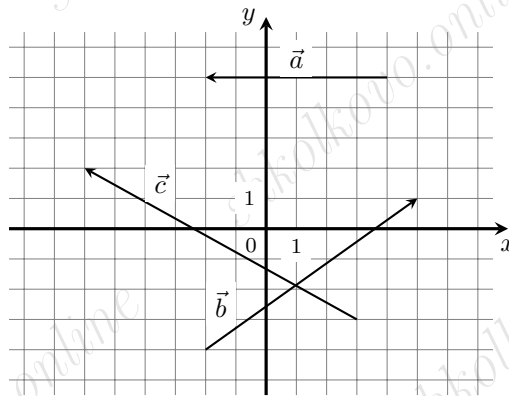
№2.11 #74680

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



№2.12 #74689

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



№2.13 #72004

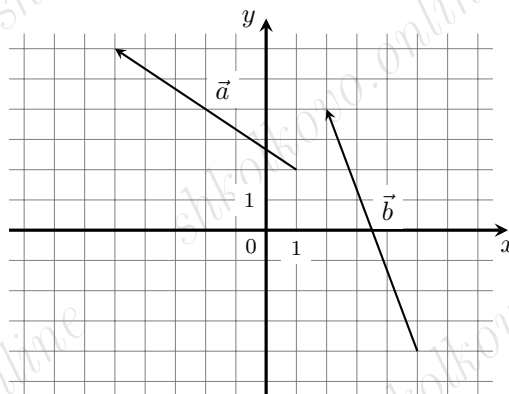
Даны векторы $\vec{a}(-1; 3)$, $\vec{b}(4; 1)$ и $\vec{c}(2; c_0)$. Найдите c_0 , если $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

№2.14 #74693

Даны векторы $\vec{a}(4; -6)$ и $\vec{b}(-2; 3)$. Известно, что $|\vec{c}| = |\vec{a}|$, а векторы $\vec{c}(x_c; y_c)$ и $\vec{b}$ противоположно направлены. Найдите $x_c + y_c$.

№2.15 #72008

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 0,5\vec{b} - \vec{a}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{c}$.



№2.16 #74699

Даны векторы $\vec{a}(x_a; -2)$ и $\vec{b}(0; y_b)$, косинус угла между которыми равен $-\sqrt{0,2}$. Найдите x_a . Если таких значений несколько, в ответ запишите меньшее из них.

№2. Векторы. Ответы

2.1. 56

2.2. 6,5

2.3. 13

2.4. 13

2.5. 17

2.6. 18

2.7. 15

2.8. -34

2.9. -60

2.10. -0,28

2.11. -0,6

2.12. 16

2.13. -1,5

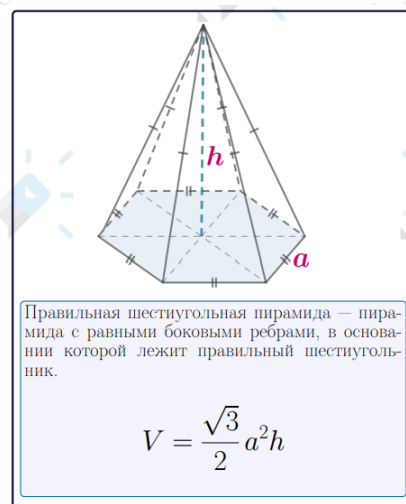
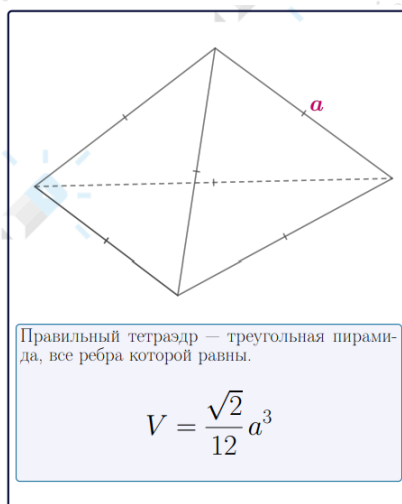
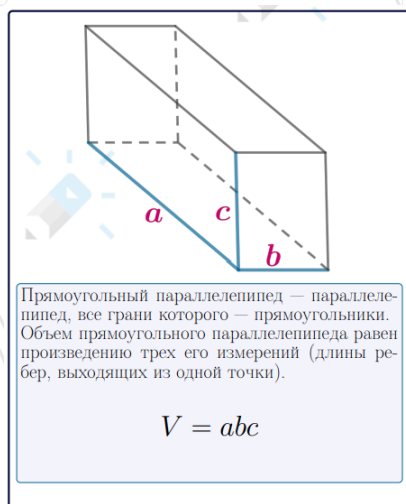
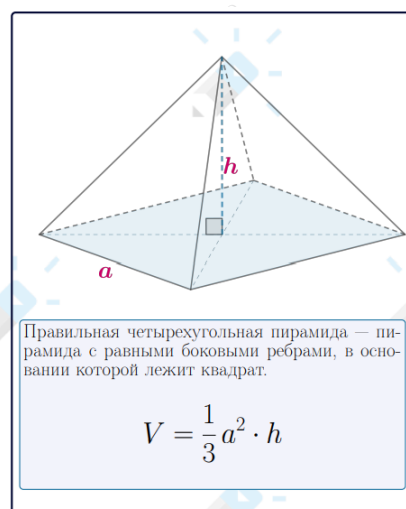
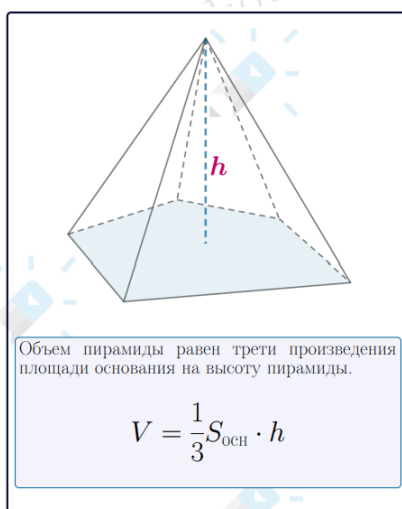
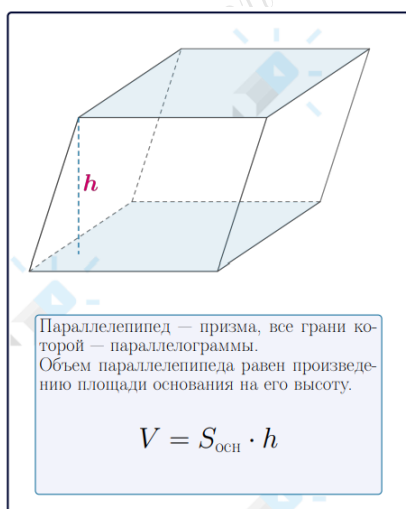
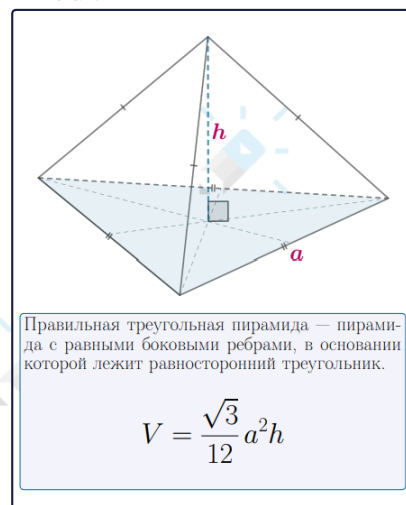
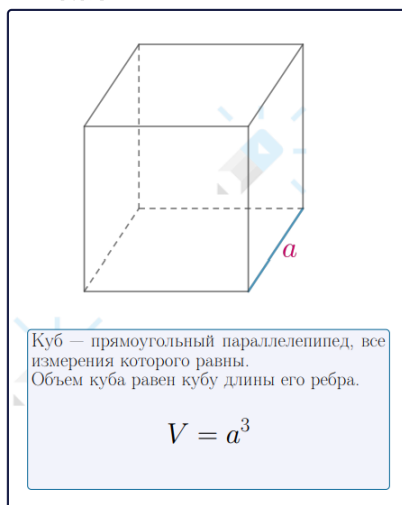
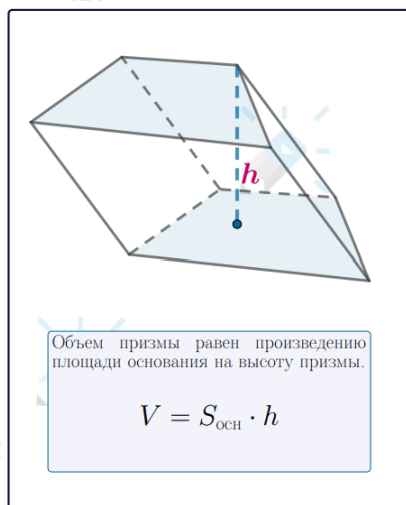
2.14. -2

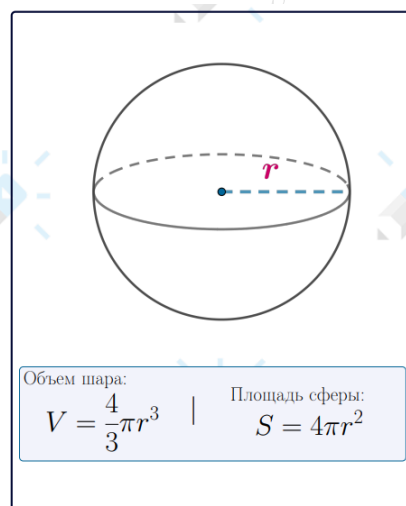
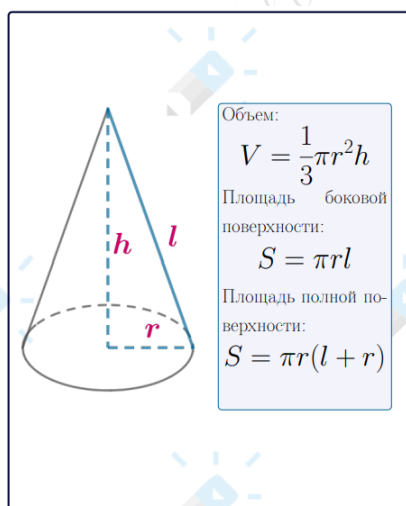
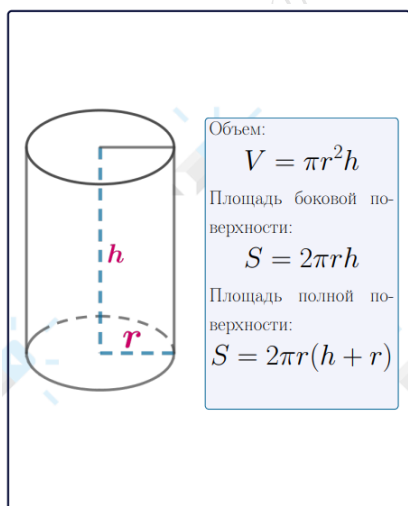
2.15. 4,5

2.16. -4

№3. Стереометрия. Теория

Объемы и площади поверхностей

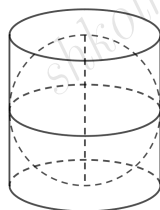




№3. Стереометрия. Задачи

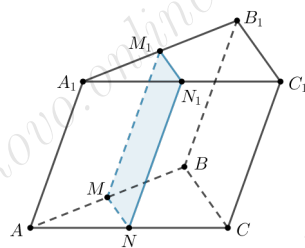
№3.1 #83432

Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 30. Найдите площадь поверхности шара.



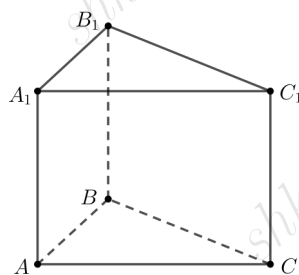
№3.2 #17753

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.



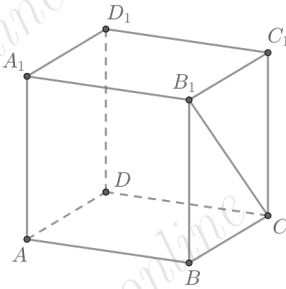
№3.3 #20612

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. При этом площадь основания призмы равна 9, а боковое ребро равно 4.

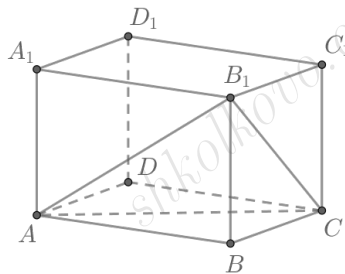


№3.4 #57729

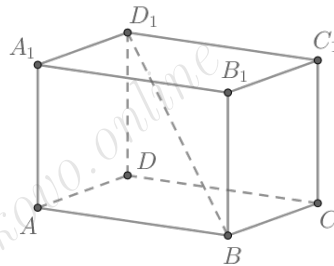
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 9$. Найдите синус угла между прямыми DD_1 и $B_1 C$.

**№3.5 #57722**

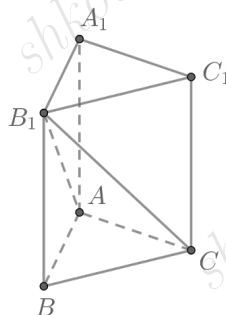
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 7$, $AA_1 = 6$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A , B , C , B_1 .

**№3.6 #57721**

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $CC_1 = 9$, $AB = 2$, $B_1 C_1 = 6$. Найдите длину диагонали BD_1 .

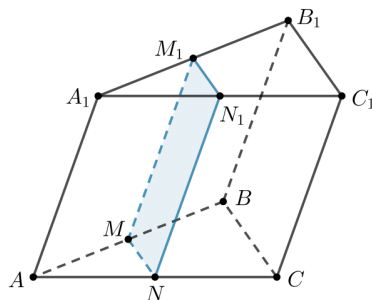
**№3.7 #57720**

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A , C , A_1 , B_1 , C_1 .



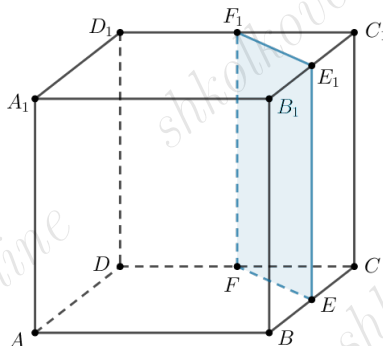
№3.8 #40595

Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 36. Через среднюю линию основания этой призмы проведена плоскость, параллельная боковой грани. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



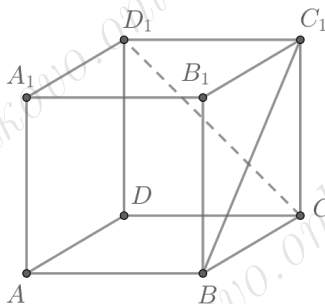
№3.9 #22192

Плоскость проходит через середины двух рёбер куба с общей вершиной параллельно третьему ребру, выходящему из той же вершины. Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба этой плоскостью, равен 11. Найдите объём куба.



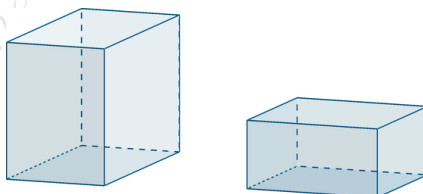
№3.10 #57728

В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми CD_1 и BC_1 . Ответ дайте в градусах.



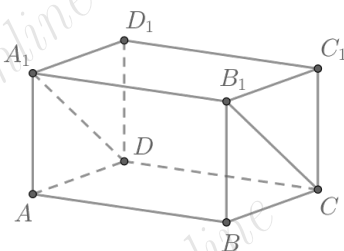
№3.11 #1040

Объём первого прямоугольного параллелепипеда равен 105. Найдите объём второго прямоугольного параллелепипеда, если известно, что высота первого параллелепипеда в 7 раз больше высоты второго, ширина второго в 2 раза больше ширины первого, а длина первого в 3 раза больше длины второго.

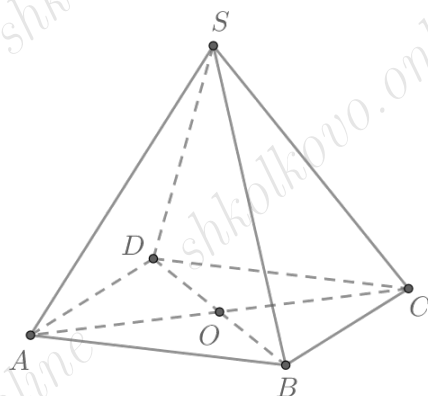


№3.12 #57723

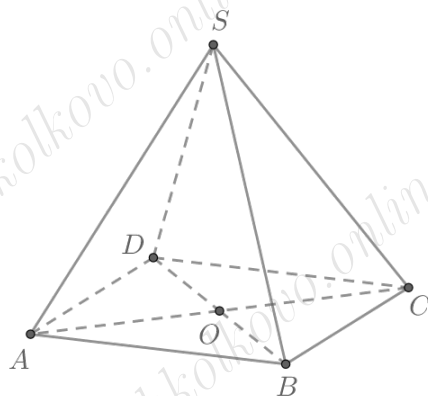
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $AA_1 = 4$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1 .

**№3.13 #57726**

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 48$, $SC = 80$. Найдите длину отрезка BD .

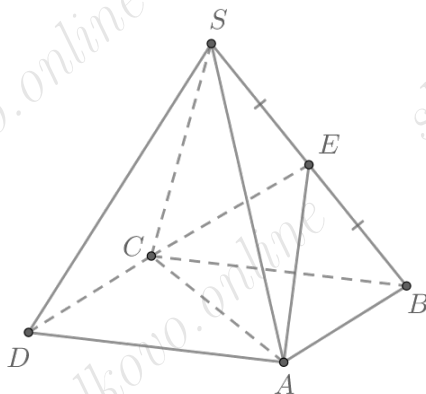
**№3.14 #47855**

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $AC = 30$, $SC = 39$. Найдите высоту пирамиды.



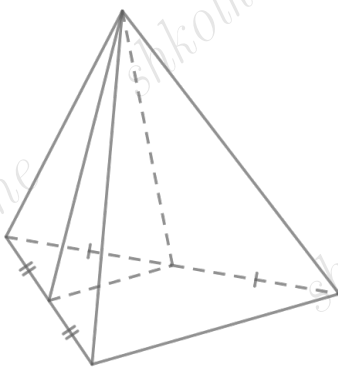
№3.15 #47852

Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 116. Точка E — середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.



