

Справочник по планиметрии для ОГЭ. Окружности

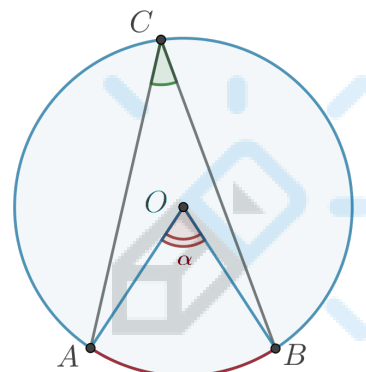
1 Центральные и вписанные углы

Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности. Пусть точки A и B лежат на окружности с центром в точке O . Тогда угол AOB — центральный.

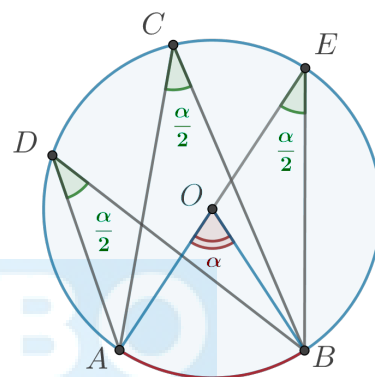
Градусная мера дуги

Пусть $\angle AOB = \alpha$. Градусной мерой дуги AB будем называть градусную меру центрального угла, который опирается на эту дугу. Тогда $AB = \alpha$.

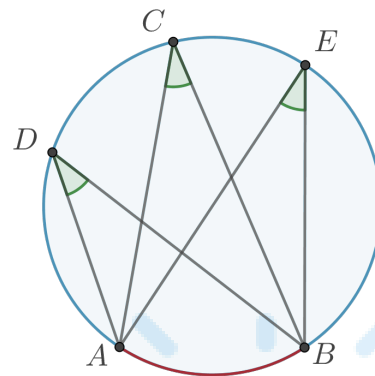
Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают эту окружность. Угол ACB — вписанный.



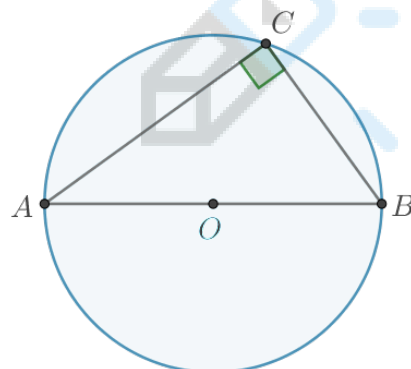
Все вписанные углы, опирающиеся на дугу AB , равны половине центрального угла, опирающегося на эту дугу.



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

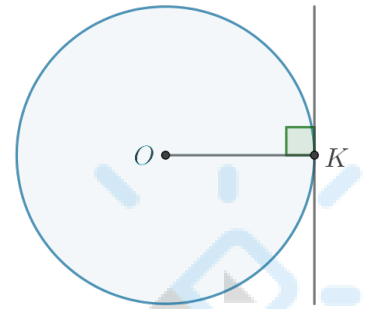


Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен 90° .

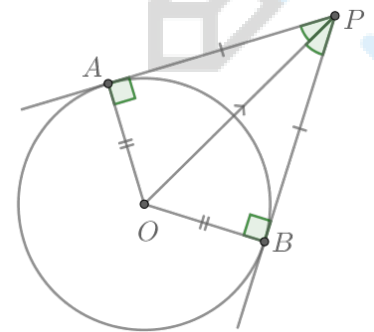


2 Окружность и касательные

Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной.

