МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие

Кондрашкин А. В.

Образовательный проект "Школково"

2 июня 2022 г.

Оглавление

0.1 Основные формулы

Равномерное прямолинейное движение

$S_x = v_x t$

$x(t) = x_0 + v_x t$

Равноускоренное прямолинейное движение

Ускорение тела:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{\text{к}x} - v_{0x}}{\Delta t}$$

Зависимость скорости при равноускоренном движении:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$$

Зависимость координаты при равноускоренном движении:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Перемещение при равноускоренном движении:

$$S_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Перемещение при равноускоренном движении («формула без времени»):

$$S_x = \frac{v_{\text{к}x}^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Перемещение при равноускоренном движении:

$$S_x = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{\text{к}x})t$$

Относительность движения

Закон сложения скоростей: $\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}}$

Горизонтальное движение

Проекции скорости и координаты через модули векторов:

$$\begin{cases} v_y(t) = -gt \\ v_x(t) = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(t) = y_0 - \dfrac{gt^2}{2} \\ x(t) = v_0 t \end{cases}$$

Тангенс угла полета: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{gt}{v_0}$

Движение тела под углом к горизонту

Проекции скорости и координаты для случая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$:

$$\begin{cases} v_y(t) = v_0 \sin\alpha t - gt \\ v_x = v_0 \cos\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} y(t) = v_0 \sin\alpha t - \dfrac{gt^2}{2} \\ x(t) = v_0 \cos\alpha t \end{cases}$$

Время всего полета: $t_{\text{пол}} = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

Время подъема: $t_{\text{под}} = \dfrac{t_{\text{пол}}}{2} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

Максимальная дальность полета: $L_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

Максимальная высота подъема: $H_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

Если тело брошено под углом к горизонту и начальная и конечная точки находятся на одной высоте, то максимальная высота подъема: $H_{max} = \dfrac{gt_{\text{пад}}^2}{2}$

Угловая скорость: $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{v}{R}$

Связь линейной и угловой скорости: $v = \omega R$

Период вращения (время одного вращения) в общем виде и при равномерном движении по окружности:

$T = \dfrac{t}{N}$

$T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Частота вращения (кол-во оборотов за 1 с): $\nu = \dfrac{N}{t} = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Угловая скорость, выраженная через частоту и период: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

Центростремительное ускорение (нормальное): $a_{\text{цс}} = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R$

Полное ускорение в векторном и скалярном виде:

$\vec{a}_{\text{полн}} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

$a_{\text{полн}} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

Угловая скорость: $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{v}{R}$

Связь линейной и угловой скорости: $v = \omega R$

Период вращения (время одного вращения) в общем виде и при равномерном движении по окружности:

$T = \dfrac{t}{N}$

$T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Частота вращения (кол-во оборотов за 1 с): $\nu = \dfrac{N}{t} = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Угловая скорость, выраженная через частоту и период: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

Центростремительное ускорение (нормальное): $a_{\text{цс}} = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R$

Полное ускорение в векторном и скалярном виде:

$\vec{a}_{\text{полн}} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

$a_{\text{полн}} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчёта, называемые ***инерциальными***, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Второй закон Ньютона. В ИСО ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе: $\vec{a} = \dfrac{\sum \vec{F}_i}{m}$

Третий закон Ньютона. Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению. Эти силы имеют одну и ту же физическую природу и направлены вдоль прямой, соединяющей их точки приложения: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$

Силы в механике

- Упругости (закон Гука): $F_{\text{упр}x} = -k\Delta x$
- Трения покоя: $F_{\text{тр. п.}} \le \mu N$
- Трения скольжения: $F_{\text{тр}} = \mu N$
- Всемирного тяготения (гравитации): $F_{\text{гр}} = G\dfrac{m_1 m_2}{R^2}$
- Сила тяжести и ускорение свободного падения: $F_{\text{т}} = mg \quad g = G\dfrac{M}{R^2} \quad g(h) = G\dfrac{M}{(R+h)^2}$
- Обобщенный закон Архимеда: $F_{\text{Арх}} = P_{\text{ж}}$
- Выталкивающая сила (сила Архимеда) в ИСО: $F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{п.ч.}}$