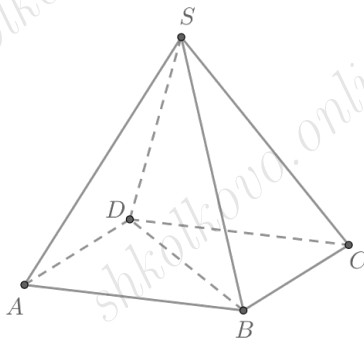
№3.16 #57724

Объем треугольной пирамиды равен 78. Через вершину пирамиды и среднюю линию ее основания проведена плоскость. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



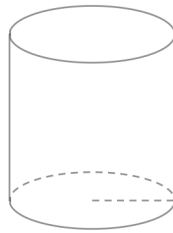
№3.17 #57727

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 17, сторона основания равна $15\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.



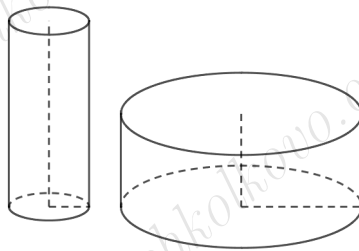
№3.18 #17744

Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .



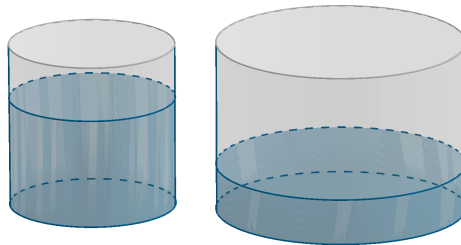
№3.19 #40601

Объем первого цилиндра равен 6. У второго цилиндра высота в два раза меньше, а радиус основания в три раза больше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра.



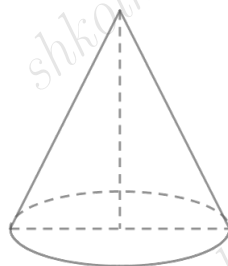
№3.20 #13545

В цилиндрическом сосуде уровень воды достигает 384 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 8 раз больше диаметра первого? Ответ дайте в сантиметрах.



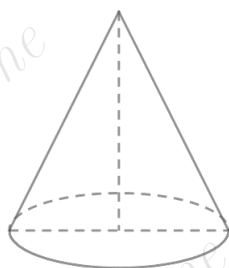
№3.21 #40602

Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 9 раз, а радиус основания останется прежним?

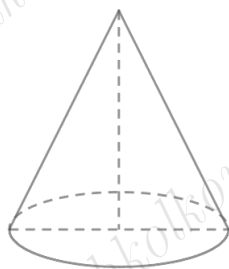


№3.22 #57725

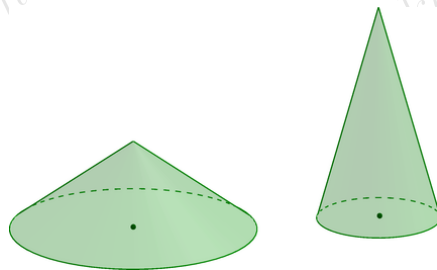
Высота конуса равна 16, а диаметр основания равен 60. Найдите длину образующей конуса.

**№3.23 #47853**

Образующая конуса равна 26, а диаметр основания равен 48. Найдите высоту конуса.

**№3.24 #1036**

Даны два конуса. Радиус второго конуса в 3 раза больше радиуса первого конуса, а высота второго конуса в 6 раз меньше высоты первого конуса. Найдите объем первого конуса, если объем второго конуса равен 18.

**№3.25 #587**

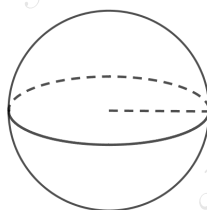
Площадь боковой поверхности конуса равна 48π , а площадь основания равна 36π . Найдите длину образующей конуса.

№3.26 #583

Объем шара равен $\frac{36}{\sqrt{\pi}}$. Чему будет равна площадь поверхности шара, если его радиус увеличить на $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$?

№3.27 #18609

Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.



№3. Стереометрия. Ответы

3.1. 20	3.10. 60	3.19. 27
3.2. 20	3.11. 10	3.20. 6
3.3. 12	3.12. 60	3.21. 9
3.4. 0,8	3.13. 128	3.22. 34
3.5. 63	3.14. 36	3.23. 10
3.6. 11	3.15. 29	3.24. 12
3.7. 32	3.16. 19,5	3.25. 8
3.8. 18	3.17. 1200	3.26. 324
3.9. 88	3.18. 12	3.27. 6

№4,5. Теория по вероятностям

Базовые понятия теории вероятностей

Во всех задачах на теорию вероятностей мы имеем дело с некоторым *случайным экспериментом*. Бросок кубика, вытаскивание шариков из коробки вслепую, вытягивание билета на экзамене, все это — случайные эксперименты.

Определение *Случайный эксперимент* — это любой эксперимент или событие из реальной жизни, результат которого невозможно точно предсказать.

Определение Реализация случайного эксперимента приводит к одному из *элементарных исходов*. Множество всех элементарных исходов случайного эксперимента называют *пространством элементарных исходов*.

Например, при броске обычного шестигранного кубика возможны шесть элементарных исходов: выпало 1 очко, выпало 2 очка, ..., выпало 6 очков. Вероятностным пространством будет множество $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Пока мы будем рассматривать эксперименты с конечным числом элементарных исходов.

Определение Каждому элементарному исходу соответствует некоторое неотрицательное число — *вероятность* его возникновения. Сумма вероятностей всех элементарных исходов случайного эксперимента должна равняться 1.

Так, если в примере с кубиком все значения выпадают **равновероятно**, то вероятности всех шести элементарных исходов равны между собой и по определению вероятности в сумме дают 1, значит,

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}.$$

Далеко не во всех случайных экспериментах элементарные исходы **равновероятны**!

Определение *Событием* называют любое подмножество пространства элементарных исходов.

При броске кубика событию (в житейском понимании этого слова) «выпало четное количество очков» соответствует подмножество $\{2; 4; 6\}$ вероятностного пространства $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Определение События называют *несовместными*, если у них нет ни одного общего элементарного исхода.

События «выпало четное число очков» и «выпало нечетное число очков» несовместны, ведь им соответствуют множества $\{2; 4; 6\}$ и $\{1; 3; 5\}$, пересечение которых пусто.

Напротив, события «выпало четное число очков» и «выпало число очков, кратное 3» **не являются** несовместными, так как соответствующие им множества $\{2; 4; 6\}$ и $\{3; 6\}$ имеют общий элементарный исход — выпадение шестерки.

Важно! Из определения очевидно следует, что любые два различных элементарных исхода несовместны.

Ключевой факт, которым мы пользуемся во всех задачах

Если события A и B **несовместны**, то вероятность того, что произойдет хотя бы одно из них, равна сумме их вероятностей. Так как мы знаем, что A и B — это на самом деле множества, а формулировка «хотя бы одно» означает их объединение, можем записать этот факт следующим образом:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

В частности, получаем, что вероятность события равна сумме вероятностей всех элементарных исходов, из которых оно состоит, так как они все между собой несовместны.

Условная вероятность. Погружение в новое пространство

Игральную кость бросили два раза. Известно, что два очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 4».

Решение

Рассмотрим все возможные элементарные исходы в эксперименте с броском двух кубиков. Это всевозможные пары натуральных чисел, где первое число пары — число очков, выпавших на первом кубике, второе число пары — число очков, выпавших на втором кубике. Каждое число пары может принимать одно из шести значений $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Тогда общее количество элементарных исходов равно $6 \cdot 6 = 36$, причем все они **равновероятны**.

Нам известно, что два очка не выпало ни разу. Это условие погружает нас в новое пространство элементарных исходов, меньшее, чем изначальное, в котором больше нет исходов с двойкой — они нереализуемы. Элементарные исходы с двойкой:

(1; 2) (2; 1)
(2; 2)
(3; 2) (2; 3)
(4; 2) (2; 4)
(5; 2) (2; 5)
(6; 2) (2; 6)

Их всего 11, тогда в новом пространстве всего $36 - 11 = 25$ элементарных исходов. Найдем все элементарные исходы нового пространства, в которых сумма очков равна 4 — это только исходы (1; 3) и (3; 1), ведь исхода (2; 2) нет в нашем новом пространстве. Все исходы нового пространства также равновероятны, тогда вероятность события $\{(1; 3); (3; 1)\}$ «сумма выпавших очков окажется равна 4» равна отношению числа элементарных исходов в нем к общему количеству элементарных исходов, то есть

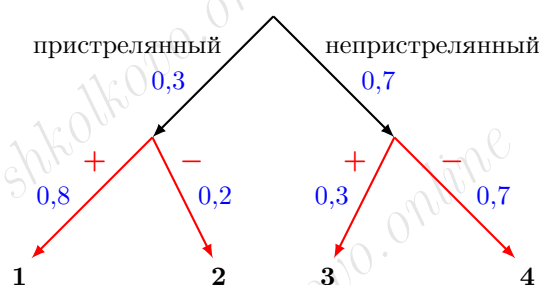
$$P = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Цепочки событий

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Решение

Изобразим все возможные последовательности событий с помощью дерева.



Всего возможны четыре элементарных исхода:

1. Джон схватил пристрелянный револьвер и попал;
2. Джон схватил пристрелянный револьвер и не попал;
3. Джон схватил непристрелянный револьвер и попал;
4. Джон схватил непристрелянный револьвер и не попал.

Нам нужно найти вероятность события, что Джон промахнется, оно содержит элементарные исходы 2 и 4. Из 10 револьверов 3 пристрелянные, значит, Джон схватит пристрелянный с вероятностью 0,3, а непристрелянный с вероятностью 0,7.

Найдем вероятность исхода 2. Она равна произведению вероятностей на всех стрелках на пути к исходу 2, то есть

$$P(2) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

По аналогичным соображениям вероятность исхода 4 равна

$$P(4) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49.$$

Тогда вероятность события, что Джон промахнется, равна сумме вероятностей элементарных исходов, составляющих это событие:

$$P(-) = P(2) + P(4) = 0,06 + 0,49 = 0,55.$$

Независимые события

События A и B называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от исхода другого, то есть обычная вероятность $P(A)$ события A равна условной вероятности $P(A|B)$ и аналогично $P(B) = P(B|A)$.

Фактически независимость в условии задачи позволяет нам напрямую перемножать вероятности событий, чтобы получить вероятность их пересечения, не находя условную вероятность. Классические примеры независимых событий, где независимость негласно подразумевается, это: последовательные броски кубика (вероятности выпадения чисел в каждом следующем броске не зависят от результатов предыдущих бросков), многократные подбрасывания монетки, да и многие другие одинаковые действия, повторенные несколько раз.

Пример задачи

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадет в нее. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется ровно три попытки.

Решение

Чтобы стрелок сделал ровно три попытки, он должен промахнуться первые два раза и попасть на третий. Вероятность промахнуться равна

$$P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Получаем, что вероятность попасть в мишень именно на третий раз равна

$$P(3) = P(-) \cdot P(-) \cdot P(+) = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,096.$$

Мы можем перемножать вероятности, потому что в условии сказано, что вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,6, то есть не зависит от результатов других выстрелов.

Комбинаторика в теории вероятностей

Введение

Рассмотрим ситуацию, когда все элементарные исходы некоторого случайного эксперимента **равновероятны** и всего их n штук. Допустим, что в задаче нас просят найти вероятность некоторого события $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, состоящего из k элементарных исходов. Тогда

$$P(A) = \frac{\text{количество «благоприятных» исходов}}{\text{общее количество исходов}} = \frac{k}{n}.$$

Получается, что в этом случае от задачи по теории вероятностей мы переходим к задаче по комбинаторике: нам нужно лишь подсчитать количество благоприятных исходов, общее количество исходов и найти их отношение.

Перестановки

Представим следующую ситуацию: 5 школьников пришли в столовую за сосисками в тесте. Сколькими различными способами они могли выстроиться в очередь? Пронумеруем позиции в очереди от 1 до 5. Тогда количество вариантов выбрать школьника на первую позицию равно пяти, на вторую — четырем, так как один из школьников уже на первой позиции, на третью — трем, на четвертую — двум, на последнюю пятую позицию

отправляется единственный оставшийся школьник. Каждому варианту для одной позиции могут соответствовать все возможные комбинации вариантов на остальных позициях, значит, чтобы получить общее количество комбинаций, нужно перемножить варианты на всех позициях:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

В общем случае количество различных **перестановок** из n элементов равно $n!$.

Сочетания

Теперь нам нужно из 7 человек выбрать двоих для дежурства на перемене. Будем выбирать их по очереди, сначала первого дежурного, потом второго. Первого можно выбрать семью способами, для каждого из способов выбрать первого есть шесть способов выбрать второго, получаем, что общее количество способов выбрать двоих дежурных равно 42. Что же не так в этом рассуждении? Среди этих 42 способов мы один раз посчитали способ, когда мы первым выбрали Петю, а вторым — Васю, а также способ, когда мы первым выбрали Васю, а Петю — вторым. В реальности же нет разницы между парами дежурных Петя-Вася и Вася-Петя. Значит, искомое количество способов вдвое меньше, чем мы получили, так как каждую пару мы посчитали дважды, и правильный ответ — 21.

Заметим, что если бы мы выбирали одного дежурного в столовую, а второго в коридор, то наш изначальный результат был бы верным. Ведь способы «Васю в коридор, Петю в столовую» и «Васю в столовую, Петю в коридор» действительно различны.

Рассмотрим более сложную ситуацию. Теперь из 7 человек нужно выбрать троих для дежурства. Мы уже понимаем, что если просто перемножить $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$, то некоторые варианты окажутся посчитаны больше одного раза. Попробуем разобраться, сколько раз будет посчитан каждый вариант.

Рассмотрим троих людей Васю, Петю и Колю. Тогда среди 210 вариантов мы посчитали варианты

(В, П, К)

(П, К, В)

(К, В, П)

(В, К, П)

(П, В, К)

(К, П, В)

В реальности все эти шесть вариантов не отличаются, ведь мы просто выбрали дежурными Васю, Петю и Колю, неважно в каком порядке. Теперь становится понятно, что каждый вариант мы вместо одного раза посчитали $6 = 3!$ раз, то есть делить нужно на количество различных перестановок, ведь именно столько раз мы посчитали каждый вариант. Таким образом, ответ

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35.$$

Посчитаем теперь количество способов выбрать четырех дежурных из тех же самых соображений:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 35.$$

Получили, что количество способов выбрать четверых равно количеству способов выбрать троих. Действительно, *ведь выбрать четверых это то же самое, что выбрать троих, которые не будут выбраны.*

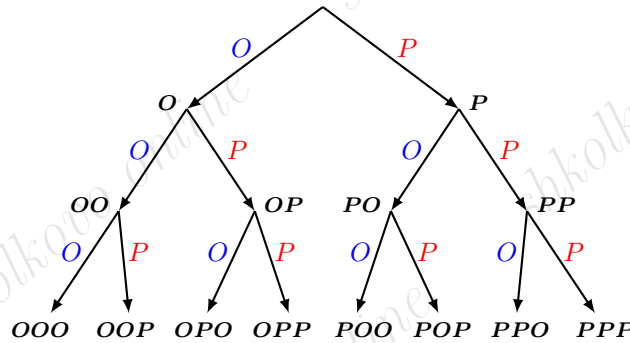
Посчитаем количество способов выбрать 9 человек из 11. Вместо того, чтобы выбирать 9 дежурных, выберем 2 *недежурных*. Проверим, что результаты при двух способах подсчета совпадут:

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{9!} = 55 = \frac{11 \cdot 10}{2}.$$

Подбрасывания монетки

Рассмотрим классическую ситуацию: симметричная монетка подбрасывается 3 раза, необходимо посчитать количество возможных комбинаций орлов и решек, которые могут выпасть. На каждом броске мы можем получить либо орла, либо решку.

Нарисуем ситуацию в виде дерева.



На первом уровне дерева находятся все комбинации для одного броска (всего $2^1 = 2$ варианта), на втором — для двух (всего $2^2 = 4$ варианта), на третьем — для трех (всего $2^3 = 8$ вариантов). Количество комбинаций на каждом следующем уровне дерева увеличивается вдвое. Действительно, ведь каждый следующий бросок «раздваивает» каждую из существующих комбинаций. Дерево можно продолжать дальше вниз и для произвольного количества n бросков количество возможных комбинаций будет равняться 2^n .

Броски кубика

Теперь вместо подбрасывания монетки совершается несколько бросков кубика. Сколько же комбинаций очков может выпасть если совершено два броска? три броска? Эту ситуацию можно снова смоделировать с помощью дерева, только теперь из каждой вершинки, соответствующей комбинации, будет вести уже шесть ребер. Таким образом, с каждым следующим броском количество комбинаций будет увеличиваться в 6 раз, и ответ для двух бросков 6^2 , а для трех — 6^3 .

Попробуем взглянуть на ситуацию немного иначе. Пусть каждому из трех бросков соответствует одна из трех позиций:

— — —

Тогда на каждой из трех позиций может оказаться одно из чисел от 1 до 6 — результат соответствующего броска. Для каждой позиции напомним количество вариантов очков. Каждому варианту для одной позиции могут соответствовать все возможные комбинации вариантов на остальных позициях, значит, чтобы получить общее количество комбинаций, нужно перемножить варианты на всех позициях:

$$\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^3.$$

№4. Теория вероятностей. Задачи

№4.1 #83433

На тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 4 задач с вероятностью 0,76. Вероятность того, что А. верно решит больше 3 задач, равна 0,89. Найдите вероятность того, что ученик верно решит ровно 4 задачи.

№4.2 #18606

В фирме такси в наличии 45 легковых автомобилей. Из них 18 чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

№4.3 #1277

На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

№4.4 #17039

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выигрывает оба раза.

№4.5 #18927

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

№4.6 #20592

В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

№4.7 #31849

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

№4. Теория вероятностей. Ответы

4.1. 0,13

4.2. 0,6

4.3. 0,25

4.4. 0,156

4.5. 0,91

4.6. 0,2

4.7. 0,52

№5. Теория вероятностей. Задачи

№5.1 #83435

Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 10».

№5.2 #13153

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,9. Какое минимальное количество выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,96?

