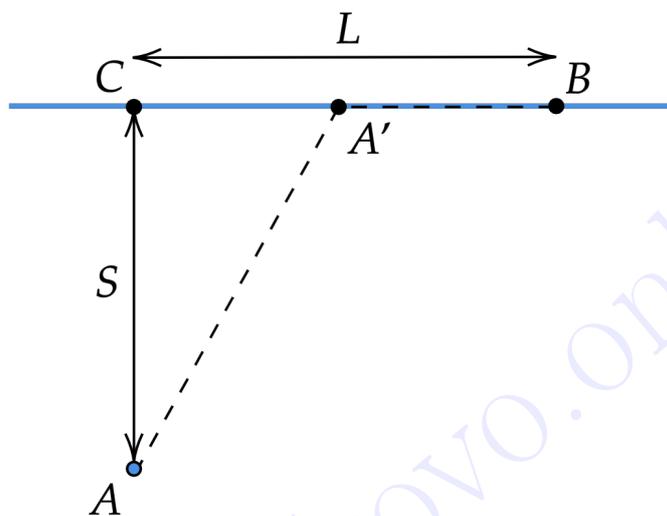


Оптика и механика

Составитель подборки – Кондрашкин Артем Витальевич

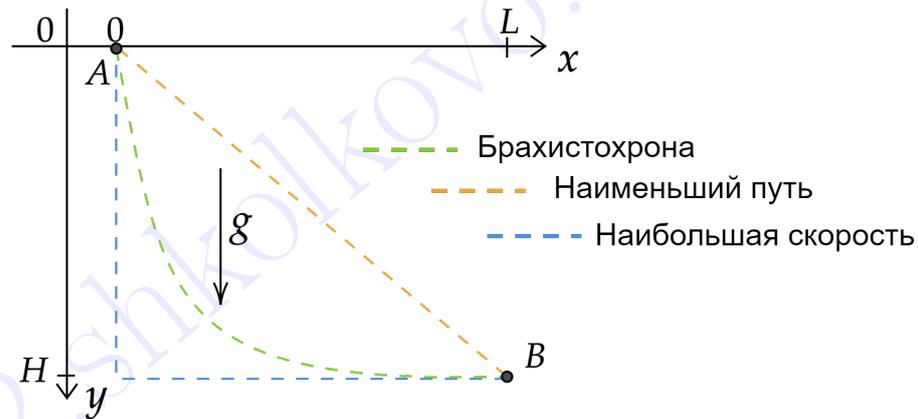
1. Задача Знание — свет, а незнание — минус деньги на штрафы

Симба после долгого изучения геометрической оптики решил прогуляться по полю. Но вот незадача, он сейчас находится в точке A и в скором времени ему надо оказаться у своей машины (точка B), чтобы ее не забрал эвакуатор. По хорошей дороге (участок BC) он может бежать со скоростью 20 м/с (кот у AB сейчас находится на спортивном питании). А в поле скорость Симбы снижена до 12 м/с. Через какое минимальное время τ он сможет оказаться возле своей машины (точка B)? На каком расстоянии от точки B ($A'B$) ему лучше всего выбежать на дорогу? $S = 1$ км, $L = 3$ км.



2. **Задача** Миражи появляются из-за неоднородности распределения показателя преломления в атмосфере. Пусть показатель преломления атмосферы $n(z)$ однороден по горизонтали, а по вертикали имеет зависимость: $n(z) = 1 + \Delta n$ при $z < H$, $n(z) = 1 + 2\Delta n/3 + \Delta n(H + h - z)/3h$ при $H < z < H + h$. На высотах $z > H + h$ показатель преломления увеличивается и постепенно возвращается на значение у поверхности Земли. Константа $\Delta n = 3 \cdot 10^{-4}$ высоты $H = 200$ м, $h = 200$ м. Каково минимальное расстояние по горизонтали, на котором предмет, расположенный на поверхности Земли, будет виден расположенным в небе? Под каким углом к горизонту он будет виден на этом расстоянии?

3. **Задача** Рассмотрим точки A и B , разделённые высотой H в вертикальном направлении и расстоянием L в горизонтальном направлении, расположенные в гравитационном поле g как показано на рисунке внизу. Точечная масса может скользить вдоль рельсы фиксированной формы без трения (включая 90° - градусные повороты) из A в B . Брахистохрона – это кривая, минимизирующая общее время пути.



1) Покажите, что путь луча света, путешествующего по среде с переменным показателем преломления $n(x, y) \equiv n(y)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} = \sqrt{C \cdot n(y)^2 - 1}$, где C – константа, определяемая граничными условиями.

2) Согласно принципу Ферма, свет путешествует из одной точки в другую по самой быстрой траектории. Предположим, что в некоторой среде свет может перемещаться из A в B по брахистохроне, изображённой на рисунке выше. Найдите коэффициент преломления $n = n(x, y)$ для этой среды как функцию от координат x в y , если $n(L, H) = 1$.

3) Решая уравнения, выведенные в частях 1) и 2), можно показать, что брахистохрона является на самом деле участком циклоиды. Циклоида – это кривая, которую проводит фиксированная точка на ободке круглого колеса, вращающегося по прямой без скольжения. Для частного случая $\frac{L}{H} = \frac{\pi}{2}$ найдите минимальное время пути t_{min} между A и B .