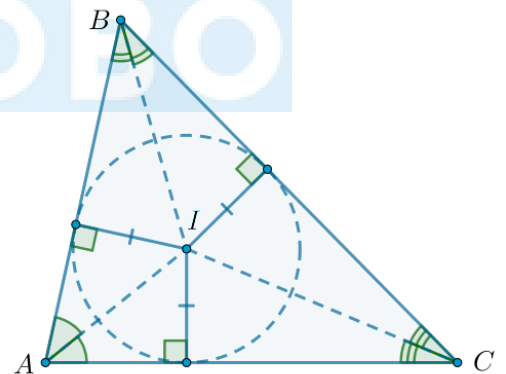


Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



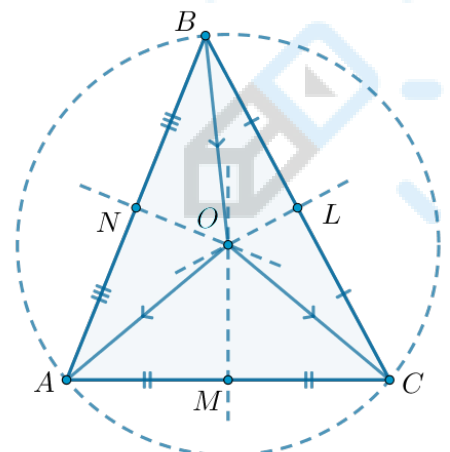
3 Центр вписанной окружности треугольника

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности этого треугольника.



4 Центр описанной окружности треугольника

Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности этого треугольника.



5 Вписанный четырехугольник

Вписанный четырехугольник — это четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности.

Свойство №1

Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180° .

Признак №1

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то вокруг него можно описать окружность.

Свойство №2

Если четырехугольник вписанный, то углы, опирающиеся на одну сторону, равны

Признак №2

Если в четырехугольнике углы, опирающиеся на одну сторону, равны, то он вписанный.

Свойство №3

Если четырехугольник вписанный, то его угол равен углу, смежному с противоположащим.

Признак №3

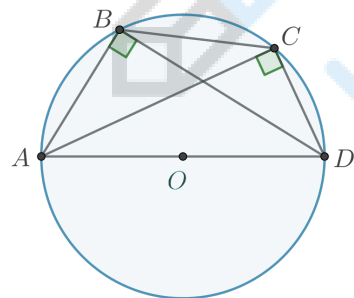
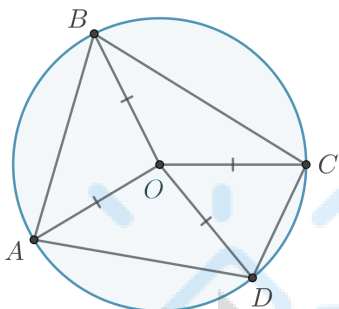
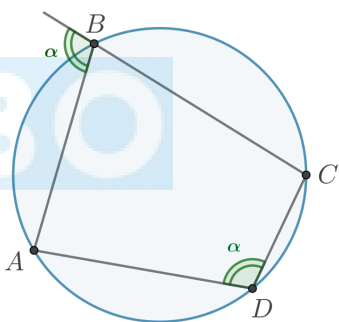
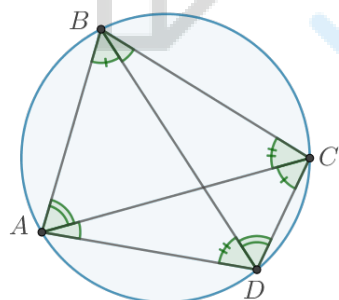
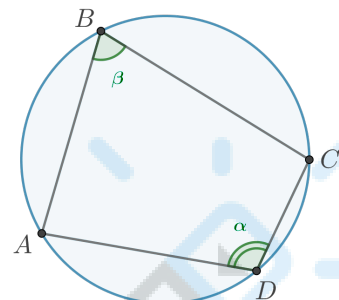
Если угол четырехугольника равен углу, смежному с противоположащим, то он вписанный.

Признак №4

Если явно найдена точка, от которой равноудалены вершины четырехугольника, то он вписанный.

Признак №5

Частный случай. Если два угла по 90° опираются на одну сторону четырехугольника, то он вписанный.