№5.3 #17014

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечетных чисел, а четные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

№5.4 #17015

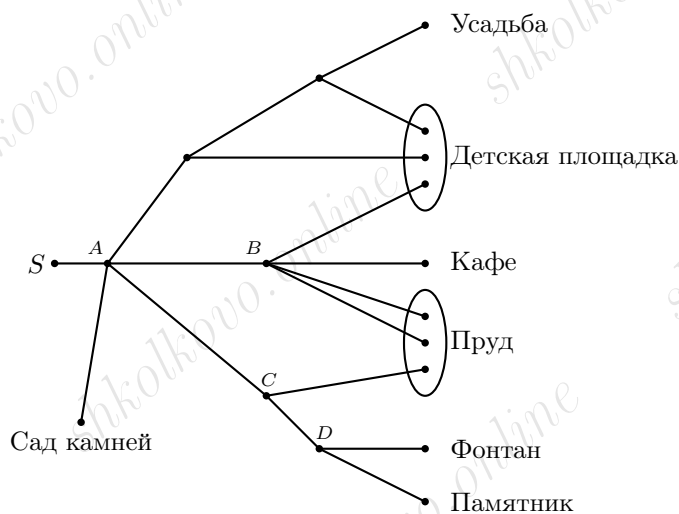
В коробке лежат 11 синих, 6 красных и 8 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры?

№5.5 #17016

Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма выпавших очков не превысила число 6. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

№5.6 #17021

Артем гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



№5.7 #17028

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

№5.8 #17038

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

№5.9 #17045

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01.

Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

№5.10 #17242

Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс.

У Маши уже есть 7 разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще одно или два шоколадных яйца?

№5.11 #20865

Игральную кость бросили два раза. Известно, что 6 очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 8».

№5. Теория вероятностей. Ответы

5.1. 0,04

5.5. 0,58

5.9. 0,0545

5.2. 3

5.6. 0,3125

5.10. 0,51

5.3. 0,2

5.7. 0,55

5.4. 0,22

5.8. 0,019

5.11. 0,12

№6,7. Уравнения и значения выражений. Теория

Степени

Определение степени

Выражение a^n называется степенью, число a — основанием степени, n — показателем степени. На самом деле запись a^n означает, что мы умножаем число a само на себя n раз, то есть

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Например,

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Таблица наиболее часто встречающихся степеней

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$			
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$			
$2^7 = 128$				
$2^8 = 256$				
$2^9 = 512$				
$2^{10} = 1024$				

Свойства степеней

- При перемножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются, то есть

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Например,

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Так происходит потому, что $2^2 = 2 \cdot 2$, а $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Таким образом,

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 = 32.$$

- При делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются, то есть

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

Например,

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9.$$

Опять же, так происходит потому, что

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 = 9.$$

А что будет, если мы будем делить 3^4 на 3^6 ? По свойству мы получим

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2}.$$

Но мы пока не знаем, что делать, если показатель степени отрицателен. Распишем по определению:

$$\frac{3^4}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, мы получили следующее свойство.

- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. Например,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Значит,

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

- При возведении степени в степень показатели перемножаются, то есть

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

Например,

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64;$$

$$(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}.$$

- $a^1 = a$, $a^0 = 1$. Об этом свойстве просто договорились, чтобы не было противоречий в предыдущих свойствах. Например,

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1, \quad \text{но и} \quad 1 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0.$$

- Степень произведения равна произведению степеней, то есть

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x.$$

Например,

$$6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$$

- Степень частного равна частному степеней, то есть

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Например,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Логарифмы

Понятие логарифма тесно связано с понятием степени, поэтому всюду ниже мы будем активно пользоваться следующими базовыми свойствами степеней:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Определение логарифма

Логарифм по основанию a от b — это число t , которое показывает, в какую степень нужно возвести a , чтобы получить b . Таким образом, для $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ выполняется основное логарифмическое тождество:

$$a^t = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = t.$$

Здесь a называется основанием логарифма, b — аргументом логарифма.

Таким образом, значение логарифма — это просто соответствующий показатель степени. Рассмотрим уравнение

$$2^x = 8.$$

Очевидно, что его решением является число 3. Но что делать, если мы столкнулись например с уравнением

$$2^x = 5?$$

Как записать его решение? Мы знаем только то, что x — это некоторое число, большее чем 2, но меньшее чем 3. Именно в таком случае помогает понятие логарифма, ведь x — это *такое число, в степень которого нужно возвести 2, чтобы получить 5*, а это и есть определение для логарифма $\log_2 5$.

Свойства логарифмов

0. $a^{\log_a b} = b$
1. $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$
2. $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$
3. $\log_b a^r = r \cdot \log_b a$
4. $\log_{b^r} a = \frac{1}{r} \cdot \log_b a$
5. $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$
6. $\log_b a \cdot \log_a b = 1$
7. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, a \neq 1$
8. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$
9. $\frac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$

Уравнения с логарифмами

Рассмотрим уравнение вида

$$\log_b a = \log_b c$$

Его ОДЗ

$$\begin{cases} b > 0 \\ b \neq 1 \\ a > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

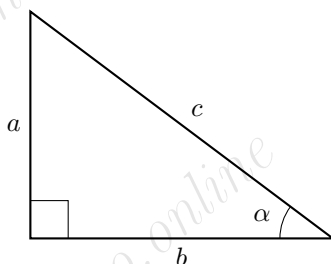
На ОДЗ данное уравнение равносильно равенству аргументов логарифмов, то есть $a = c$. Чисто алгебраически можно записать в следующем виде

$$\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b > 0 \\ b \neq 1 \\ a > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Базовые тригонометрические факты

Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

Пусть есть прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Пусть острый угол между сторонами b и c равен α . Тогда



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Даже из таких соотношений можно вывести несколько формул:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Наш треугольник — прямоугольный, значит, в нем верна теорема Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Тогда можем вывести основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Данное тождество очень полезно, так как фактически это «бесплатное» уравнение. С помощью него мы по синусу можем найти косинус и наоборот.

Табличные значения тригонометрических функций

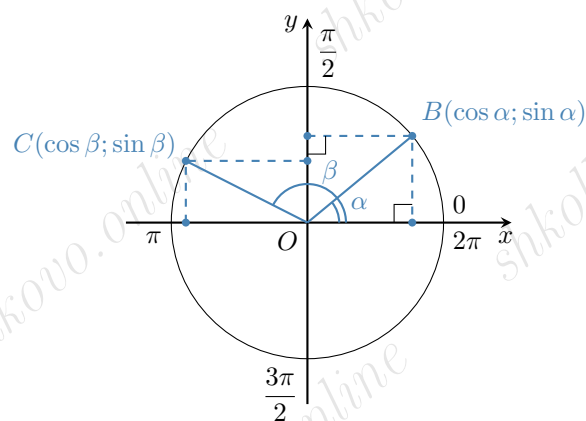
Таблица синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов из первой четверти:

	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Тригонометрическая окружность

Возьмем окружность в центре в точке $O(0; 0)$ и радиусом $R = 1$. Тогда длина этой окружности будет равна $L = 2\pi R = 2\pi$. Таким образом, мы получили связь угла 360° с длиной окружности 2π .

Выберем произвольную точку B на окружности. Пусть угол между OB и положительным направлением оси абсцисс равен α . Тогда точка B имеет координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$.



Такое определение тригонометрических функций работает для всех углов. Например, отложим угол $\beta > 90^\circ$. На окружности получим точку $C(\cos \beta; \sin \beta)$.

Так как синус и косинус — координаты точек на единичной окружности, то получаем ограничения:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Знаки тригонометрических функций

Оси делят нашу окружность на четыре четверти:

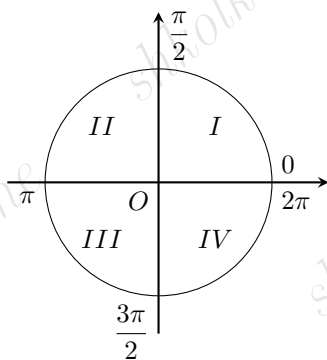
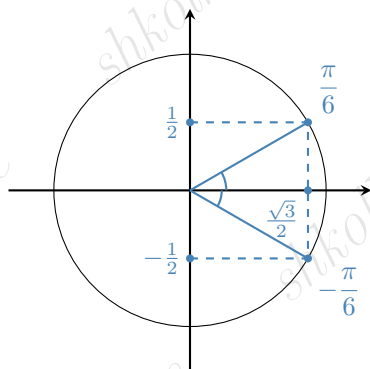


Таблица знаков тригонометрических функций в соответствующих четвертях:

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

Четность/нечетность тригонометрических функций

Откладывать углы от оси абсцисс мы можем как в положительном направлении (против часовой стрелки), так и в отрицательном (по часовой стрелке). Давайте отложим угол $\frac{\pi}{6}$ в обоих направлениях.



Тогда получим равнобедренный треугольник, в котором биссектриса является медианой, следовательно,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Таким образом, синус — нечетная функция, а косинус — четная, то есть

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

Формулы приведения

Пользуясь периодичностью функций $\sin$ и $\cos$, мы можем упрощать их аргументы по следующим формулам:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
$\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$	$\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha$

Наиболее распространенные тригонометрические формулы

Основные тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ $(\sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0)$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $(\cos \alpha \neq 0)$	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ $(\sin \alpha \neq 0)$

Формулы сложения углов

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \beta \cdot \cos \alpha$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$ $\cos \alpha \cos \beta \neq 0, \cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$	$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha},$ $\sin \alpha \sin \beta \neq 0, \sin(\alpha \pm \beta) \neq 0$

Формулы двойного и тройного углов

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$ $\cos \alpha \neq 0, \cos 2\alpha \neq 0$	$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha},$ $\sin \alpha \neq 0, \sin 2\alpha \neq 0$
$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

Элементарные тригонометрические уравнения

Стандартные (простейшие) тригонометрические уравнения — это уравнения вида

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = b, \quad \operatorname{ctg} x = b,$$

которые имеют смысл при $-1 \leq a \leq 1, b \in \mathbb{R}$.

Их решения в общем случае выглядят следующим образом:

Уравнение	Ограничения	Решение
$\sin x = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arcctg} b + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

№6. Уравнения. Задачи

№6.1 #83436

Найдите корень уравнения $3^{(x-8)} = \frac{1}{81}$.

№6.2 #11023

Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi(x-1)}{6} \right) = \sqrt{3}$.

№6.3 #16699

Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos(4\pi x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

№6.4 #16701

Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi(x-3)}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

№6.5 #16697

Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5$.

№6.6 #16741

Найдите корень уравнения $(x+4)^3 = -125$.

№6.7 #1444

Найдите корень уравнения $\sqrt{4x+5} = 6$.

№6.8 #37783

Решите уравнение $\sqrt[3]{x-2} = 2$.

№6.9 #23573

Решите уравнение $\sqrt{2x^2+4x-5} = x$.

Если оно имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№6.10 #2684

Найдите корень уравнения $\frac{2x+73}{3x-18} = \frac{2x+73}{18x-3}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№6.11 #1436

Найдите корень уравнения $\frac{-x-8}{x-8} = 9$.

№6.12 #18122

Найдите корень уравнения $\log_3(15-x) = \log_3 7$.

№6.13 #126

Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{3}}(4x+1) = -3$.

№6.14 #17257

Найдите корень уравнения $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$.

№6.15 #17259

Найдите корень уравнения $\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1$.

№6.16 #17260

Найдите корень уравнения $\log_{x-5} 49 = 2$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№6.17 #17261

Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

№6.18 #17262

Найдите корень уравнения $3^{\log_9(5x-5)} = 5$.

№6.19 #22724

Найдите корень уравнения $7^{6-x} = 49^x$.

№6.20 #1463

Найдите корень уравнения $0,3 \cdot 10^{4-5x} = 3^{4-5x}$.

№6. Уравнения. Ответы

6.1. 4	6.11. 6,4
6.2. -3	6.12. 8
6.3. 0,0625	6.13. 6,5
6.4. 19	6.14. -4
6.5. 0,5	6.15. 2
6.6. -9	6.16. 12
6.7. 7,75	6.17. 2
6.8. 10	6.18. 6
6.9. 1	6.19. 2
6.10. -36,5	6.20. 0,6

№7. Значения выражений. Задачи

№7.1 #83437

Найдите значение выражения $\log_2 56 - \log_2 7$.

№7.2 #2549

Найдите значение выражения $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

№7.3 #1529

Найдите значение выражения $\frac{\sin 136^\circ \cdot \cos 136^\circ}{\sin 272^\circ}$.

№7.4 #2313

Найдите значение выражения $\frac{24}{\sin^2 127^\circ + 1 + \sin^2 217^\circ}$.

№7.5 #18118

Найдите значение выражения $\sqrt{8} \sin^2 \frac{5\pi}{8} - \sqrt{2}$.

№7.6 #16744

Найдите значение выражения $4\sqrt{2} \cos^2 \frac{15\pi}{8} - 2\sqrt{2}$.

№7.7 #20598

Найдите значение выражения $7\sqrt{2} \cdot \sin \frac{15\pi}{8} \cos \frac{15\pi}{8}$.

№7.8 #61694

Найдите значение выражения $-4\sqrt{3} \cos(-750^\circ)$.

№7.9 #1538

Найдите значение выражения $\frac{14 \cos \alpha - 4 \sin \alpha - 7}{-21 \cos \alpha + 6 \sin \alpha + 4}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{2}$.

№7.10 #16708

Найдите значение выражения $\sqrt{3} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} \sin^2 \frac{5\pi}{12}$.

№7.11 #892

Найдите $\sin^2 2x$, если $\sin x = 0,3$.

№7.12 #18117

Найдите значение выражения $\frac{18 \sin 23^\circ}{\sin 337^\circ}$.

№7.13 #663

Найдите значение выражения $\frac{2 + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

№7.14 #1530

Найдите значение выражения $\frac{3 \cos^2 39^\circ - 1,5}{\cos 78^\circ}$.

№7.15 #1537

Найдите $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $-41 \sin^2 \alpha + 17 \cos^2 \alpha = 16$.

№7.16 #61695

Найдите значение выражения $2\sqrt{3} \operatorname{tg}(-300^\circ)$.

№7.17 #863

Найдите значение выражения $\frac{32}{\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{25\pi}{4}}$.

№7.18 #61693

Найдите значение выражения $4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{3}$.

№7.19 #45218

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

№7.20 #208

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{5 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \frac{3}{16} \cos \alpha} = 4$.

№7.21 #207

Найдите значение выражения $\frac{4 \cos (3\pi - \gamma) + 3 \sin (2,5\pi - \gamma)}{0,5 \sin (0,5\pi + \gamma) - 0,5 \cos (\pi + \gamma)}$ при $\cos \gamma \neq 0$.

№7.22 #2690

Найдите значение выражения $\sin \left(\frac{1001\pi}{2} + \alpha \right)$, если $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\alpha \in (0,5\pi; \pi)$.

№7.23 #15800

Найдите значение выражения $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$.

№7.24 #1951

Найдите значение выражения $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$.

№7.25 #1918

Найдите значение выражения $\frac{x^3 \cdot (x^4)^2}{(x^{-1})^{-7}}$, если $x^2 = 15$.

№7.26 #18471

Найдите значение выражения $\frac{14^{6,4} \cdot 7^{-5,4}}{4^{2,2}}$.

№7.27 #1915

Найдите значение выражения $\frac{22^4 \cdot 3^3}{6^2 \cdot 121^2}$.

№7.28 #51641

Найдите значение выражения $2^{4\sqrt{10}-3} \cdot 2^{1-3\sqrt{10}} : 2^{\sqrt{10}-1}$.

№7.29 #164

Найдите значение выражения $\left(\frac{31^{\frac{1}{3}} \cdot 31^{\frac{7}{30}}}{\sqrt[15]{31}} \right)^2$.

№7.30 #190

Найдите значение выражения $(\log_{17} 289) \cdot \left(\log_{500} \frac{1}{500} \right)$.

№7.31 #17263

Найдите значение выражения $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$.

№7.32 #17298

Найдите значение выражения $\log_{16} 121 - \log_4 2,75$.

№7.33 #22943

Найдите значение выражения $\frac{\lg 100 - \log_4 32}{\lg 0,1}$.

№7.34 #18459

Найдите значение выражения $\log_a (ab^8)$, если $\log_a b = 8$.

№7.35 #17293

Найдите значение выражения $\log_a (a^2 b^3)$, если $\log_a b = -2$.

№7.36 #632

Найдите значение выражения $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} \right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

№7.37 #627

Найдите значение выражения $49^{1 - \log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

№7.38 #669

Найдите значение выражения $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

№7.39 #18457

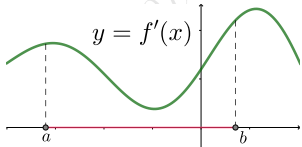
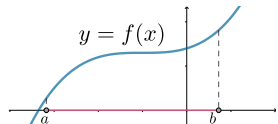
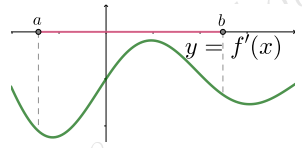
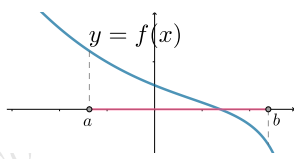
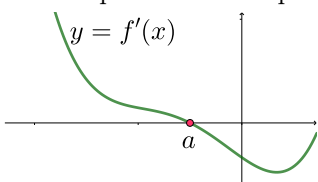
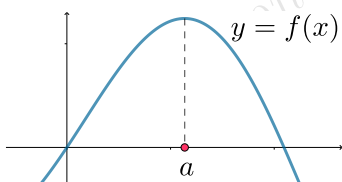
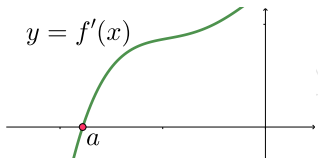
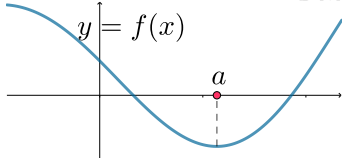
Найдите значение выражения $\frac{2^{\log_9 3}}{2^{\log_9 243}}$.