Работа силы: $A = FS\cos\alpha$

Мощность: $N = \dfrac{A}{t}$

Мгновенная мощность: $N = Fv\cos\alpha$

Коэффициент полезного действия (КПД): $\eta = \dfrac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{зат}}} \cdot 100\% = \dfrac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{зат}}} \cdot 100\%$

Кинетическая энергия: $E_{\text{кин}} = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$

Теорема о кинетической энергии: $\Delta E_{\text{кин}} = A_{F_1} + A_{F_2} + ... + A_{F_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} A_{F_i}$

Теорема о потенциальной энергии: $A_{\text{пот}} = E_{\text{пот.н.}} - E_{\text{пот.к.}}$

Закон сохранения полной механической энергии:

$E_{\text{кин.к}} + \sum\limits_{i=1}^{n} E_{\text{пот.к.i}} = E_{\text{кин.н}} + \sum\limits_{i=1}^{n} E_{\text{пот.н.i}} = const$

Работа силы тяжести: $A = -\Delta E_{\text{пот}} = E_{\text{пот.н.}} - E_{\text{пот.к.}}$

Работа силы упругости: $A = -\Delta E_{\text{пот}} = E_{\text{пот.н.}} - E_{\text{пот.к.}}$

Консервативная сила	Формула	Потенциальная энергия
Сила тяжести	$F_{\text{тяж}} = mg$	$E_{\text{пот}} = mgh$
Сила упругости	$F_{\text{упр}} = -kx$	$E_{\text{пот}} = \dfrac{kx^2}{2}$
Гравитационная сила	$F_{\text{грав}} = G\dfrac{Mm}{R^2}$	$E_{\text{пот}} = -G\dfrac{Mm}{R}$
Сила Кулона	$F_{\text{Кул}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}$	$E_{\text{пот}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r}$

Импульс тела:

$\vec{p} = m\vec{v}$

Второй закон Ньютона (интерпретация):

$\Delta\vec{p} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)\Delta t$

Закон сохранения импульса (для замкнутой системы):

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p\prime}_1 + \vec{p\prime}_2$

Закон сохранения импульса выполняется в следующих случаях:

1. Если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\vec{F}_{\text{внеш } 1} + \vec{F}_{\text{внеш } 2} + \ldots + \vec{F}_{\text{внеш } n} = \vec{0}$$

2. Если сумма проекций векторов внешних сил, действующих на систему тел, на некоторую ось равна нулю. Тогда импульс системы остается неизменным вдоль этой оси:

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0$$

3. Если промежуток времени взаимодействия Δt пренебрежительно мал, то есть стремится к нулю (например, при взрывах, ударах, столкновениях):

$$\Delta t \to 0$$

Давление: $p = \dfrac{F}{S}$

Давление жидкости на дно сосуда: $p = \rho_{\text{ж}} g h$

Среднее давление жидкости на стенки сосуда: $p = \dfrac{\rho_{\text{ж}} g h}{2}$

Сила давления: $F = p \cdot S$

Закон Паскаля: давление, оказываемое на жидкость или газ, передается в любую точку этой среды без изменения по всем направлениям.

Применение закона Паскаля:

- Гидравлический пресс: $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{S_2}{S_1}$

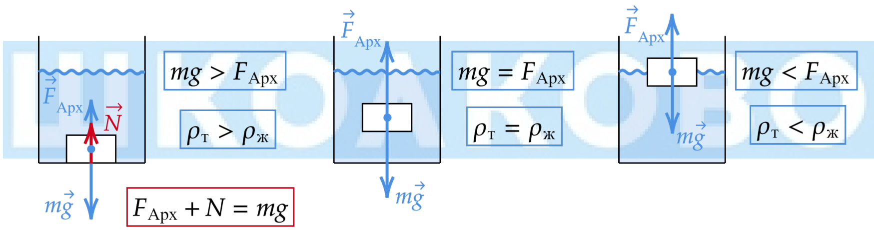
- Сообщающиеся сосуды

  1. Однородная жидкость: $p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \rho_ж g h_1 = \rho_ж g h_2 \quad \Rightarrow$ $h_1 = h_2$

  2. Неоднородная жидкость: $p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \Rightarrow$ $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{h_2}{h_1}$

Сила Архимеда для ИСО: $F_{Арх} = \rho_ж g V_{п.ч.}$

Условия плавания тел



тело тонет

тело плавает внутри жидкости

тело плавает на поверхности жидкости

Момент силы относительно оси вращения: $M = \pm F \cdot l$

Правило моментов: тело, имеющее неподвижную ось вращения, находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех приложенных к телу сил равна нулю.

