

Признак делимости на 2

Число n делится на 2, если последняя цифра этого числа — четная. Четные цифры: 0, 2, 4, 6, 8. Число, делящееся на 2, называют четным, неделящееся на 2 — нечетным.
Например: числа 28, 6954, 290002.

Пример, где встречается

Дано простое число $p > 3$. Делятся ли на 2 числа $p - 1$ и $p + 1$?
► Простое число — число p , среди делителей которого есть только числа 1 и p . Среди простых чисел есть только одно четное — это число 2, остальные все числа — нечетные, то есть не делятся на два.
Так как в нашей задаче $p > 3$, то p — нечетное, следовательно, оканчивается на нечетные цифры 1, 3, 5, 7, 9. Следовательно, числа $p - 1$ и $p + 1$ оканчиваются на четные цифры (например, если p оканчивается на 9, то $p - 1$ оканчивается на 8, а $p + 1$ — на 0). Следовательно, числа $p - 1$ и $p + 1$ делятся на 2.
Ответ: да, делятся.

Признак делимости на 3 (на 9)

Число n делится на 3 (на 9), если сумма его цифр делится на 3 (на 9). Причем остаток от деления суммы цифр на 3 (на 9) равен остатку от деления самого числа n на 3 (на 9).
Заметим, что если число делится на 9, то оно делится и на 3.
Например: число 4632 делится на 3, так как $4 + 6 + 3 + 2 = 15$ делится на 3; число 383 не делится на 9, так как $3 + 8 + 3 = 14$ не делится на 9, причем остаток от деления на 9 у этого числа равен остатку от деления на 9 у числа 14, то есть равен 5.

Пример, где встречается

Докажите, что если число n , не содержащее нулей, делится на 3, то любое число, получаемое из n перестановкой цифр, также делится на 3.
► У числа n и у любого числа, получаемого из него перестановкой цифр, сумма цифр будет одинаковой. Следовательно, если у числа n сумма цифр делится на 3, то и у получаемого числа сумма цифр делится на 3.

Признак делимости на 4

Число n делится на 4, если число, образованное последними двумя цифрами числа n , делится на 4. Остаток от деления числа n на 4 равен остатку от деления числа, образованного последними двумя цифрами числа n , на 4. Заметим, что если число делится на 4, то оно делится и на 2, то есть является четным.
Например: число 576 делится на 4, так как число 76 делится на 4; число 702 не делится на 4, так как число 2 не делится на 4, причем остаток от деления числа 702 на 4 равен остатку от деления 2 на 4, то есть равен 2.

Пример, где встречается

Верно ли, что среди двух последовательно идущих четных чисел есть ровно одно, делящееся на 4?
► Пусть есть два числа n и $n + 2$, делящиеся на 2. Тогда $n = 2k$, $n + 2 = 2k + 2 \cdot 1 = 2(k + 1)$. Докажем, что среди чисел k и $k + 1$ ровно одно делится на 2. Тогда либо n , либо $n + 2$ делится на 4. Действительно, k и $k + 1$ — подряд идущие два числа, следовательно, ровно одно из них четное, то есть делится на 2.
Ответ: да, верно.

Признак делимости на 5

Число n делится на 5, если оно оканчивается на 0 или 5. Остаток от деления числа n на 5 равен остатку от деления на 5 его последней цифры.
Например: числа 875, 390.

Пример, где встречается

Как вы думаете, среди последовательно идущих четырех чисел есть ли число, делящееся на 5?
► Пусть числа оканчиваются на 1, 2, 3, 4. Тогда ни одно из них не делится на 5.
Ответ: нет, например, числа 51, 52, 53, 54.

Признак делимости на 6

Число n делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.
Например: число 732 делится на 6, так как оно четное и сумма его цифр $7 + 3 + 2 = 12$ делится на 3.