№7. Значения выражений. Ответы

7.1. 3	7.11. 0,3276	7.21. -1	7.31. 8
7.2. 0,9	7.12. -18	7.22. -0,125	7.32. 1
7.3. 0,5	7.13. 2,3	7.23. -2	7.33. 0,5
7.4. 12	7.14. 1,5	7.24. 0,28	7.34. 65
7.5. 1	7.15. 57	7.25. 225	7.35. -4
7.6. 2	7.16. 6	7.26. 28	7.36. 19
7.7. -3,5	7.17. -64	7.27. 12	7.37. 12,5
7.8. -6	7.18. 2	7.28. 0,5	7.38. 10
7.9. -1,75	7.19. 5	7.29. 31	7.39. 0,25
7.10. -1,5	7.20. 0,25	7.30. -2	

№8,12. Производная и исследование функции. Теория

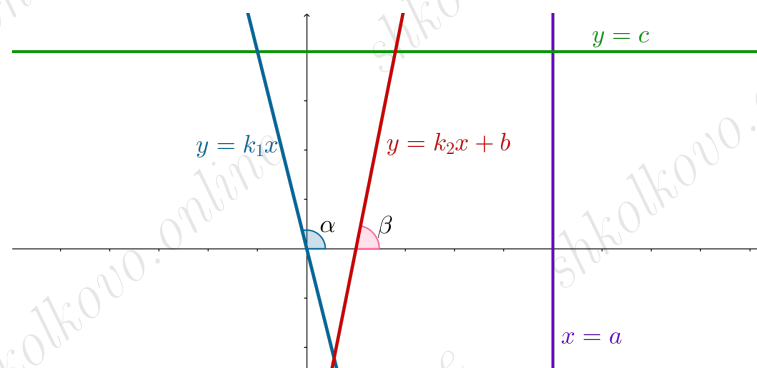
Связь функции и ее производной

Если производная положительна на промежутке $(a; b)$, 	то функция возрастает на промежутке $(a; b)$ 
Если производная отрицательна на промежутке $(a; b)$, 	то функция убывает на промежутке $(a; b)$ 
Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с «плюса» на «минус», если смотреть слева направо, 	то точка $x = a$ является точкой максимума функции 
Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с «минуса» на «плюс», если смотреть слева направо, 	то точка $x = a$ является точкой минимума функции 

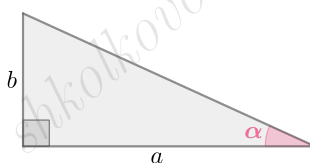
Линейная функция

Для начала вспомним некоторые факты о прямой, так как касательная — это прямая.

- Линейная функция — функция вида $f(x) = kx + b$, где k, b — некоторые числа.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат.
- Графиком $x = a$ является прямая, параллельная оси Oy .
- Графиком $y = c$ является прямая, параллельная оси Ox .
- Для $f(x) = kx + b$ угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox (сокращенно будем говорить «угол наклона»): $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $k_2 = \operatorname{tg} \beta$.



Напомним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к прилежащему:

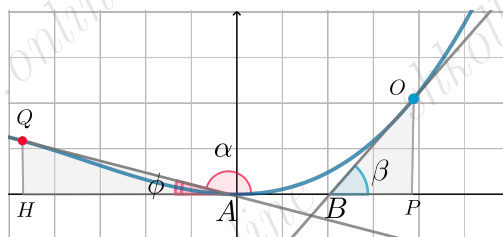


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

- Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$: параллельны, то $k_1 = k_2$; взаимно перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Угол наклона касательной

На рисунке изображены две касательные к графику с углами наклона $\alpha > 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$ в точках Q и O соответственно. Заметим, что $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \beta > 0$.



$\operatorname{tg} \beta$ не составит труда найти из построенного прямоугольного треугольника $\triangle BOP$. А вот с $\operatorname{tg} \alpha$ возникают проблемы. Как их решить?

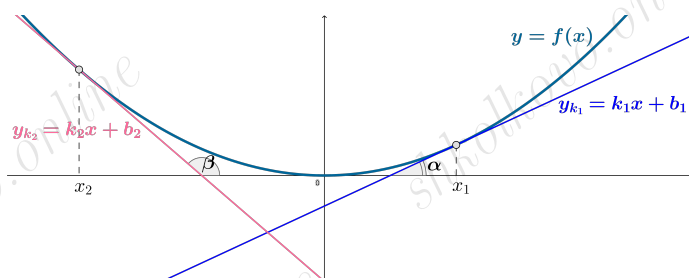
Так как тангенсы смежных углов противоположны, то искать $\operatorname{tg} \alpha$ мы будем через

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg} \alpha| > 0.$$

Найдем $\operatorname{tg} \varphi$ из прямоугольного $\triangle AQH$ и тогда $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi$.

Геометрический смысл производной

- Итак, каков геометрический смысл производной? Если функция в точке x_0 имеет производную, то это значит, что в этой точке можно провести касательную к графику данной функции. Касательная — это некоторая прямая, которая графически выглядит так:



- На чертеже изображены две различные касательные y_{k_1} и y_{k_2} , проведенные к графику функции $f(x)$. Угол наклона первой касательной равен α , угол наклона второй равен β .
- Если нам известно уравнение $y = f(x)$ функции, то, выбрав точку x_0 , в которой мы хотим провести касательную к графику этой функции, можно записать уравнение этой касательной:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- Если переписать уравнение касательной так, чтобы первое слагаемое было kx , второе слагаемое было b , то есть записать в виде $y_k = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, то видно, что

$$\begin{cases} k = f'(x_0) \\ b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \end{cases}$$

- Таким образом, мы видим, что, с одной стороны, угловой коэффициент k касательной, как и любой прямой, равен тангенсу угла наклона α , а с другой стороны, если эта прямая касается графика функции $f(x)$ в точке x_0 , то угловой коэффициент k также равен числу $f'(x_0)$:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Таблица производных

	Функция y	Производная y'
1	a	0
2	x^a	$a \cdot x^{a-1}$
3	e^x	e^x
4	$a^x (a > 0)$	$a^x \cdot \ln a$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
6	$\log_a x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Частные случаи функции (2):

15	x	1
16	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
17	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Правила поиска производной функции

a — константа.

Функция	Производная
$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

План решения №12

1. Взять производную функции, то есть найти $f'(x)$.
2. Найти все точки, в которых производная равна нулю либо не существует.
3. Найти знаки производной на промежутках между точками из предыдущего пункта с помощью метода интервалов.
4. Нарисовать эскиз графика исходной функции (изобразить, на каком промежутке функция возрастает, а на каком убывает) и с его помощью найти точку или значение, которые требуются в задаче.

Пример решения задачи в соответствии с планом

Найдите наибольшее значение функции $y = e^{x-2} \cdot \frac{x-4}{x}$ на отрезке $[1; 4]$.

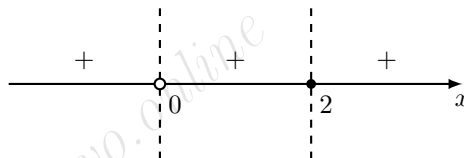
Решение

Обозначим $f(x) = e^{x-2} \cdot \frac{x-4}{x}$.

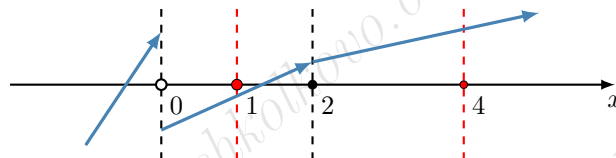
1. Найдем производную функции:

$$f'(x) = (e^{x-2})' \cdot \frac{x-4}{x} + e^{x-2} \cdot \left(\frac{x-4}{x}\right)' = e^{x-2} \cdot \frac{x-4}{x} + e^{x-2} \cdot \frac{(x-4)'x - (x-4)x'}{x^2} = e^{x-2} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2}.$$

2. Легко видеть, что первый множитель определен и не равен нулю при любом $x \in \mathbb{R}$. Второй множитель зануляется при $x = 2$ и не определен при $x = 0$.
3. Применим метод интервалов для определения знаков производной. Обе критические точки встречаются в четном числе множителей, следовательно, знак в них меняться не будет.



4. Теперь можем нарисовать эскиз графика. На всех промежутках производная положительна, то есть исходная функция будет возрастать (не забываем, что в точке 0 будет разрыв, в ней функция не определена). Выделим на эскизе интересующий нас отрезок $[1; 4]$.



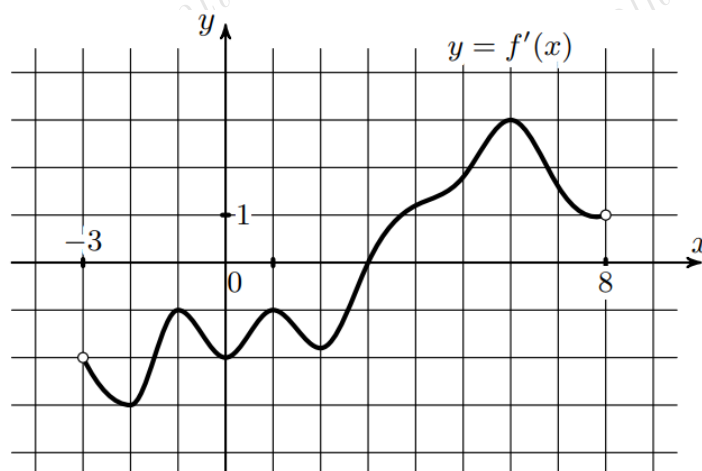
На полученном эскизе отлично видно, что на всем отрезке $[1; 4]$ исходная функция f определена и возрастает, следовательно, максимальное значение на отрезке достигается в самой правой его точке $x = 4$. Чтобы решить задачу, осталось найти значение f в точке $x = 4$:

$$f(4) = e^{4-2} \cdot \frac{4-4}{4} = 0.$$

№8. Производная. Задачи

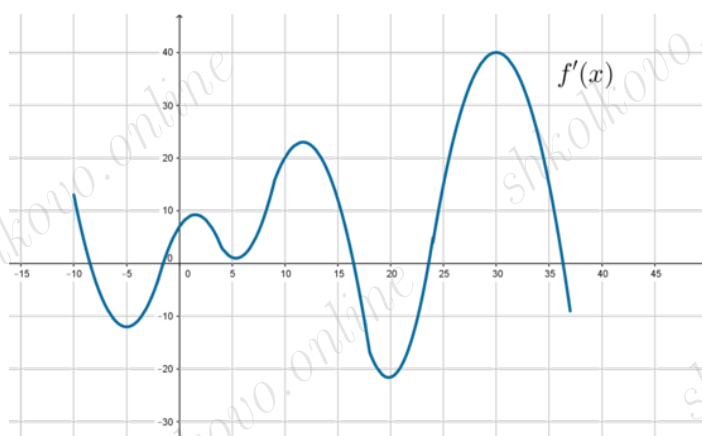
№8.1 #83438

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



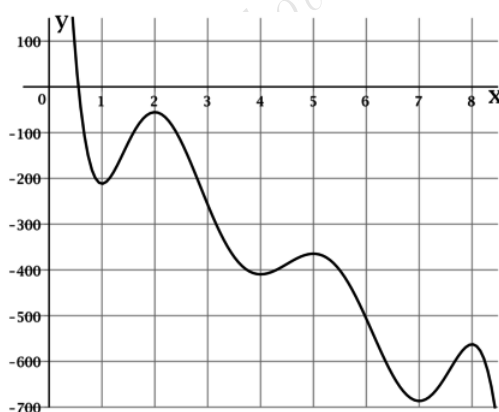
№8.2 #2394

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-10; 37]$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 37]$.



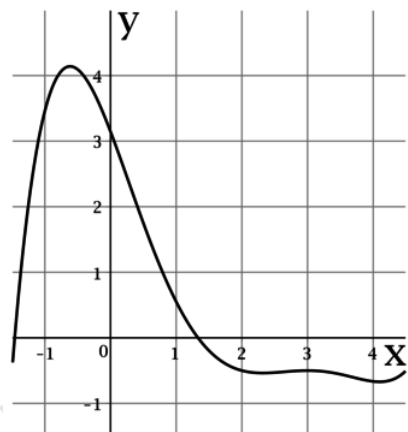
№8.3 #279

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(0; 5; 8; 5)$. Определите по рисунку количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[2; 5; 5; 5]$.



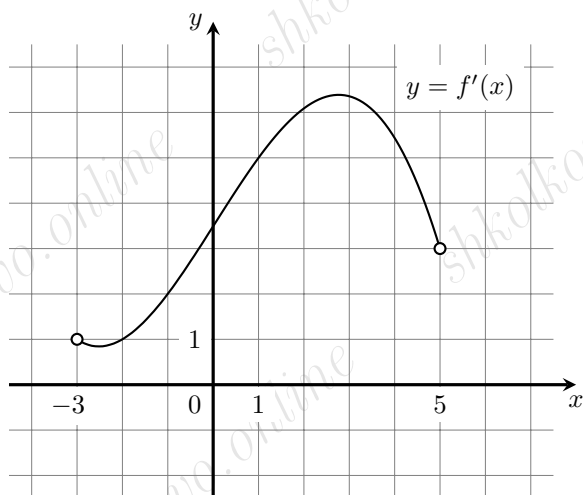
№8.4 #267

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1,5; 4,5)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



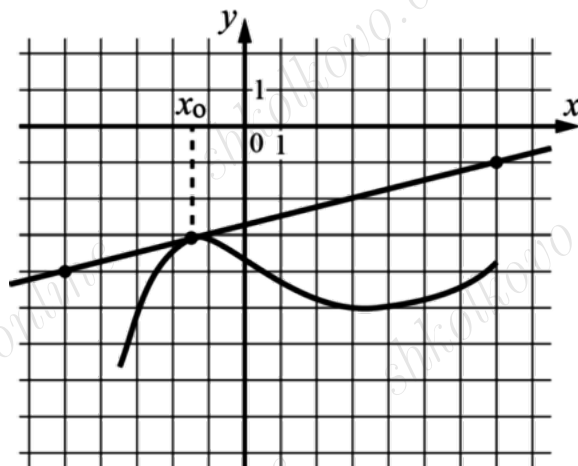
№8.5 #1264

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 5)$. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой 1.



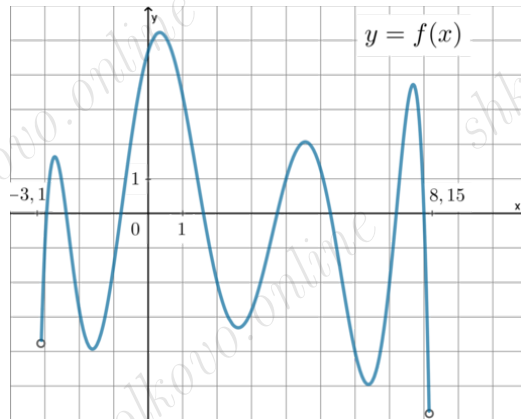
№8.6 #1279

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



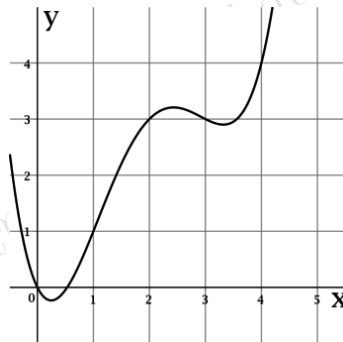
№8.7 #2606

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3,1; 8,15)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 12$.



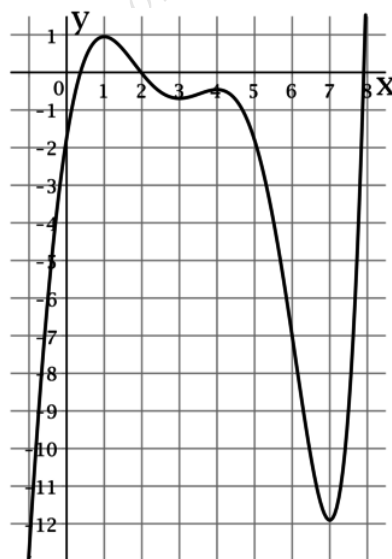
№8.8 #1584

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-0,5; 4,3)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



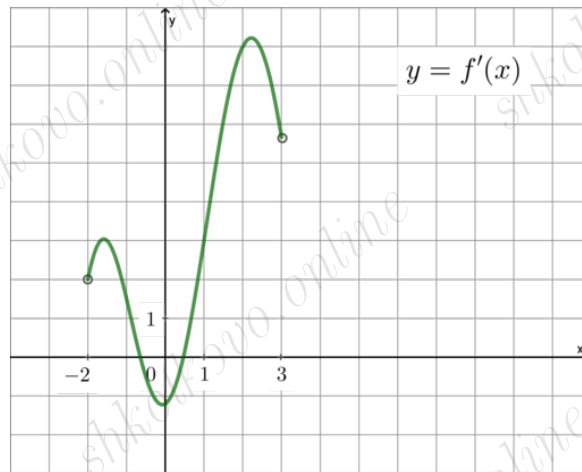
№8.9 #1587

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 8)$. В какой точке отрезка $[2; 5]$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение?



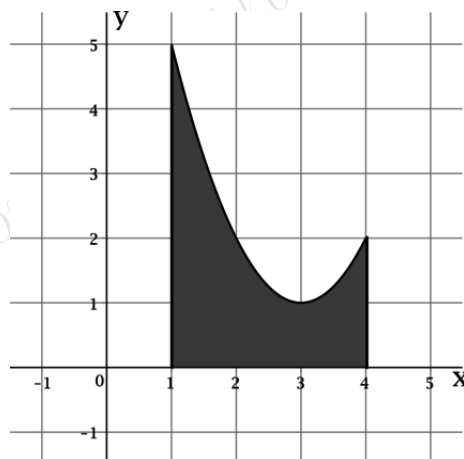
№8.10 #2607

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 3)$. Найдите на отрезке $[-1; 2]$ абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 1$ или совпадает с ней.



№8.11 #2696

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

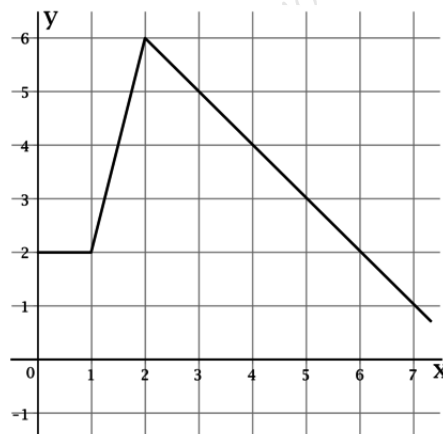


№8.12 #278

$F(x) = 2x^4 - x^3 + 7x - \pi$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите $f(1)$.