Условия равновесия

1) Равна нулю векторная сумма всех сил, приложенных к телу.
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{0}$

2) Равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно любой оси.

$M_{F_1} + M_{F_2} + ... + M_{F_n} = 0$

Чтобы тело находилось в равновесии, должны выполняться оба условия.

Зависимость координаты при колебаниях: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

Зависимость скорости при колебаниях: $\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$

Зависимость ускорения при колебаниях: $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$

Максимальная скорость: $\upsilon_{max} = A\omega$

Максимальное ускорение: $a_{max} = A\omega^2$

Связь циклической частоты и «обычной»: $\omega = 2\pi\nu$

Период колебаний и частота: $T = \dfrac{1}{\nu}$

Период математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Период пружинного маятника: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Длина волны: $\lambda = \upsilon T = \dfrac{\upsilon}{\nu}$

Глава 1

Кинематика

1.1 Основные понятия кинематики

Кинематика, являясь разделом механики, изучает математическое описание движения тел без рассмотрения причин возникновения этого движения.

Определение 1

Механическое движение тела — изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени. При механическом движении тела взаимодействуют по законам механики.

Исходными неопределяемыми понятиями являются **пространство** и **время**. Тела, совершающие движения, рассматривают в качестве некоторых моделей: материальная точка, абсолютно твердоё тело и другие.

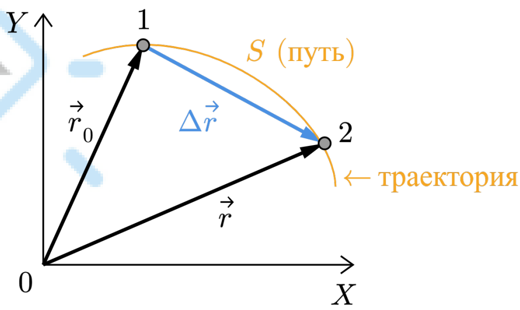
Определение 2

Материальная точка — это тело, размеры которого очень малы по сравнению с расстоянием, пройденным им. В кинематике при рассмотрении движения тела его размерами пренебрегают.

Основными понятиями, необходимыми для описания движения тела, являются: **1. Радиус-вектор** — вектор, проведенный из начала координат в место расположения материальной точки. Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором. **2. Траектория** — линия, вдоль которой движется тело.

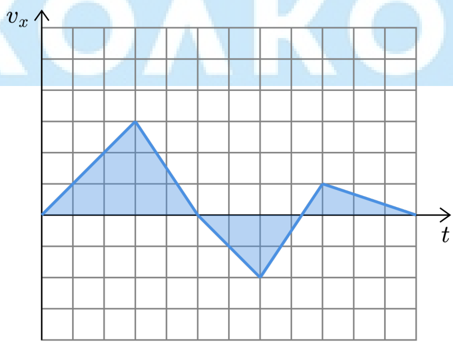
3. Путь — длина участка траектории, пройденного телом за определенный промежуток времени.

4. Перемещение — вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела. Перемещение является вектором-разностью радиус-векторов конечного и начального положений тела.



$\vec{r}_0$ — начальное положение
$\vec{r}$ — конечное положение
$\Delta\vec{r}$ — перемещение

Графический метод нахождения перемещения и пройденного пути: для определения проекции перемещения S_x нужно найти численно равную ей площадь под графиком проекции скорости $v_x(t)$.



Определение 3

Скорость — векторная физическая величина, которая характеризует быстроту изменения положения материальной точки в пространстве с течением времени.

Единицы измеренияс скорости: $[v]$ = м/с (метр в секунду).