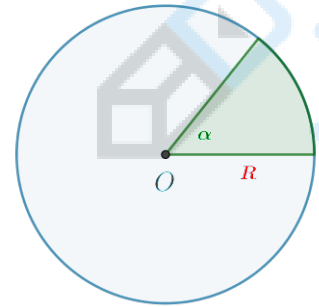
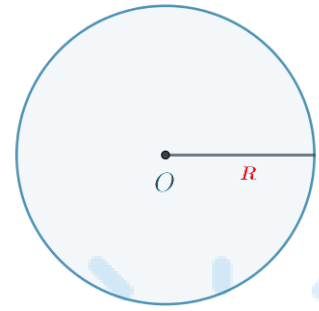
6 Площади круга и сектора

Пусть R — радиус круга. Тогда его площадь равна

$$S = \pi R^2$$

Сектор круга — часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Пусть R — радиус круга, а α — величина его дуги. Тогда площадь сектора равна

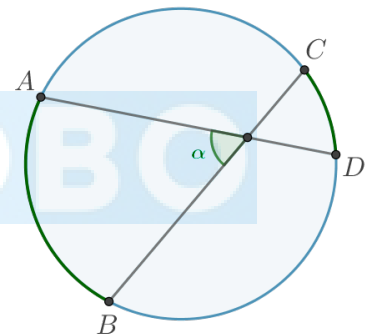
$$S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$



7 Теоремы о хордах, касательных и секущих

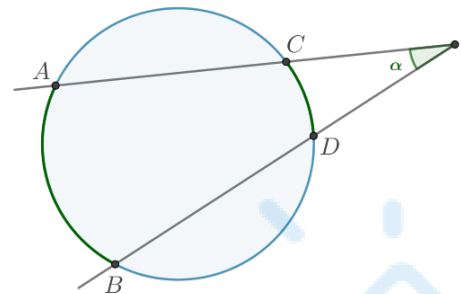
Угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD})$$

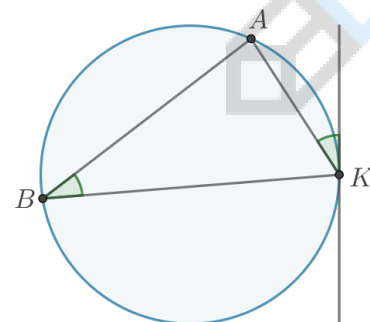


Угол между секущими, проведенными из одной точки к окружности, равен полуразности дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD})$$



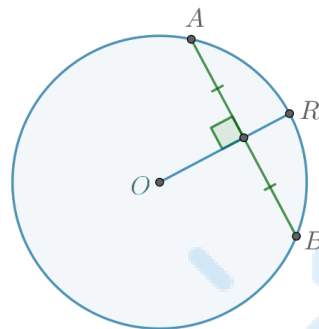
Угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, отсеченную хордой.



Если радиус перпендикулярен хорде, то он делит ее пополам.

Верно обратное: если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.

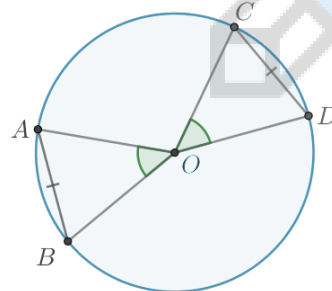
$$OR \perp AB \Leftrightarrow OR \text{ делит } AB \text{ пополам}$$



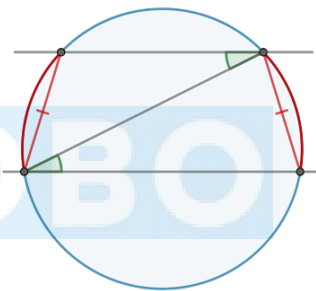
Равные хорды стягивают равные дуги.

Верно обратное: равные дуги стягиваются равными хордами.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD$$



Если окружность пересекают две параллельные прямые, то они высекают равные хорды.

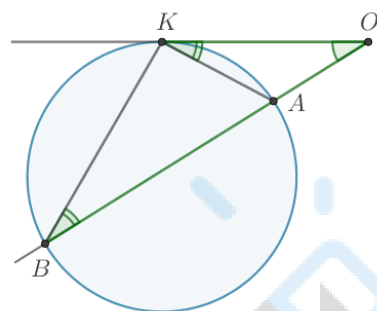


8 Подобные треугольники в окружностях

Если OK — касательная, где K — точка касания с окружностью, OB — секущая, A и B — ее точки пересечения с окружностью, то

$$\triangle OAK \sim \triangle OKB$$

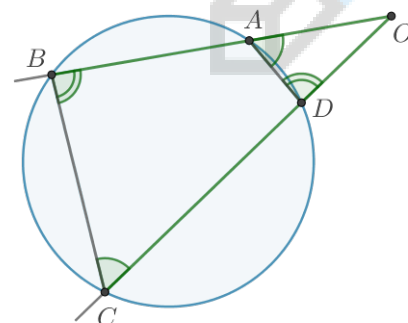
(Следствие: квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть)