№8.13 #1599

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Вычислите по рисунку $F(0) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$.



№8. Производная. Ответы

8.1. 3

8.2. 2

8.3. 2

8.4. 0

8.5. 5

8.6. 0,25

8.7. 7

8.8. 3

8.9. 2

8.10. 1

8.11. 6

8.12. 12

8.13. -6

№12. Исследование функции. Задачи

№12.1 #83442

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 108x + 11$.

№12.2 #32447

Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x + 3) + 7$.

№12.3 #32222

Найдите наибольшее значение функции $y = 4 \cos x - 20x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№12.4 #32450

Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

№12.5 #32215

Найдите наибольшее значение функции $y = 2 \cos x - \frac{18}{\pi}x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

№12.6 #32212

Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \cos x + 6\sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

№12.7 #32199

Найдите точку минимума функции $y = (0,5 - x) \cos x + \sin x$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

№12.8 #32491

Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.

№12.9 #32487

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(11x) - 11x + 9$ на отрезке $\left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22}\right]$.

№12.10 #32475

Найдите наибольшее значение функции $y = (3x^2 - 36x + 36) \cdot e^x$ на отрезке $[-1; 4]$.

№12.11 #32458

Найдите точку максимума функции $y = 0,5x^2 - 7x + 12 \ln x + 8$.

№12.12 #32221

Найдите наибольшее значение функции $y = -2 \operatorname{tg} x + 4x - \pi - 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

№12.13 #32471

Найдите наибольшее значение функции $y = (8 - x) \cdot e^{x-7}$ на отрезке $[3; 10]$.

№12.14 #32488

Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x + 3)^3$ на отрезке $[-2,5; 0]$.

№12.15 #32478

Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 2)^2 \cdot e^{x-2}$ на отрезке $[1; 4]$.

№12.16 #2355

Найдите точку максимума функции $y = (x - 1)^2(2x + 4)^2$.

№12.17 #317

Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{-x^2 + 2 - 6x}$.

№12.18 #311

Найдите точку локального минимума функции $y = (x^2 - 3)e^x$.

№12.19 #2664

Найдите точку минимума функции $y = \log_{2016}(x^2 - 10x + 201)$.

№12.20 #2068

Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ на отрезке $[-15; 15]$.

№12.21 #20618

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9$ на отрезке $[0; 2]$.

№12. Исследование функции. Ответы

12.1. -6

12.2. $-2,5$

12.3. 11

12.4. 1

12.5. 15

12.6. 12

12.7. $0,5$

12.8. -6

12.9. 8

12.10. 36

12.11. 3

12.12. -5

12.13. 1

12.14. -6

12.15. 0

12.16. $-0,5$

12.17. -3

12.18. 1

12.19. 5

12.20. 0

12.21. -7

№9. Прикладные задачи

№9.1 #83439

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч²). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1 км, приобрести скорость 120 км/ч. Ответ дайте в км/ч².

№9.2 #17054

Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над Землей, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{\frac{Rh}{500}},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 24 км. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см.

На какое наименьшее количество ступенек надо подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 32 км?

№9.3 #17055

При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, изменяется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура в градусах Цельсия. При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

№9.4 #45951

Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 60^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 6^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 3375° . Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

№9.5 #45952

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика H (в м) вычисляется по формуле

$$H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha),$$

где $v_0 = 12$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла α мячик пролетит над стеной высотой 4,4 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

№9.6 #45953

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 192 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

№9.7 #45954

Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха объёмом $V_1 = 26$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 (в л). Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 8,5 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 будет занимать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 25500 Дж. Ответ дайте в литрах.

№9.8 #45955

Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле

$$A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|},$$

где ω — частота вынуждающей силы (в с^{-1}), A_0 — постоянный положительный параметр, $\omega_p = 345 \text{с}^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ дайте в с^{-1} .

№9.9 #45962

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 95 см до 115 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 140 см до 160 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

№9.10 #45963

Груз массой 0,25 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 1,6$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 56 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

№9.11 #45964

Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_n = 20^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , измеряемое в метрах, вода охлаждается от начальной температуры $T_B = 72^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_B - T_n}{T - T_n}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,5$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 100 м.

№9.12 #45965

Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от -1 до 1. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вчетверо, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность, то есть

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr}{A}$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 1.

№9.13 #45966

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 км, приобрести скорость 100 км/ч . Ответ дайте в км/ч^2 .

№9. Прикладные задачи. Ответы

9.1. 7200

9.8. 115

9.2. 175

9.9. 96

9.3. 50

9.10. 0,32

9.4. 25

9.11. 33

9.5. 60

9.12. 7

9.6. 6

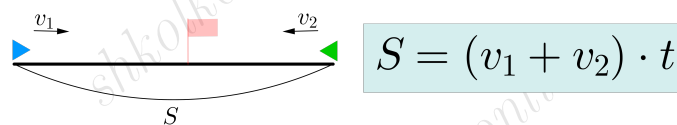
9.13. 6250

9.7. 6,5

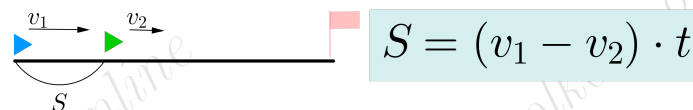
№10. Текстовые задачи. Теория

Движение по прямой. Основные принципы

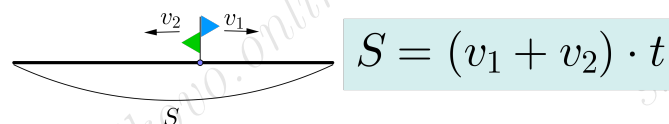
- Основная формула — $S = v \cdot t$, где S — расстояние, v — скорость, t — время.
- Средняя скорость $v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}}$ равна отношению общего пройденного расстояния к общему затраченному времени.
- Нужно внимательно следить за тем, чтобы все было в одних единицах измерения. Например, если скорость дана в км/ч, а время в мин, то его стоит перевести в часы.
- Если два объекта выехали одновременно навстречу друг другу, то они сближаются со скоростью, равной сумме их скоростей. Тогда расстояние, на котором они находились друг от друга изначально, равно произведению скорости сближения и времени, через которое они встретились.



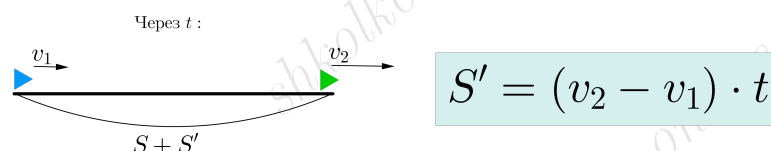
- Если один объект догоняет другой, то есть объекты движутся в одном направлении и скорость первого больше скорости второго, то скорость их сближения равна разности большей и меньшей скоростей. И тогда расстояние, которое было между ними изначально, равно произведению скорости их сближения и времени, через которое один догнал другого.



- Если два объекта выехали одновременно из одной точки в разных направлениях, то скорость их удаления равна сумме их скоростей. И для того, чтобы найти расстояние, которое будет между ними через время t , нужно это время умножить на скорость удаления.



- Если два объекта находились на расстоянии S и выехали в одном направлении, но скорость первого меньше скорости второго, то скорость удаления одного от другого равна разности большей и меньшей скоростей. И для того, чтобы найти расстояние, на которое они удалились за время t , нужно это время умножить на скорость удаления.



Движение по воде с течением. Основные принципы

- Верна та же формула: $S = v \cdot t$.
- Пусть v_c — собственная скорость тела (скорость в неподвижной воде), $v_{\text{теч}}$ — скорость течения. Тогда если тело движется по реке *по течению*, то скорость движения тела равна $v = v_c + v_{\text{теч}}$. Значит, $S = (v_c + v_{\text{теч}}) \cdot t$.

- Если тело движется по реке *против течения*, то скорость движения тела равна $v = v_c - v_{\text{теч}}$.
Значит, $S = (v_c - v_{\text{теч}}) \cdot t$.
- Плот — это тело, у которого собственная скорость $v_c = 0$. Значит, плот может плыть *только по течению* и только со скоростью течения.
- Все остальное в данных задачах ничем не отличается от задач на прямолинейное движение. Рассуждать, составлять таблицу и т.п. в них стоит так же, как и в задачах на движение по прямой.

Текстовые задачи на смеси, сплавы, растворы. Основные принципы

- Задачи этого типа о следующем (говорим на примере раствора):
 - есть раствор некоторого вещества, то есть жидкость, представляющая смесь двух веществ: некоторого активного вещества, к примеру, кислоты, и другого (пусть это всегда будет вода). Активное вещество в растворе находится в некоторой концентрации (процент содержания этого вещества в растворе) и ищется по формуле

$$\text{концентрация в-ва} = \frac{\text{масса вещества}}{\text{масса раствора}} \cdot 100\%$$

- таких растворов, активное вещество которых одинаково, но разной концентрации, несколько, и их смешивают с целью получить новый раствор с новой концентрацией.
- из величин, фигурирующих в задаче: массы (объемы) растворов и активного вещества в них, концентрации активных веществ. С помощью этих величин требуется составить несколько уравнений и найти нужную величину.
- уравнение почти всегда имеет вид (например, смешали два раствора и получили третий):

$$\text{масса акт. в-ва раствора 1} + \text{масса акт. в-ва раствора 2} = \text{масса акт. в-ва смеси}$$

- Из формулы для нахождения концентрации следует формула, по которой удобно быстро находить массу активного вещества в растворе:

$$\text{масса в-ва} = \frac{\text{концентрация в-ва}}{100\%} \cdot \text{масса раствора}$$

- При смешивании растворов их массы суммируются, суммируются массы активных веществ (об этом и говорит получаемое нами уравнение), но вот концентрации активных веществ — нет!
- Если в задаче фигурирует вода, то это значит, что концентрация активного вещества в ней равна 0%.

Текстовые задачи на совместную работу. Основные принципы

- Такие задачи в каком-то смысле похожи на задачи на движение, только расстояние здесь является работой, а скорость — производительностью. Верна формула $A = p \cdot t$, где A — работа, p — производительность, t — время работы.
- Если рабочие трудятся одновременно, то их общая производительность равна сумме их производительностей.
- Работа обычно измеряется в количестве произведенного товара, производительность — в количестве товара, произведенного за единицу времени, а время — в минутах, часах и т.п.
- Работу можно принять за 1, если ей не присвоено никакого значения, да это логически и нельзя сделать. Можно, конечно, вводить неизвестную A , но тогда полученное вами уравнение можно будет разделить на A , то есть значение работы ни на что не повлияет.
- Так же, как и задачи на движение, задачи на работу удобно решать составлением таблицы.

№10. Текстовые задачи. Задачи

№10.1 #83440

Два велосипедиста одновременно отправляются в 190-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 9 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 9 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

№10.2 #20863

Свежевыжатый яблочный сок содержит 12% сахара. Сколько литров воды надо добавить к 2 литрам сока, чтобы содержание сахара стало 8%?

№10.3 #303

Один маляр может покрасить забор за 2 часа, а второй маляр тот же забор — за 3 часа. За сколько часов маляры покрасят такой же забор, работая вместе?

№10.4 #290

Два бегуна стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой дорожки, длина которой 400 метров. Через сколько минут бегуны поравняются в первый раз, если первый бегун за час пробегает на 1 километр больше, чем второй?

№10.5 #20841

Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

№10.6 #1617

Из точки А круговой орбиты далёкой планеты одновременно в одном направлении вылетели два метеорита. Скорость первого метеорита на 10000 км/ч больше, чем скорость второго. Известно, что впервые после вылета они встретились через 8 часов. Найдите длину орбиты в километрах.

№10.7 #1633

Николай прорешал сборник задач, в котором было 1260 задач, ежемесячно увеличивая количество задач на одно и то же число по сравнению с предыдущим месяцем. За первый и последний месяц в сумме Николай прорешал 210 задач. Сколько месяцев Николай прорешивал сборник?

№10.8 #1638

Степан за несколько дней отжался в сумме 330 раз, ежедневно увеличивая количество отжиманий на одно и то же число. В первый и последний день в сумме Степан отжался 60 раз. За сколько дней Степан отжался в сумме 330 раз?

№10.9 #18129

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 45% меди, второй — 20% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 30 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 40% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

№10.10 #23560

Расстояние между городами А и В равно 435 км. Из города А в город В со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

№10.11 #20843

Имеется два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

№10.12 #20840

Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров?

№10.13 #17058

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 105 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

№10.14 #15804

Моторная лодка прошла против течения реки 153 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 8 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

№10.15 #14913

За 200 км до станции назначения поезд был задержан у семафора на час. Затем машинист увеличил на 10 км/ч скорость, с которой поезд ехал до остановки и прибыл в пункт назначения по расписанию. С какой скоростью поезд ехал после остановки? Ответ дайте в км/ч.

№10.16 #12977

Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 36 км. Путь из A в B занял у туриста 10 часов, из которых 2 часа ушло на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

№10.17 #2347

Два поезда движутся навстречу друг другу — один со скоростью 70 км/ч, другой со скоростью 80 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд прошёл мимо него за 12 секунд. Какова длина первого поезда? Ответ дайте в метрах.

№10.18 #22947

Автомобиль двигался первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 56 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

№10.19 #1616

Два мотоциклиста стартуют одновременно из одной точки круговой трассы в разных направлениях. Скорость первого мотоциклиста в два раза больше, чем скорость второго. Через час после старта они встретились в третий раз. При этом считайте, что в первый раз они встретились уже после старта. Найдите скорость первого мотоциклиста, если длина трассы 40 км. Ответ дайте в км/ч.

№10.20 #685

Кот Мурзик бежит от пса Шарика по кругу. Скорости Мурзика и Шарика постоянны. Известно, что Мурзик бежит в 1,5 раза быстрее Шарика и за 10 минут они в сумме пробегают два круга. За сколько минут Шарик пробежит один круг?

№10.21 #684

Два спортсмена стартуют одновременно в противоположных направлениях из двух диаметрально противоположных точек круговой дорожки, длина которой 400 метров. Первый бегун за час пробегает на 1,4 километра больше, чем второй, причём скорость первого бегуна в 1,2 раза больше, чем скорость второго. Найдите отношение одного часа ко времени в часах, через которое бегуны встретятся впервые.

№10.22 #1980

Яхта проплыла по течению реки 144 км и вернулась обратно, после чего проплыла ещё 36 км по течению реки. Известно, что время, затраченное на движение яхты по течению, равно времени, затраченному на движение яхты против течения. При этом скорость яхты в неподвижной воде равна 18 км/ч. Найдите скорость течения. Ответ дайте в км/ч.

№10.23 #23566

Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 10 минут. Чему равна скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 минут, а скорости обоих гонщиков постоянны? Ответ дайте в км/ч.

№10.24 #23563

Игорь и Паша красят весь забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

№10.25 #291

Из города M по круговой дороге длиной 220 километров вышел турист, а через 55 минут следом за ним из города M отправился автомобилист. Через 5 минут после отправления он догнал туриста в первый раз, а ещё через 4 часа после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость туриста, если известно, что она меньше 10 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

№10. Текстовые задачи. Ответы

10.1. 19	10.10. 240	10.19. 80
10.2. 1	10.11. 18	10.20. 12,5
10.3. 1,2	10.12. 25	10.21. 77
10.4. 12	10.13. 17,5	10.22. 2
10.5. 15	10.14. 13	10.23. 108
10.6. 80000	10.15. 50	10.24. 8
10.7. 12	10.16. 6	10.25. 5
10.8. 11	10.17. 500	
10.9. 50	10.18. 49,28	

№11. Графики. Теория

График прямой

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — постоянные действительные коэффициенты. Графиком линейной функции является прямая.

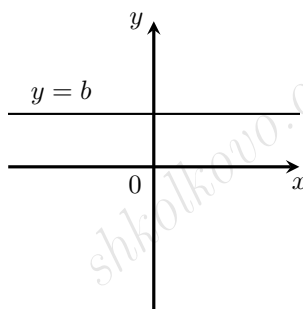
Коэффициент k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Число b называется **свободным членом** и равно ординате точки пересечения графика прямой с осью Oy .

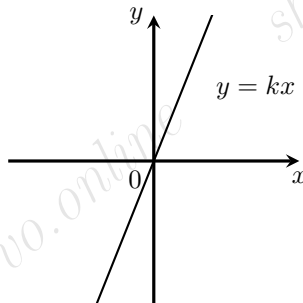
Рассмотрим точки пересечения графика функции с осями в зависимости от значений коэффициентов k и b .

1. При $k = 0$ имеем функцию $y = b$. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси абсцисс, но не совпадающая с ней.

Таким образом, множество значений функции состоит из единственного элемента b . Заметим, что при $b = 0$ график функции $y = b$ совпадает с осью Ox .



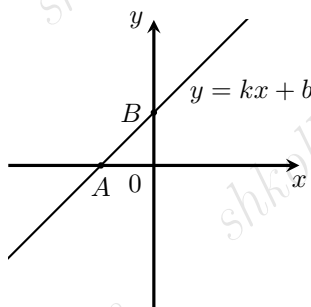
2. При $k \neq 0$, $b = 0$ имеем функцию $y = kx$. В этом случае график функции — прямая, проходящая через точку начала координат $(0; 0)$. Действительно, $y = k \cdot 0 = 0$.



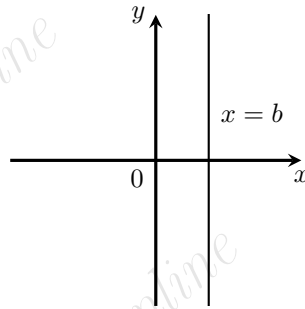
3. При $k \neq 0$, $b \neq 0$ имеем функцию $y = kx + b$. В таком случае график линейной функции — прямая, пересекающая ось Ox в точке $A(-\frac{b}{k}; 0)$, а ось Oy — в точке $B(0; b)$:

$$0 = k \cdot x + b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{k}$$

$$y = k \cdot 0 + b \Rightarrow y = b$$



4. В предыдущих пунктах мы описали все прямые, кроме вертикальных. Они задаются уравнением $x = b$. При $b = 0$ график функции $x = b$ совпадает с осью Oy .



Взаимное расположение прямых

Графики прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ **параллельны**, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. При $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ графики функций совпадают.

Графики прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ **перпендикулярны**, если $k_1k_2 = -1$.