Вектор скорости есть первая производная от радиус-вектора по времени. Вектор скорости сонаправлен с радиус-вектором.

Определение 4

Ускорение — векторная физическая величина, которая характеризует быстроту изменения скорости по величине и по направлению.

Единицы измерения ускорения: $[a] = м/с^2$ (метр в секунду за секунду).

Вектор ускорения есть первая производная от скорости по времени и вторая производная от радиус-вектора по времени.

Вектор ускорения **сонаправлен** с вектором скорости при равноускоренном движении и **противоположно направлен** при равнозамедленном движении.

В векторном виде ускорение по определению:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_к - \vec{v}_0}{\Delta t} \tag{1.1}$$

где $v_к$ и v_0 — конечная и начальная скорость соответственно.

В проекции на ось x:

$$a_x = \frac{v_{кx} - v_{0x}}{\Delta t} \tag{1.2}$$

где $v_{кx}$ и v_{0x} — проекция конечной и начальной скорости на ось x соответственно.

1.2 Прямолинейное равномерное движение.

Определение 5

Прямолинейное равномерное движение (ПРД) — движение, при котором тело за равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения.

Траектория ПРД — **прямая**. При ПРД скорость остается **постоянной**:

$$\vec{v} = \vec{const} \tag{1.3}$$

Уравнение прямолинейного равномерного движения материальной точки:

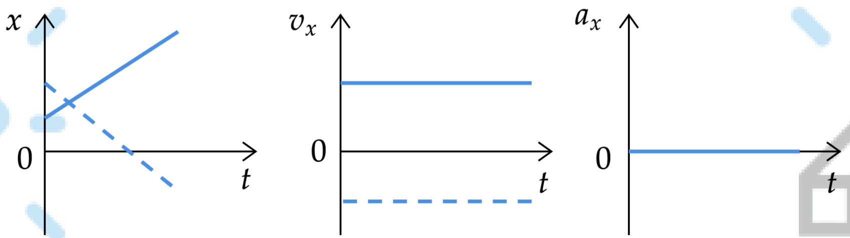
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \tag{1.4}$$

Ускорение при прямолинейном равномерном движении материальной точки:

$$\vec{a} = \vec{0} \tag{1.5}$$

Пройденный путь при прямолинейном равномерном движении материальной точки:

$$S = vt \tag{1.6}$$

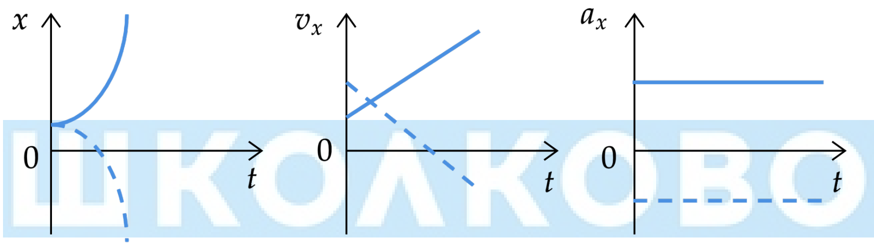


1.3 Прямолинейное равноускоренное движение.

Определение 6

Прямолинейное равноускоренное движение (ПРУД) материальной точки — движение с постоянным вектором ускорения $\vec{a} = \vec{const}$.

Траекторией ПРУД является **парабола**.



Уравнение прямолинейного равноускоренного движения материальной точки:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \tag{1.7}$$

Скорость при прямолинейном равноускоренном движении материальной точки:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \tag{1.8}$$

Ускорение при прямолинейном равноускоренном движении материальной точки:

$$\vec{a} = \vec{const} \tag{1.9}$$

Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении материальной точки:

$$2\vec{a}\vec{S} = \vec{v}^2 - \vec{v_0}^2, \qquad \vec{S} = \frac{(\vec{v} + \vec{v}_0)t}{2}, \tag{1.10}$$

