Тренировочный вариант «Школково» №7

Уровень сложности соответствует реальному ЕГЭ 2023 по профильной математике

1. В треугольнике со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, точки M и N — середины рёбер AA_1 и BB_1 соответственно. Известно, что объём тела $MNCDAB$ равен 1. Найдите объём $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

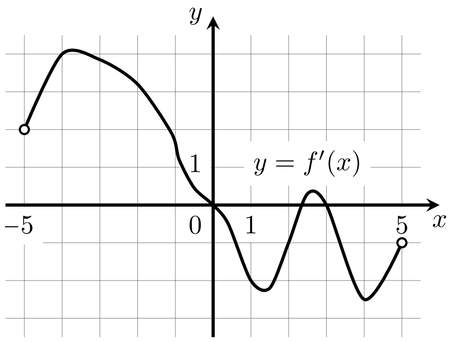
3. В небольшом магазине работают два продавца — Василий и Сергей. Каждый из них может быть занят работой с клиентом с вероятностью $0,4$. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью $0,3$. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Василий, а Сергей свободен.

4. Игральный кубик бросают три раза. Найдите вероятность того, что в сумме выпало 13 очков при условии, что единица выпала ровно один раз.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3}} = 5$.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 125}{\log_9 5}$.

7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 4]$.



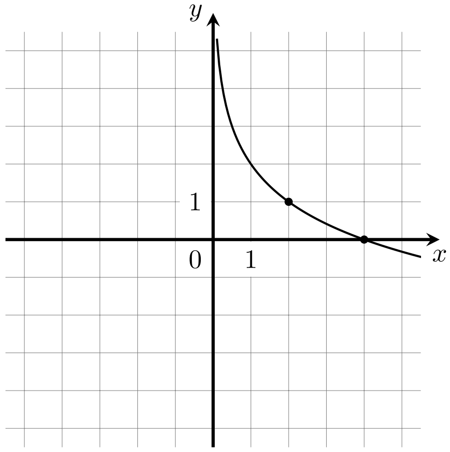
8. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

9. Города M и N находятся возле реки на расстоянии 60 км. Из M в N отправился катер, который прибыл в город N и сразу повернул назад. К тому времени, как катер вернулся в M, плот, который отправился из M в N на час раньше катера, проплыл 13 км. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите скорость катера в неподвижной воде. Ответ дайте в км/ч.

10. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.



11. Найдите точку минимума функции $y = (1-2x)\cos x + 2\sin x + 7$, принадлежащую промежутку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

12. а) Решите уравнение $4\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg} x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

13. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $BD = 5$. Все боковые ребра пирамиды равны 3. На отрезке BD отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 2$.

а) Докажите, что плоскость (CEF) параллельна ребру SB.

б) Плоскость (CEF) пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости (ABC).

14. Решите неравенство

$$\log_{2^{|2x-1|}}\left(2^{2x+1} - 2^{x+2} + 2\right) \leqslant \frac{x}{|2x-1|}$$

15. 15 января Антон взял кредит на 3 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го февраля, апреля и июня долг должен быть на одну девятую часть от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15-го числа предыдущего месяца;

— 15-го марта, мая и июля долг должен быть на две девятых части от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15-го числа предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 220 тыс. рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

16. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 30°$.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = a - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решения.

18. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 14 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7?

в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 9. Ответ обоснуйте.

Ответы

1. 6
2. 4
3. $0,1$
4. $0,04$
5. 35
6. 3
7. 2
8. 30
9. 22
10. -3
11. $0,5$
12. а) $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{12}+\pi m;\ \frac{5\pi}{12}+\pi n,\ k,m,n\in\mathbb{Z}$

    б) $-\frac{59\pi}{12};\ -\frac{55\pi}{12};\ -\frac{9\pi}{2}$
13. б) $\frac{3\sqrt{11}}{10}$
14. $[-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$
15. 2
16. б) $3:4$
17. $a\in[17;+\infty)$
18. а) Да, существует, например, 847

    б) Нет, не существует

    в) 97635241