Как задать прямую по двум точкам

Пусть прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(2; 2)$ и $B(10; 4)$. Подставим значения абсцисс и ординат в уравнение прямой и получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2 = 2 \cdot k + b, \\ 4 = 10 \cdot k + b. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$4 - 2 = 10 \cdot k - 2 \cdot k + b - b = 8 \cdot k$$

$$2 = 8 \cdot k$$

$$k = \frac{2}{8} = 0,25$$

Подставим найденное значение коэффициента k в одно из уравнений:

$$2 = 2 \cdot 0,25 + b$$

$$2 = 0,5 + b$$

$$b = 1,5.$$

Таким образом, уравнение прямой имеет вид $y = 0,25x + 1,5$.

Можно определить коэффициент k другим способом. Коэффициент k отвечает за угол наклона прямой. Он равен тангенсу угла наклона прямой. По условию прямая проходит через точки $(2; 2)$ и $(10; 4)$. Если прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то тангенс угла ее наклона равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{4 - 2}{10 - 2} = \frac{2}{8} = 0,25$$

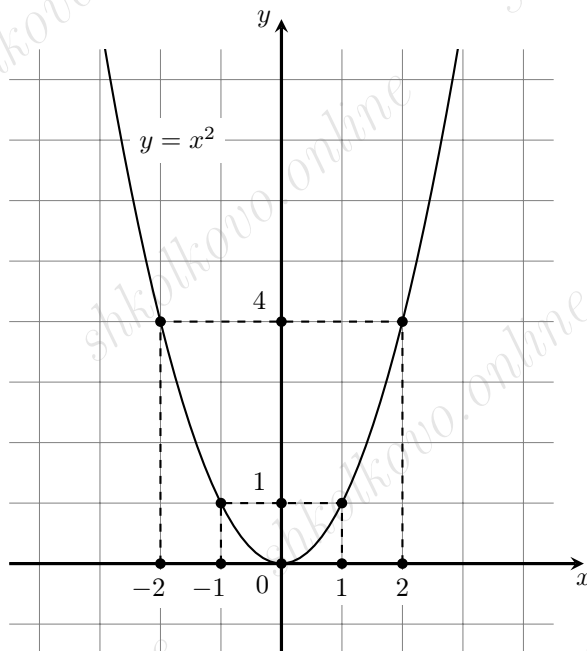
Остальные части решения будут совпадать.

График квадратичной функции (парабола)

Рассмотрим самый простой график параболы $y = x^2$. Его можно построить по точкам:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	4	4

Тогда мы получим такую симметричную картинку:



У графика параболы есть несколько важных понятий:

- Вершина
- Ветки
- Растяжение

В общем виде уравнение параболы выглядит так:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Но в таком виде неудобно работать с параболой, поэтому в задачах мы будем использовать следующий вид:

$$y = a(x - k)^2 + n.$$

Рассмотрим коэффициент a . Он отвечает за направление веток и растяжение параболы. Если $a > 0$, то ее ветки направлены вверх, если же $a < 0$, то ветки направлены вниз. Далее мы поймем, как коэффициент a отвечает за растяжение, но для начала узнаем как можно определить координаты вершины параболы.

Вершина параболы, заданной уравнением $y = a(x - k)^2 + n$, имеет координаты $(k; n)$. Далее мы докажем этот факт, но сначала рассмотрим несколько примеров.

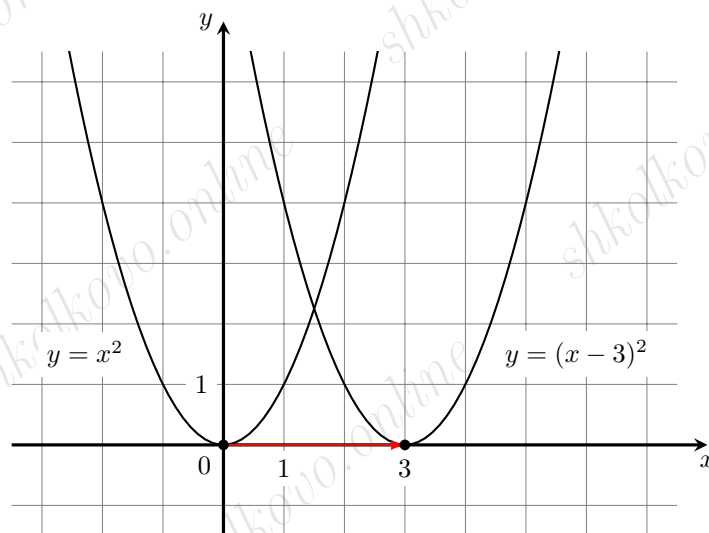
Пример 1

Пусть парабола задана уравнением

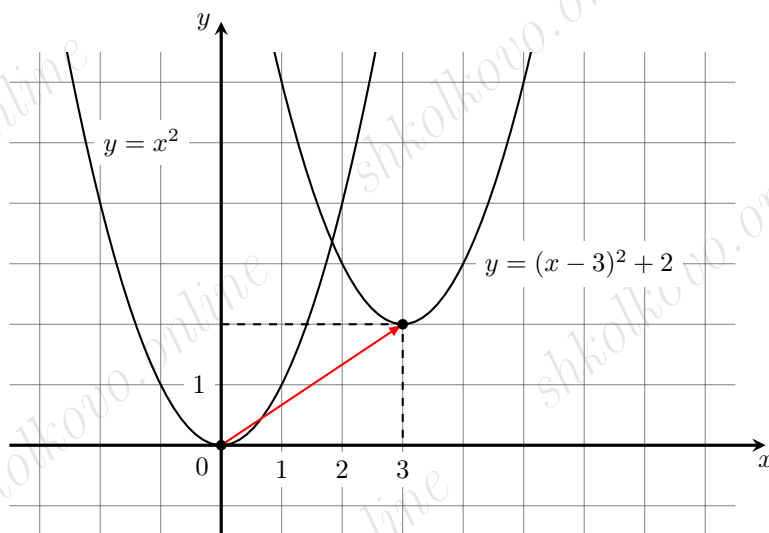
$$y = (x - 3)^2;$$

$$y = (x - 3)^2 + 0.$$

В этом уравнении число «-3» отвечает за сдвиг графика по оси Ox на 3 вправо, а число «0» — за сдвиг по оси Oy , то есть по этой оси график никуда не сдвинут. Значит, вершина параболы находится в точке $(3; 0)$.



Если бы парабола была задана уравнением $y = (x - 3)^2 + 2$, то вершина бы сдвинулась еще на 2 вверх по оси Oy , а ее координаты бы были равны $(3; 2)$.



Теперь поймем почему же вершина параболы действительно сдвинулась в точку $(3; 2)$. Вершина параболы находится в точке ее минимума, если ветки параболы направлены вверх. Если же ветки параболы направлены вниз, то вершина параболы находится в точке ее максимума. Тогда рассмотрим уравнение нашей параболы

$$y = (x - 3)^2 + 2.$$

Ветки такой параболы направлены вверх, так как $1 > 0$. Значит, вершина параболы находится в ее точке минимума.

Заметим, что выражение $(x - 3)^2 \geq 0$, так как это квадрат. Значит,

$$(x - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow y = (x - 3)^2 + 2 \geq 2.$$

Следовательно, вершина параболы находится в той точке, в которой

$$(x - 3)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Тогда точка $(3; 2)$ действительно является вершиной параболы $y = (x - 3)^2 + 2$, так как $x = 3$ — точка минимума $y = (x - 3)^2 + 2$, а $y = 2$ — минимальное значение параболы.

Значит, чтобы понять в какой точке находится вершина параболы $y = (x - k)^2 + n$ нужно понять когда $(x - k)^2 = 0$. Тогда вершиной параболы $y = (x + 3)^2 + 2$ является точка $(-3; 2)$.

Мы научились определять координаты вершины параболы и направление веток параболы. Теперь поймем как коэффициент a влияет на растяжение параболы.

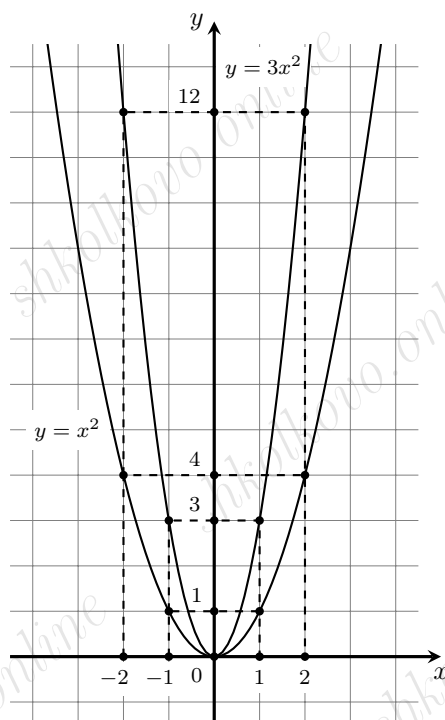
Пример 2

Пусть парабола задана уравнением $y = 3x^2$.

Тогда заметим, что мы можем легко получить график этой параболы из графика $y = x^2$:

x	0	1	-1	2	-2
$y = x^2$	0	1	1	4	4
$y = 3x^2$	0	3	3	12	12

Тогда график параболы $y = 3x^2$ будет выглядеть так:



Пример 3

Пусть парабола задана уравнением $y = 2(x - 1)^2 + 2$.

Сначала найдем вершину этой параболы. Для этого нам нужно определить когда $2(x - 1)^2 = 0$.

$$2(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 + 2 = 2.$$

Тогда вершина параболы $y = 2(x - 1)^2 + 2$ находится в точке $(1; 2)$. Так как $2 > 0$, ветки параболы будут направлены вверх. Теперь, когда мы нашли вершину параболы, мы можем «создать» для себя новые оси. Новой осью абсцисс будет прямая $y = 2$, а осью ординат — прямая $x = 1$. Тогда в полученной системе координат нам нужно просто построить график параболы $y = 2x^2$. Итак, построим этот график:

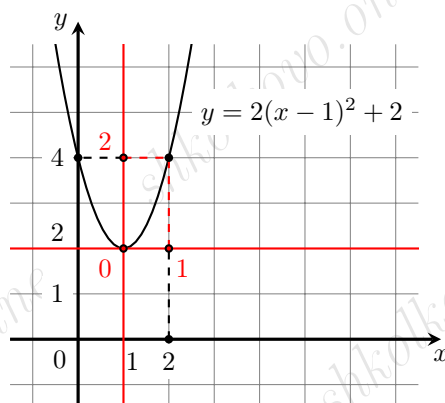
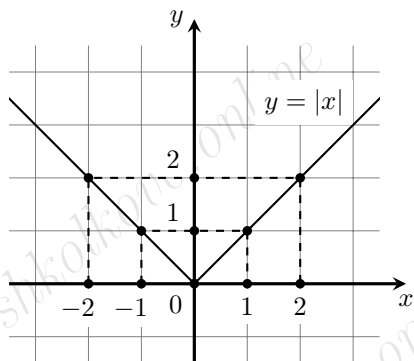


График модуля

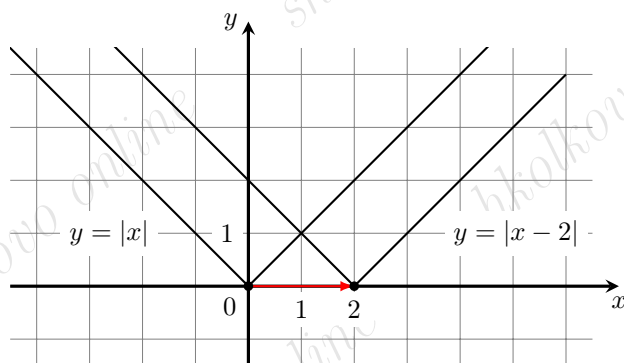
Сейчас рассмотрим график модуля $y = a|x - b| + c$. Сначала построим график $y = |x|$. Его также, как и график параболы $y = x^2$, можно строить по точкам:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	2	2

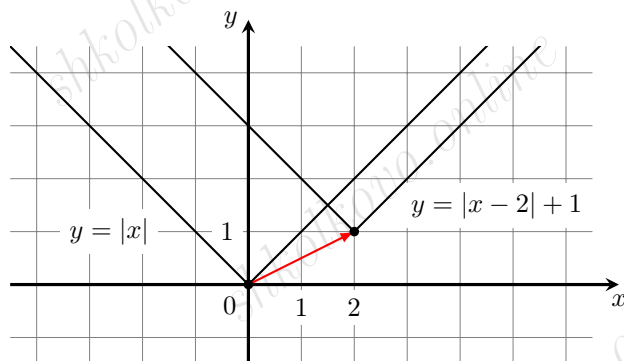
Тогда мы получим такую «галочку» модуля:



Аналогично построению графика параболы, график модуля $y = |x - 2|$ получается с помощью сдвига вершины графика $y = |x|$ на 2 вправо, так как при $x = 2$ выражение $|x - 2|$ принимает свое минимальное значение, которое равно 0.



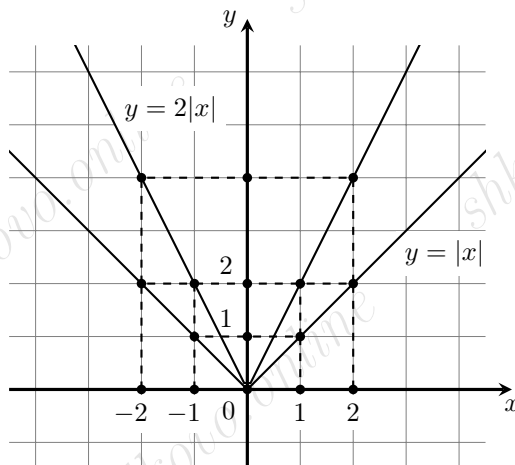
Тогда график модуля $y = |x - 2| + 1$ получается с помощью сдвига вершины графика $y = |x|$ на 2 вправо и на 1 вверх.



Посмотрим как влияет на растяжение коэффициент a . Для этого рассмотрим график модуля $y = 2|x|$:

x	0	1	-1	2	-2
$y = x $	0	1	1	2	2
$y = 2 x $	0	2	2	4	4

Тогда легко построить график этого модуля:



Аналогично графикам параболы, знак коэффициента a отвечает за направление веток. Значит, по тем же рассуждениям, что и для графика параболы, можно переходить в координаты вершины «уголка» модуля $y = a|x - b| + c$ и строить в них график $y = a|x|$.

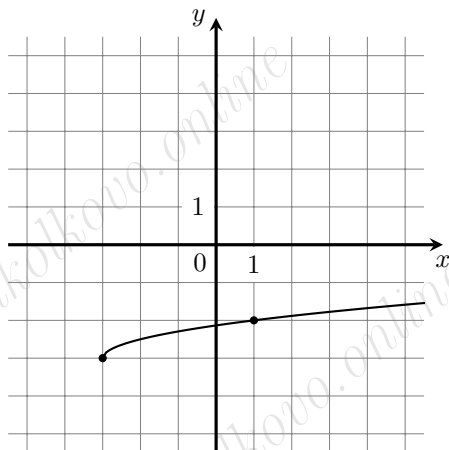
График квадратного корня

Рассмотрим функцию $y = a\sqrt{x - b} + c$. Аналогично графикам параболы и модуля коэффициент a отвечает за растяжение и направление ветки графика квадратного корня, а коэффициенты b и c — за расположение его вершины. Значит, построив график квадратного корня $y = \sqrt{x}$ и сдвинув и растянув его, мы можем получить любой график вида $y = a\sqrt{x - b} + c$.

Важно заметить, что функция существует, только если выражение под корнем неотрицательно, то есть

$$x - b \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq b.$$

Пример графика функции $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} - 3$:



Подытожим все, что мы узнали. Уравнения всех трех типов функций, которые были рассмотрены, могут быть восстановлены по одному алгоритму:

- 1) Нахождение коэффициентов b и c по координатам вершины графика. Определение знака коэффициента a по направлению веток.
- 2) Переход в систему координат, связанную с найденной вершиной.
- 3) Сравнение графика нашей функции с графиком «эталонной» и нахождение коэффициента a .

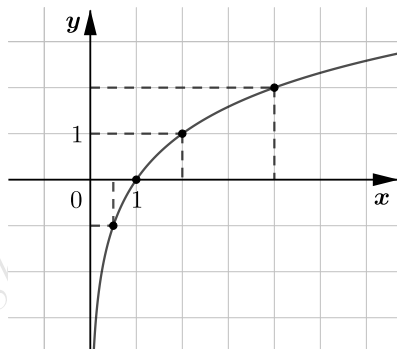
Наша функция	Эталонная функция
$y = a(x - b)^2 + c$	$y = x^2$
$y = a x - b + c$	$y = x $
$y = a\sqrt{x - b} + c$	$y = \sqrt{x}$

График логарифма

Рассмотрим график логарифма $y = \log_2 x$. Составим таблицу значений:

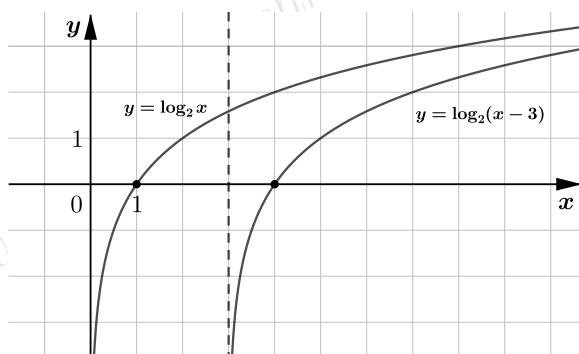
x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	0	1	2	-1	-2

1) У функции логарифма есть ОДЗ — ее аргумент должен быть строго положителен, то есть в нашем случае $x > 0$. Заметим, что при приближении аргумента к 0, значение самой функции будет стремиться к $-\infty$. Значит, у графика функции $y = \log_2 x$ есть вертикальная асимптота $x = 0$, то есть ось Oy . Теперь построим график $y = \log_2 x$:



Теперь рассмотрим функцию $y = \log_2(x - 3)$. По ОДЗ: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

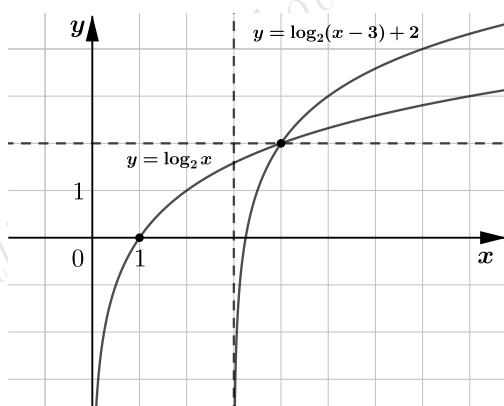
Это значит, что аналогично графику параболы, график логарифма $y = \log_2(x - 3)$ получается сдвигом графика $y = \log_2 x$ на 3 вправо, так как асимптотой теперь является прямая $x = 3$.