Зависимость координаты от времени при прямолинйеном равноускоренном движении:

$$x = x_0 + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{1.11}$$

1.4 Относительность движения

Определение 7

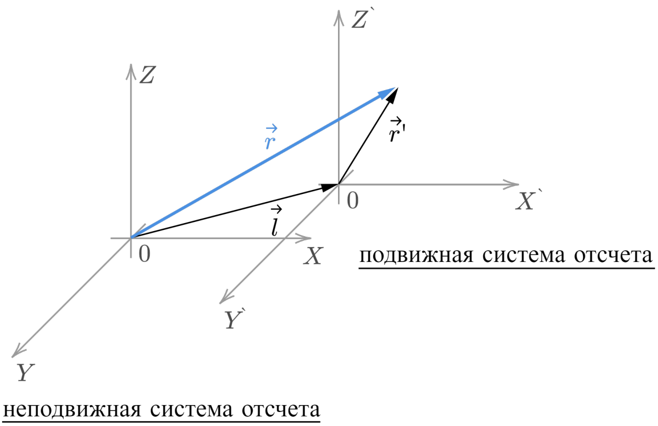
Относительность механического движения – это зависимость траектории движения тела, пройденного пути, перемещения и скорости от выбора системы отсчёта. Движущиеся тела изменяют своё положение относительно других тел в пространстве с течением времени.

Закон сложения скоростей:

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}} \tag{1.12}$$

Пусть существует две системы отсчета (СО): неподвижная XYZ и подвижная $X'Y'Z'$, и тело, которое движется.

Введем вектор $\vec{l}$, соединяющий начало O неподвижной СО с началом O' подвижной СО.



По правилу сложения векторов методом треугольника несложно вывести закон:

$$\vec{r} = \vec{l} + \vec{r'} \tag{1.13}$$

Изменение радиус-вектора есть **перемещение**. Изменение суммы есть сумма изменений:

$$\Delta\vec{r} = \Delta(\vec{l} + \vec{r'}) = \Delta\vec{l} + \Delta\vec{r'} \tag{1.14}$$

Разделим все на Δt и получим **закон сложения скоростей**:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{l}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r'}}{\Delta t} \tag{1.15}$$

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}} \tag{1.16}$$

- ***Абсолютная скорость*** $\vec{v}_{\text{абс}}$ — скорость тела в неподвижной системе отсчета.
- ***Переносная скорость*** $\vec{v}_{\text{пер}}$ — скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной.
- ***Относительная скорость*** $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость тела в подвижной системе отсчета.

Отсюда можно получить формулу, которая позволяет «пересесть» в нужную систему отсчета:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{абс}} + (-\vec{v}_{\text{пер}}) \tag{1.17}$$

Правила перехода в подвижную СО:

1. Находим относительную скорость, то есть к вектору $\vec{v}_{\text{абс}}$ прибавляем перевернутый вектор скорости того тела, в чью систему отсчета мы хотим перейти.

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{абс}} + (-\vec{v}_{\text{пер}})$$

2. В системе отсчета подвижного тела данное тело не двигается.

Важно отметить, что определению, относительная скорость есть скорость тела относительно подвижной СО. *Когда мы переходим в* *подвижную СО, то эта подвижная СО для нас становится мысленно неподвижной*, то есть она словно «останавливается» или «замораживается», так как мы начинаем двигаться вместе с ней. Стоит отметить, что, для того чтобы казаться неподвижной, системе отсчета необходимо обладать большими размерами.

Для понимания приведем распространенный пример. В задачах за неподвижную СО часто принимается поверхность Земли, хотя на самом деле сама планета подвижна и движется вокруг Солнца с большой скоростью. Поскольку и наблюдатель и рассматриваемое в задаче тело находятся на поверхности на самом деле подвижной Земли, для них эта СО «замораживается» и словно стоит на месте. Поэтому часто СО, связанную с поверхностью Земли, удобно принять за неподвижную.

1.5 Баллистика

Баллистика — наука о движении тел, брошенных в пространстве, основанная на математике и физике.

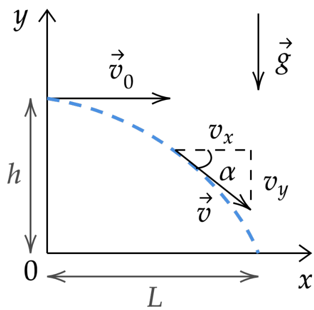
По сути, баллистика для нас сводится к тому, что движение брошенного тела рассматривается как движение материальной точки, спроецированное на оси координат, введенных удобным для каждой задачи образом.