Если OB и OC — секущие, пересекающие повторно окружность в точках A и D соответственно, то

$$\triangle OAD \sim \triangle OCB$$

(Следствие: для данной окружности произведение секущей на ее внешнюю часть — величина постоянная)

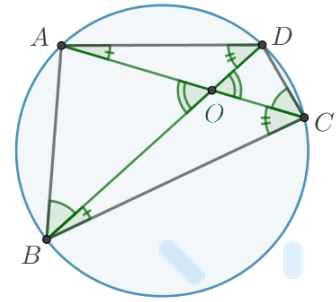


При пересечении хорд в окружности образуются две пары подобных треугольников:

$$\triangle AOB \sim \triangle DOC$$

$$\triangle AOD \sim \triangle BOC$$

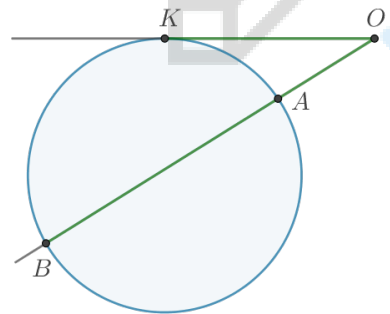
(Следствие: произведения отрезков хорд равны)



9 Отношения касательных, секущих и хорд

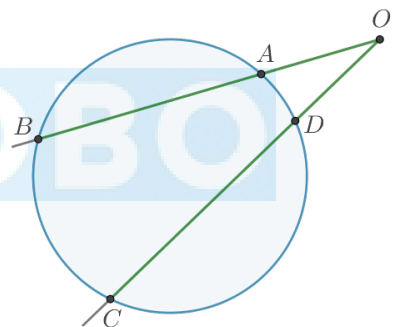
Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

$$OK^2 = OA \cdot OB$$



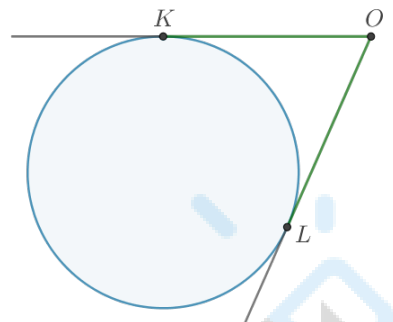
Для данной окружности и точки O вне окружности произведение секущей на ее внешнюю часть — величина постоянная:

$$OA \cdot OB = OD \cdot OC$$



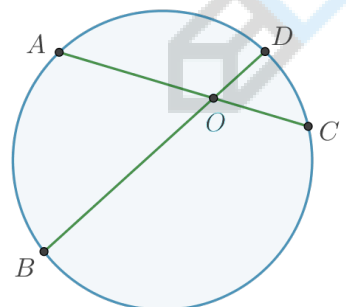
Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны:

$$OA = OB$$



Произведения отрезков пересекающихся хорд равны:

$$AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

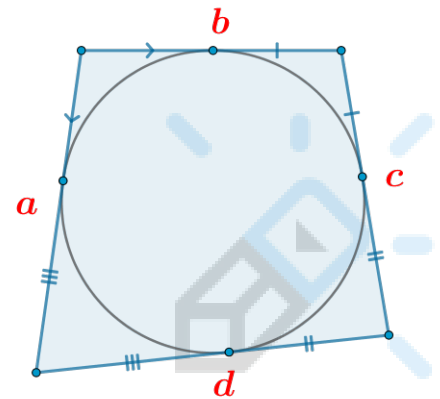


10 Описанный четырехугольник

Центр вписанной в четырехугольник (многоугольник) окружности лежит на пересечении биссектрис его углов.

1. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.
2. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

$$a + c = b + d$$



ШКОЛКОВО