2) Если у нас есть функция $y = \log_a x$, то она возрастает при $a > 1$ и убывает при $a < 1$.

3) Любой график логарифма пересекается с осью Ox . Рассмотрим это пересечение. Она примечательна тем, что в ней значение функции равно 0.

Мы уже поняли как график, а следовательно и его точка пересечения с осью Ox , сдвигается по вертикали. Теперь рассмотрим функцию $y = \log_2(x - 3) + 2$. В точке $x = 4$, где предыдущая функция принимала значение 0, рассматриваемая функция принимает значение 2. Значит, график функции $y = \log_2(x - 3) + 2$ в стандартных координатах будет выглядеть так же, как и график функции $y = \log_2 x$ в координатах, образованных прямыми $x = 3$ и $y = 2$. Теперь можем построить график логарифма $y = \log_2(x - 3) + 2$:

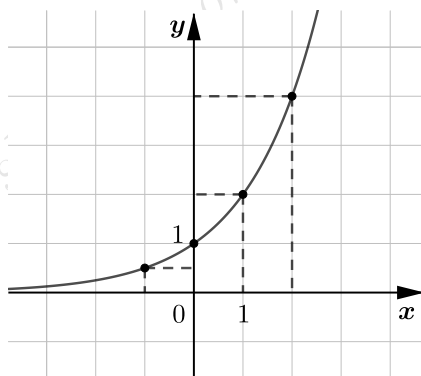


Если перед самым логарифмом будет стоять какой-то коэффициент, то алгоритм нахождения асимптоты не изменится, так как домножение функции на число никак не повлияет на ОДЗ. Такой коэффициент может повлиять только на растяжение графика и его направление.

График показательной функции

Рассмотрим функцию $y = a^x$, где $a > 0$. При $a > 1$ эта функция возрастает, при $a < 1$ — убывает. Составим табличку значения для функции $y = 2^x$ и построим по ней график:

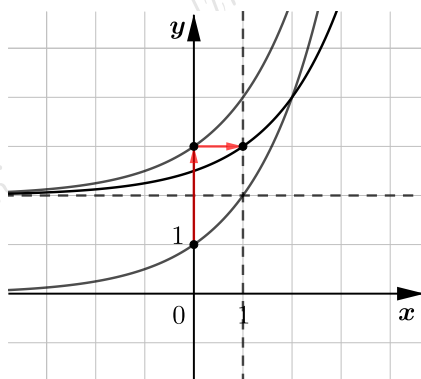
x	1	2	-1	-2	0
y	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



Заметим, что при любом положительном значении a , график функции $y = a^x$ будет проходить через точку $(0; 1)$. Также заметим, что $2^x > 0$. Тогда больших по модулю отрицательных значений x , значение функции будет стремиться к 0, а график — «прижиматься» к прямой $y = 0$.

Если мы рассмотрим функцию $y = 2^x + 2$, то при больших по модулю отрицательных значениях x , график будет «прижиматься» к прямой $y = 2$, так как $2^x + 2 > 2$. Значит, свободный член отвечает за сдвиг по оси Oy .

Теперь рассмотрим функцию $y = 2^{(x-1)} + 2$. График такой функции в стандартных координатах будет соответствовать графику функции $y = 2^x$ в координатах, где осями являются прямые $y = 2$ и $x = 1$. Поймем почему так происходит. Будем следить за точкой $(0; 1)$.



После смещения на 2 вверх, она перешла в точку $(0; 3)$. Теперь найдем такой x , при котором функция $y = 2^{(x-1)} + 2$ принимает значение 3:

$$2^{(x-1)} + 2 = 3 \Leftrightarrow 2^{(x-1)} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

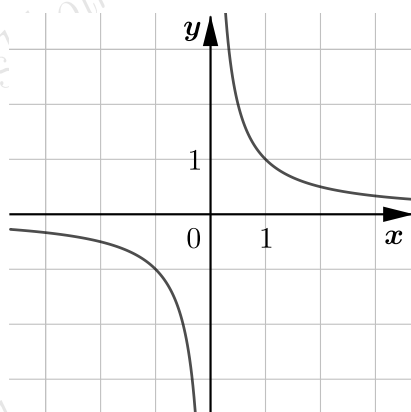
Значит, график действительно сдвинулся еще и на 1 вправо.

График гиперболы

Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. У такой функции есть ОДЗ $x \neq 0$. Также заметим, что

- Если x положителен и стремится к 0, то значение функции стремится к ∞ , а график прижимается к оси Oy справа.
- Если x отрицателен и стремится к 0, то значение функции стремится к $-\infty$, а график прижимается к оси Oy слева.
- Если x положителен и стремится к ∞ , то значение функции стремится к 0, а график прижимается к оси Ox сверху.
- Если x отрицателен и стремится к $-\infty$, то значение функции стремится к 0, а график прижимается к оси Ox справа.

Значит, прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются асимптотами. Тогда график функции $y = \frac{1}{x}$ выглядит так:

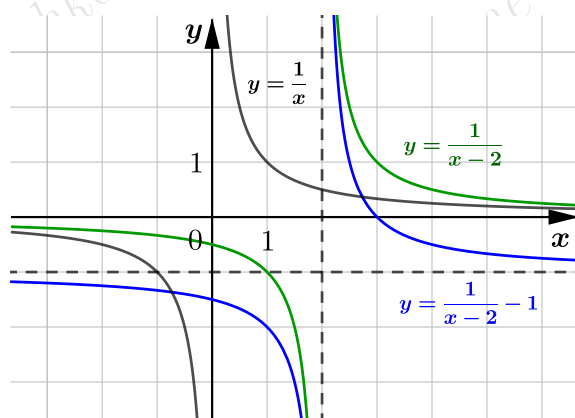


Теперь поймем как можно двигать график гиперболы. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x-2}$. Достаточно понять, что по ОДЗ

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Тогда если асимптотой функции $y = \frac{1}{x}$ являлась прямая $x = 0$, асимптотой функции $y = \frac{1}{x-2}$ является прямая $x = 2$. Значит, весь график сдвинулся на 2 вправо.

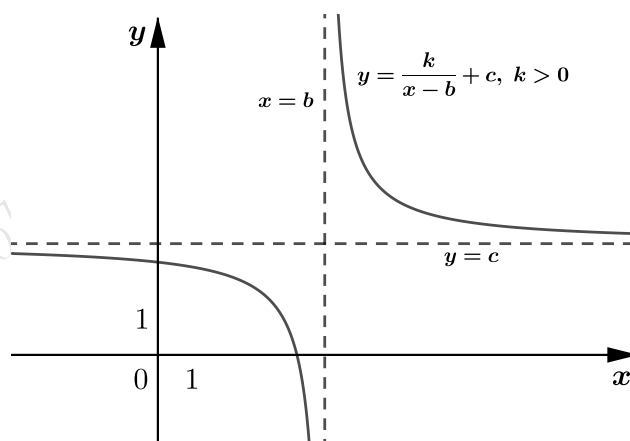
Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x-2} - 1$. Заметим, что дробная часть функции никогда не станет равна 0, тогда функция никогда не примет значения -1 . Значит, $y = -1$ — горизонтальная асимптота, следовательно, весь график сдвинется на 1 вниз. Тогда график функции $y = \frac{1}{x-2} - 1$ получается с помощью сдвига графика функции $y = \frac{1}{x}$ на 2 вправо и 1 вниз.



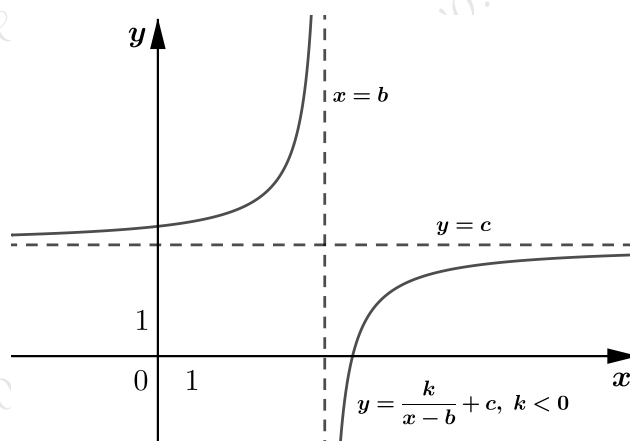
Иногда в задачах появляется такая функция:

$$y = \frac{k}{x-b} + c$$

Если $k > 0$, то график этой гиперболы лежит в I и III четвертях плоскости с системой координат, образованной асимптотами $x = b$ и $y = c$.



Если $k < 0$, то график этой гиперболы лежит в II и IV четвертях плоскости с системой координат, образованной асимптотами $x = b$ и $y = c$.

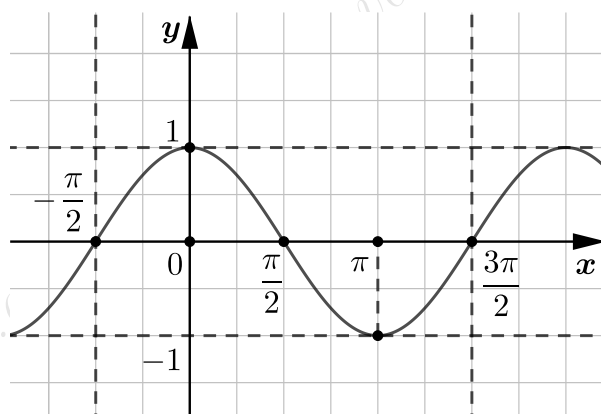


Графики синуса и косинуса

Построим график функции $y = \cos x$. Мы знаем табличные значения косинуса:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0	0

Тогда график $y = \cos x$ будет выглядеть так:



Обратим внимание на то, что косинус, как и синус, периодичен с периодом 2π .

Важно заметить, что функции косинуса и синуса ограничены, то есть

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

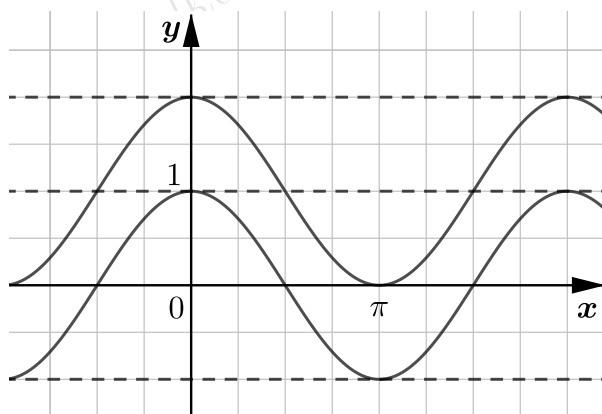
Тогда все точки графиков функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ лежат в «коридоре» между прямыми $y = 1$ и $y = -1$. Тогда величина (или амплитуда) этого коридора равна $1 - (-1) = 2$. При этом ось Ox проходит ровно по середине между этими прямыми.

Начнем двигать график, для этого рассмотрим функцию $y = \cos x + 1$.

Теперь наша ось Ox сдвинулась на 1 вверх, и весь коридор тоже сдвинулся за ней на 1 вверх, так как

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2$$

Тогда величина коридора не изменилась, так как $2 - 0 = 2$, весь график сдвинулся на 1 вверх,

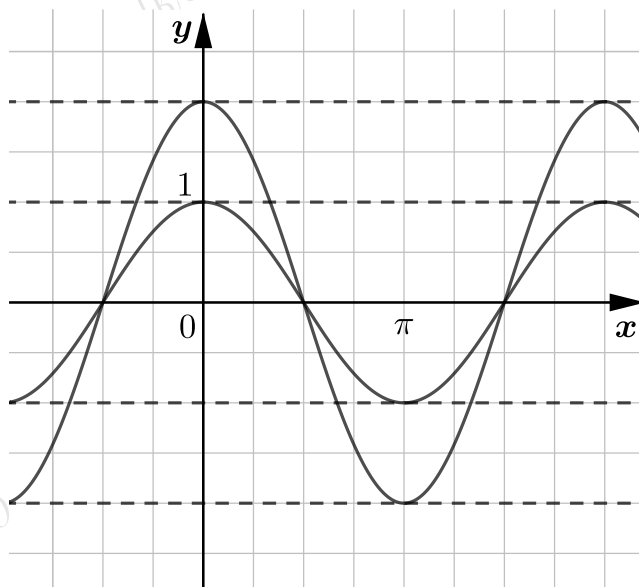


Рассмотрим функцию $y = 2 \cos x$. Поймем в каком коридоре лежит график этой функции.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2$$

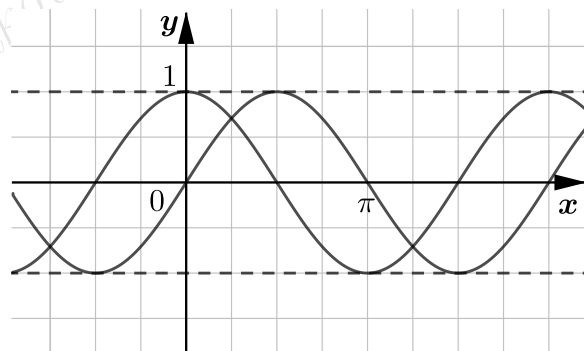
Это значит, что величина коридора изменилась в 2 раза, так как изначально она равнялась 2, а сейчас $2 - (-2) = 4$.

Заметим, что в точках, в которых $\cos x = 0$, функция $y = 2 \cos x$ также равна 0. А в точках, где значение $y = \cos x$ было равно ± 1 , функция $y = 2 \cos x$ будет принимать значения ± 2 соответственно. Тогда график функции $y = 2 \cos x$ будет выглядеть так:



Важно понять что происходит, когда у функции $y = a \cos x$ коэффициент a меньше 0. На самом деле график просто «перевернется», если график функции $y = \cos x$ вблизи точки 0 выглядел как «бугорок»: $\cap$, и в точке 0 функция принимала наибольшее значение — верхнюю границу коридора, то у функции $y = -\cos x$ вблизи точки 0 график будет выглядеть как «ямка»: $\cup$, и в точке 0 функция будет принимать наименьшее значение — нижнюю границу коридора.

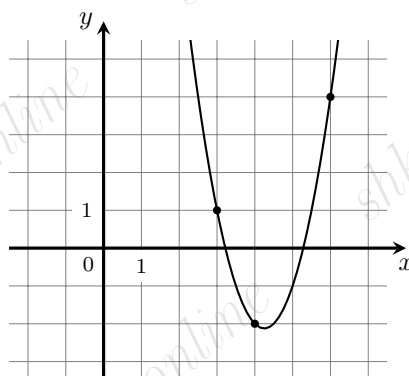
Возможно такое, что попадетс я функция вида $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. Но тогда график функции просто сдвинется на $\frac{\pi}{2}$ вправо, аналогично графикам параболы, логарифма и пр.



№11. Графики. Задачи

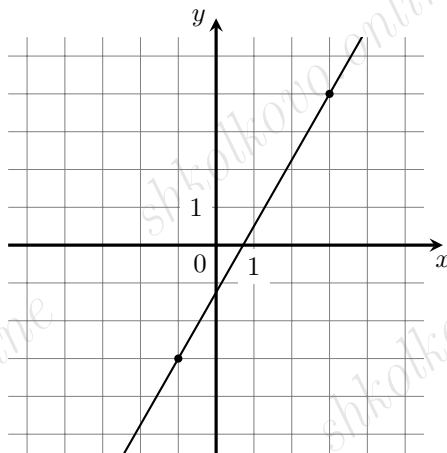
№11.1 #83441

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(10)$.



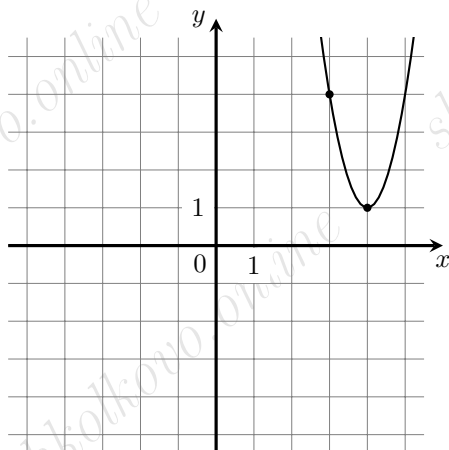
№11.2 #32009

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором выполнено $f(x) = -13,5$.

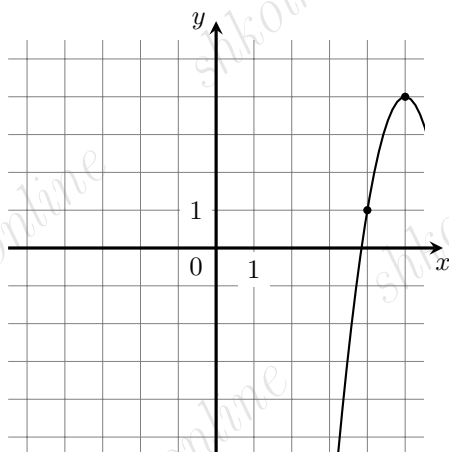


№11.3 #31968

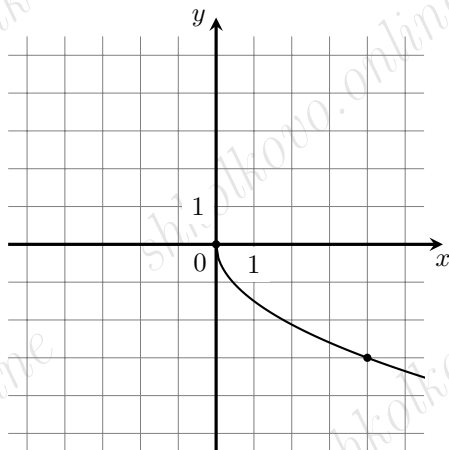
На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(-1)$.

**№11.4 #19491**

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — действительные. Найдите значение $f(1)$.