То есть в баллистике мы в основном работаем с проекциями векторов, разбивая движение точки на две составляющие — движение по горизонтальной и вертикальной оси.

Таким образом, для решения задачи по баллистике необходимо записать уравнение ПРУД материальной точки и уравнение скорости при ПРУД в общем (векторном) виде и затем спроецировать их на оси координат. Рассмотрим две базовые модели, на которых чаще всего основывается решение подобных задач.

Пусть тело брошено горизонтально с начальной скоростью v_0.

Введем систему координат удобным для нас образом, как показано на рисунке (чаще всего, но не всегда, система координат связана с землей).



Вспомним уравнение ПРУД материальной точки, которое характеризует координаты:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

Теперь необходимо спроецировать данное уравнение на оси координат.

$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2} \\ x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2} \end{cases}$$

Проанализируем полученные проекции. В данном случае координата x_0 не задана и поэтому равна нулю, а координата y_0 равна высоте h, с которой было брошено тело. Проекция вектора начальной скорости $\vec{v}_0$ на ось y нулевая (вектор при проецировании на ось y обращается в точку), а на ось x проекция равна модулю вектора $v_{0x} = v_0$. На тело действует только ускорение свободного падения $\vec{g}$, которое направлено вертикально вниз. Исходя из этого, проекция ускорения на ось x нулевая, а на ось y равна $a_y = -g$.

С учетом наших рассуждений запишем систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} y = h - \dfrac{gt^2}{2} \\ x = v_0 t \end{cases}$$

Обозначим высоту, с которой было брошено тело за h, а дальность полета тела за L. Для данных величин в любой момент времени справедливо:

$$\begin{cases} h = \dfrac{gt^2}{2} \\ L = v_0 t \end{cases}$$

На данном этапе мы разобрались с координатами. Теперь разберемся со скоростями.

Запишем уравнение скорости при ПРУД материальной точки в общем (векторном) виде:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Спроецируем данное уравнение на оси координат аналогично предыдущему.

$$\begin{cases} v_y = v_{0y} + a_y t \\ v_x = v_{0x} + a_x t \end{cases}$$

Исходя из описанных выше рассуждений, систему уравнений можно представить в виде:

$$\begin{cases} v_y = -gt \\ v_x = v_0 \end{cases}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что по оси y тело движется равноускоренно, а по оси x — равномерно.

Теперь рассмотрим некоторую точку на траектории, в которой тело движется со скоростью $\vec{v}$.

Разобьем вектор $\vec{v}$ на проекции v_y и v_x, как показано на рисунке. Из математики можно выразить модуль скорости v через проекции:

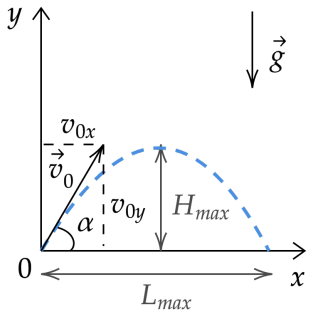
$$v = \sqrt{{v_y}^2 + {v_x}^2} = \sqrt{(-gt)^2 + {v_0}^2}$$

Обозначим угол за α. Из геометрии

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$$

Пусть теперь тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$.

Введем систему координат удобным для нас образом, как показано на рисунке.



Аналогично выполняем все рассуждения, как в предыдущем пункте. Сначала разбираемся с координатами.

$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2} \\ x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2} \\ x = v_{0x}t \end{cases}$$

Теперь разбираемся со скоростями. С учетом того, что проекция вектора начальной скорости $\vec{v_0}$ на ось y равна $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, а на ось x равна $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} v_y = v_{0y} + a_y t \\ v_x = v_{0x} + a_x t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y = v_0 \sin\alpha - gt \\ v_x = v_0 \cos\alpha \end{cases}$$

Обозначим высоту, с которой было брошено тело за h, а дальность полета тела за L. Для данных величин в любой момент времени справедливо:

$$\begin{cases} h = v_0 \sin\alpha t - \dfrac{gt^2}{2} \\ L = v_0 \cos\alpha t \end{cases}$$

Часто в задачах на баллистику фигурируют такие понятия, как максимальная высота подъема, дальность полета и время подъема и полета.