Пример, где встречается

Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

► Среди двух последовательно идущих чисел есть ровно одно четное, следовательно, среди трех последовательно идущих чисел как минимум одно четное, то есть делится на 2.
Остатки от деления на 3 трех последовательно идущих чисел разные. Всего существует три остатка от деления на 3 — это 0, 1, 2. Следовательно, три подряд идущих числа имеют этот набор остатков при делении на 3, то есть одно из них имеет остаток 0, значит, делится на 3.
Следовательно, в произведении трех последовательно идущих чисел участвует и число, делящееся на 2, и число, делящееся на 3 (они могут совпадать), значит, произведение этих чисел делится и на 2, и на 3, то есть делится на 6.

Признак делимости на 10 (100, 1000 и т.д.)

Число n делится на 10 (100, 1000 и т.д.), если оно оканчивается на 0 (00, 000 и т.д.) Если число n делится на 10, то оно делится на 2 и 5. В общем виде: если число n делится на 10^k , то оно делится на 2^k и на 5^k .
Например: число 680 делится на 10; число 38 020 000 делится на 10 000 (как следствие, делится и на 10, и на 100, и на 1 000).

Пример, где встречается

Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 30.
► Выше доказывалось, что среди трех последовательно идущих чисел есть как минимум одно, делящееся на 2, и ровно одно, делящееся на 3. Аналогично делению на 3 доказывается, что среди пяти подряд идущих чисел ровно одно делится на 5. Следовательно, произведение подряд идущих пяти натуральных чисел делится на 2, на 5 (то есть на 10), следовательно, равно $10k$, и на 3. Так как 10 не делится на 3, то k делится на 3, значит, $10k = 10 \cdot (3p) = 30p$. Значит, произведение любых пяти последовательных чисел делится на 30.

Признак делимости на 8

Число n делится на 8, если число, составленное из последних трех цифр числа n , делится на 8. Заметим, что если число n делится на 8, то оно делится и на 4.
Например: число 12 589 736 делится на 8, так как 736 делится на 8.

Пример, где встречается

Число $a + 3$ делится на 8. Делится ли на 8 число $111a + 1\,341$?
► Если число $a + 3$ делится на 8, то и число $111(a + 3) = 111a + 333$ делится на 8. Это число отличается от числа $111a + 1\,341$ на 1 008, то есть $(111a + 333) + 1\,008 = 111a + 1\,341$. Так как 1 008 делится на 8 (число, составленное из последних трех цифр, то есть число 8, делится на 8), а сумма двух чисел, делящихся на 8, также делится на 8, то и число $111a + 1\,341$ делится на 8.
Ответ: да, делится.

Признак делимости на 11

Число n делится на 11, если разность между суммами цифр на четных и нечетных местах делится на 11.
Например: число $\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1}$ делится на 11, так как $(1 + 3 + 3 + 1) - (2 + 4 + 2) = 0$ делится на 11.

Пример, где встречается

Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 9.
► Пусть имеется число $976\overline{abcde}$. Заметим, что если нам удастся расставить на местах a, b, c, d, e цифры 1, 2, 3, 4, 5, то полученное число будет наибольшим возможным, так как у него на первом месте стоит самая большая из возможных цифр — 9, на втором — вторая по убыванию цифра 7, на третьем — третья по убыванию цифра 6.
Если число делится на 11, то $(9 + 6 + b + d) - (7 + a + c + e)$ делится на 11. Оценим это выражение. Наименьшее его значение достигается, когда $b + d = 1 + 2$, $a + c + e = 3 + 4 + 5$ и равно -1 . Наибольшее — когда $b + d = 4 + 5$, $a + c + e = 1 + 2 + 3$ и равно 11. Следовательно, это выражение равно 0 или 11, поскольку все число делится на 11. Заметим, что $9 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 37$ — нечетное, следовательно, любая алгебраическая сумма цифр 9, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 — нечетное число. Следовательно, $(9 + 6 + b + d) - (7 + a + c + e)$ может равняться только 11. А это достигается, напомним, когда $b + d = 4 + 5$, $a + c + e = 1 + 2 + 3$. Тогда наибольшее возможное число равно 97 635 241.
Ответ: 97 635 241.