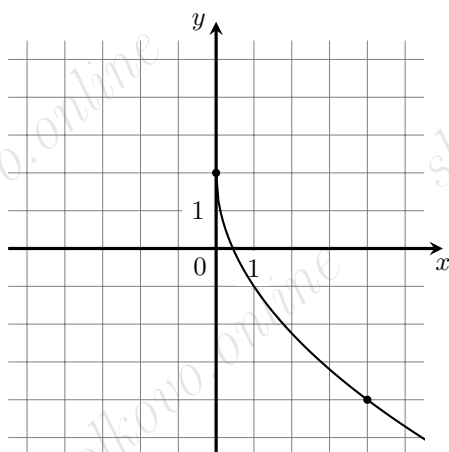
**№11.5 #32011**

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(2,56)$.



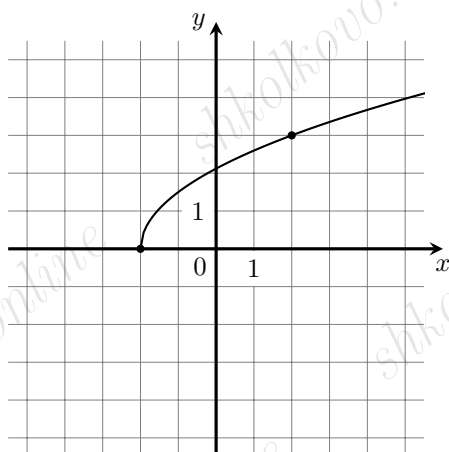
№11.6 #32195

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x} + p$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -10$.



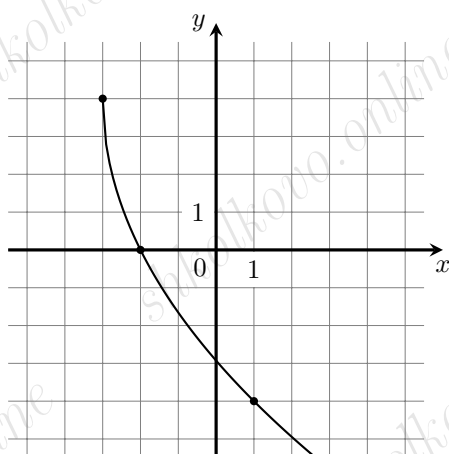
№11.7 #32196

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x+p}$. Найдите $f(0,25)$.



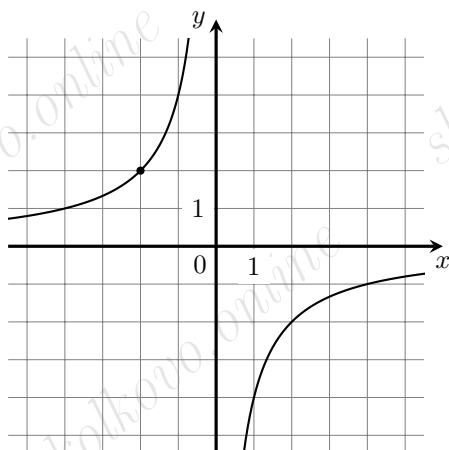
№11.8 #16797

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\sqrt{x-x_0} + y_0$, где числа a , x_0 и y_0 — действительные. Найдите значение $f(6)$.



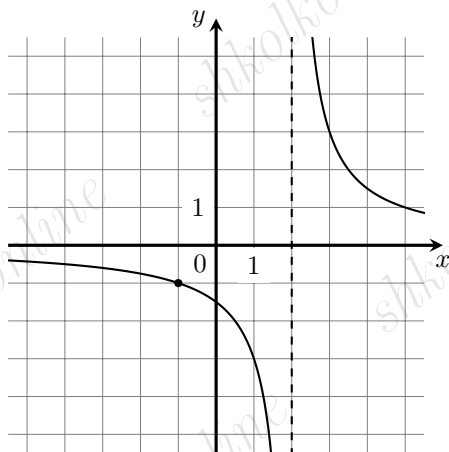
№11.9 #35289

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(8)$.



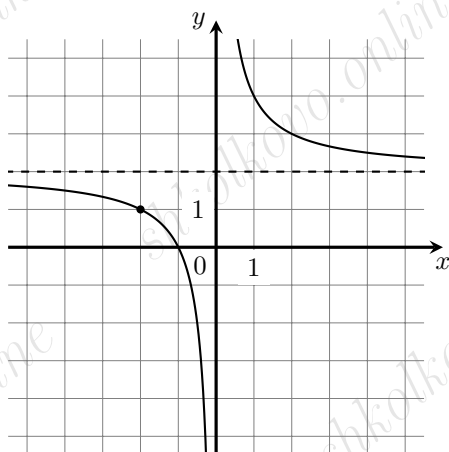
№11.10 #14247

На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -0,2$.



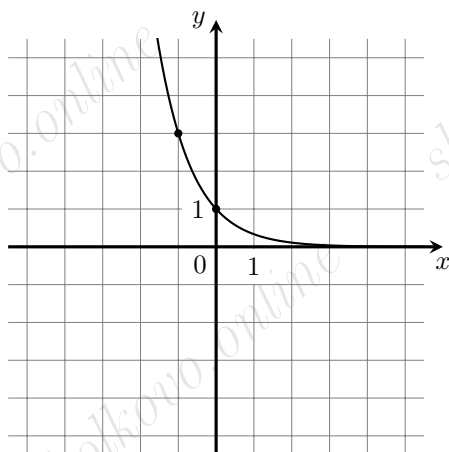
№11.11 #14244

На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 7.



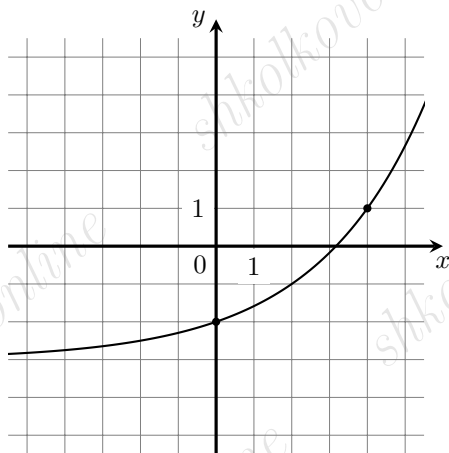
№11.12 #35292

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-3)$.



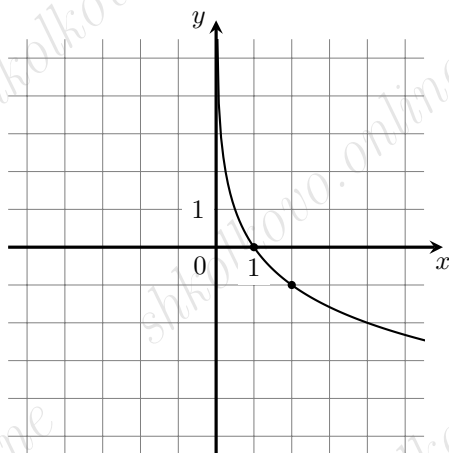
№11.13 #32014

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(10)$.



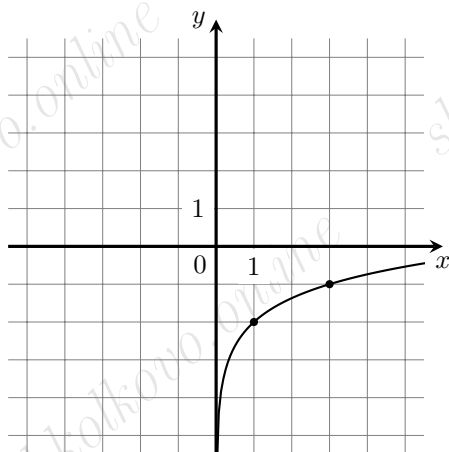
№11.14 #20864

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.



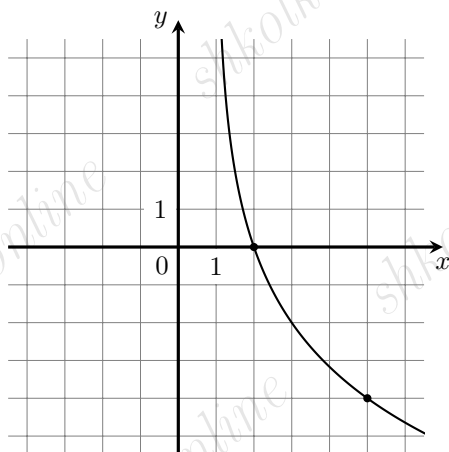
№11.15 #32012

На рисунке изображен график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f\left(\frac{1}{3}\right)$.



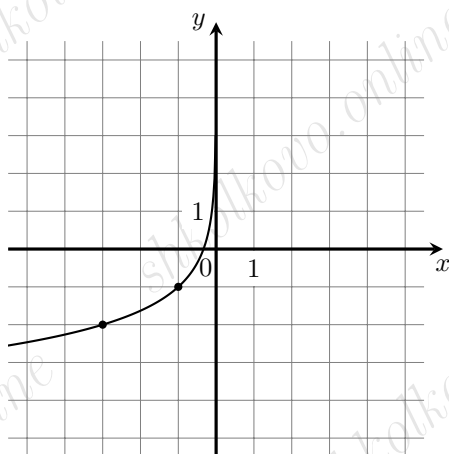
№11.16 #31969

На рисунке изображен график функции $f(x) = -2\log_a(x-b)$. Найдите значения a и b . Запишите эти значения подряд без пробелов.



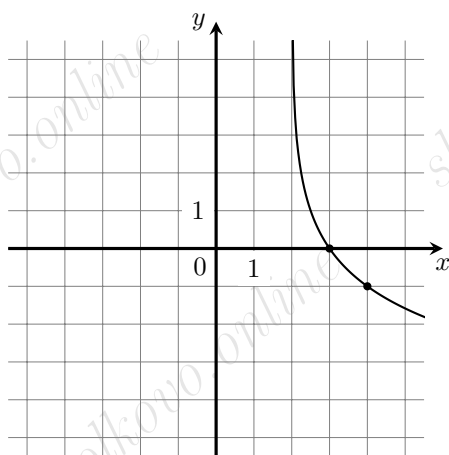
№11.17 #20706

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(bx)$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -4$.



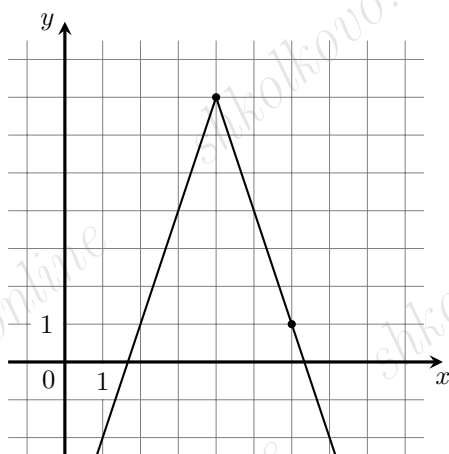
№11.18 #14250

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -5$.



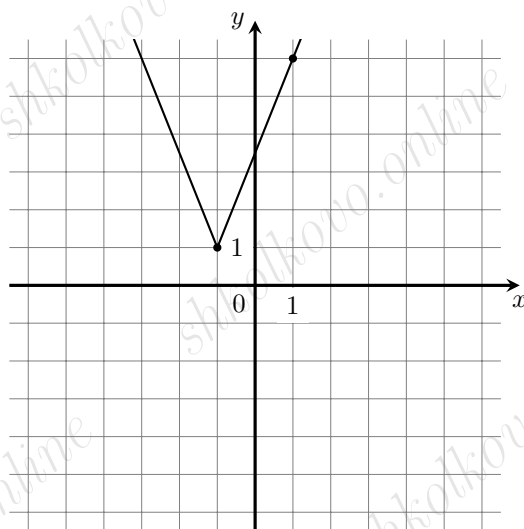
№11.19 #20569

На рисунке изображен график функции $f(x) = a|x - b| + c$. Найдите $f(12)$.



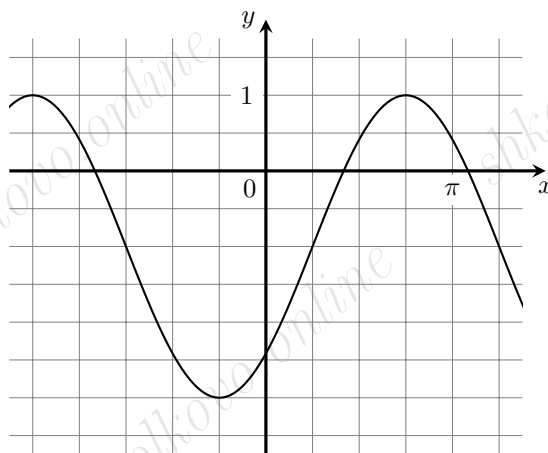
№11.20 #20568

На рисунке изображен график функции $f(x) = a|x - b| + c$. Найдите $f(-8)$.



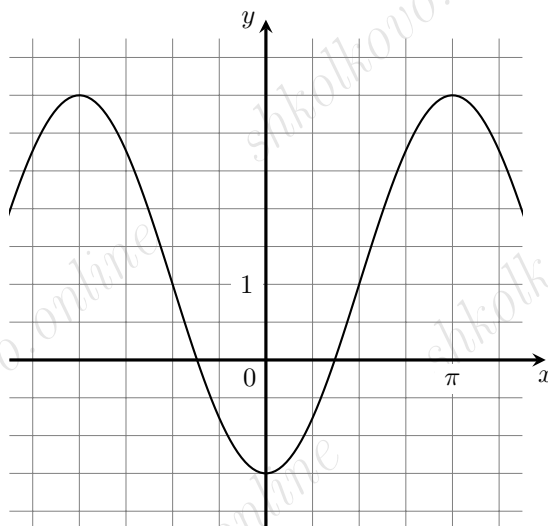
№11.21 #20709

На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin(x + b) + c$. Найдите c .



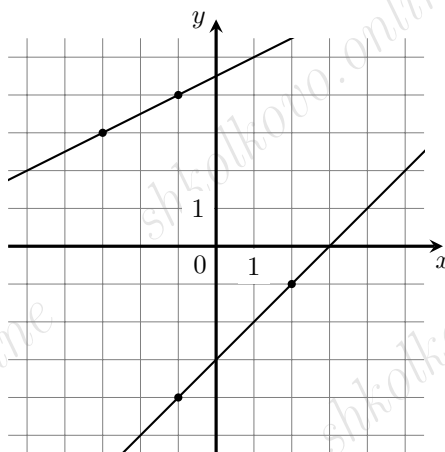
№11.22 #32008

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cdot \cos x + b$. Найдите a .



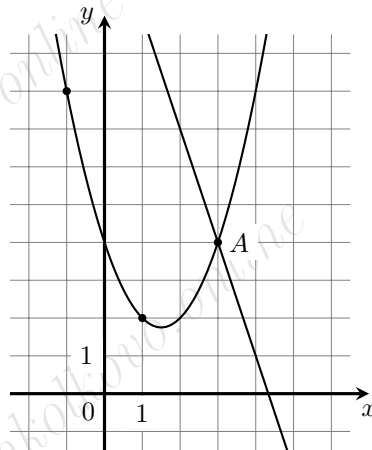
№11.23 #18616

На рисунке изображены графики двух функций вида $y = kx + b$, которые пересекаются в точке $A(x_0; y_0)$. Найдите x_0 .



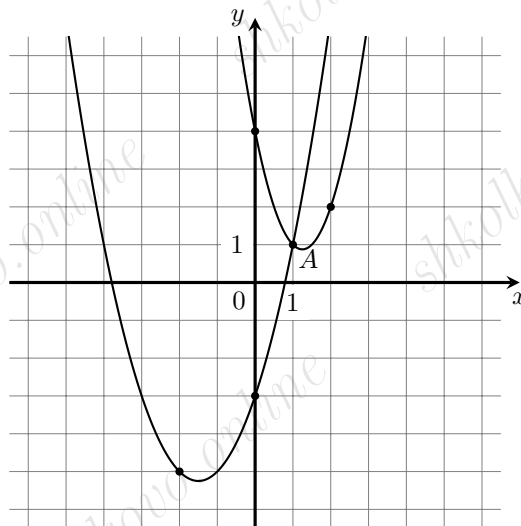
№11.24 #32016

На рисунке изображены графики функций $f(x) = -3x + 13$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



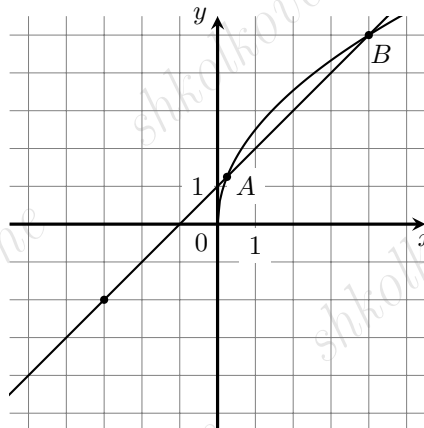
№11.25 #32271

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



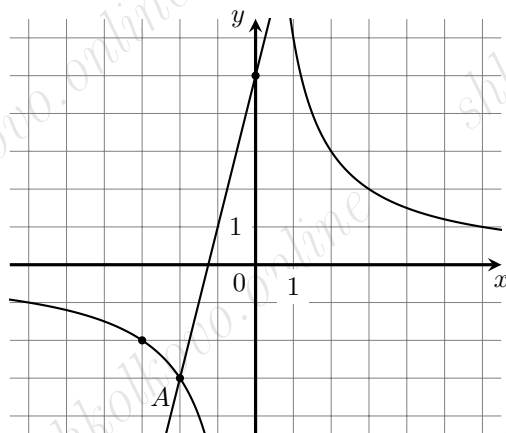
№11.26 #23739

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точках $A(x_0; y_0)$ и $B(4; 5)$. Найдите y_0 .



№11.27 #32272

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках $A(-2; -3)$ и $B(x_0; y_0)$. Найдите x_0 .



№11. Графики. Ответы

11.1. 64	11.10. -13	11.19. -17
11.2. -7	11.11. 0,4	11.20. 18,5
11.3. 76	11.12. 27	11.21. -1
11.4. -44	11.13. 29	11.22. -2,5
11.5. -2,4	11.14. -3	11.23. 15
11.6. 16	11.15. -3	11.24. 22
11.7. 2,25	11.16. 21	11.25. 67
11.8. -8	11.17. -27	11.26. 1,25
11.9. -0,5	11.18. 34	11.27. 0,75