В момент времени падения на землю высота подъема равна нулю:

$$h = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} = 0$$

Вынесем за скобки t

$$t\left(v_0 \sin \alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0$$

Произведение может быть равно нулю либо когда $t = 0$, либо когда выражение в скобках равно нулю. Случай $t = 0$ нас не устраивает, поэтому рассмотрим только второй случай:

$$v_0 \sin \alpha - \frac{gt}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{пол}} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}}$$

Итак, тело бросили под углом к горизонту, оно пролетело некоторое расстояние и упало на землю, имея в момент падения высоту полета $h = 0$. Таким образом, мы нашли время всего полета. Траектория полета считается симметричной, поэтому время подъема на максимальную высоту в два раза меньше времени полета:

$$\boxed{t_{\text{под}} = \frac{t_{\text{пол}}}{2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}}$$

Раннее мы вывели формулу, определяющую расстояние, которое пролетело тело, в любой момент времени. Всей дальности полета соответствует время всего полета $t_{\text{пол}}$:

$$L_{max} = v_0 \cos \alpha t_{\text{пол}} = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Вспомним тригонометрию, а именно формулу синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Соберем формулу в числителе дроби в синус двойного угла. Тогда дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту:

$$\boxed{L_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

Заметим, что длина полета будет максимальной в случае, если тело было брошено под углом 45^o к горизонту. В данном случае $\sin 2\alpha$ максимален и равен 1.

Также была выведена формула, определяющая высоту, на которую поднялось тело, в любой момент времени. Максимальной высоте полета соответствует время подъема $t_{\text{под}}$:

$$H_{max} = v_0 \sin \alpha t_{\text{под}} - \frac{gt_{\text{под}}^2}{2}$$

$$H_{max} = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2$$

Максимальная высота подъема тела, брошенного под углом к горизонту:

$$\boxed{H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}$$

Обратите внимание, что готовых формул для $t_{\text{под}}$, $t_{\text{под}}$, L_{max}, H_{max} нет в кодификаторе, поэтому для задач из второй части их вывод необходимо будет показать.

Докажем, что траектория движения тела, брошенного под углом к горизонту, действительно является параболой (что и обеспечивает ее симметричность).

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = v_0 \sin \alpha t - \dfrac{gt^2}{2} \\ x = v_0 \cos \alpha t \end{cases}$$

Выразим из второго уравнение время и подставим в первое уравнение системы:

$$x = v_0 \cos\alpha t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Немного преобразуем уравнение и получим зависимость $y(x)$:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

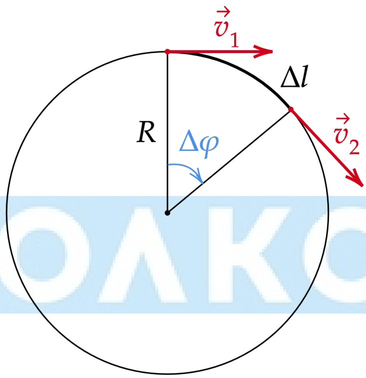
Сравните с общим видом уравнения параболы:

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

1.6 Движение по окружности.

Определение 8

Равномерное движение по окружности — частный случай криволинейного движения, когда вектор скорости тела не изменяется по модулю (длина вектора постоянна), а изменяет лишь свое направление.



Определение 9

Угловая скорость в случае равномерного движения по окружности — отношение угла поворота радиуса за некоторый промежуток времени:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{1.18}$$

При неравномерном движении по окружности угловая скорость вводится как производная угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t) \tag{1.19}$$

Единицы измерения: $[\omega] = \frac{\text{рад}}{c}$ (радиан в секунду) $= \text{с}^{-1}$

Угол поворота в радианной мере есть отношение длины дуги к радиусу:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{R} \tag{1.20}$$

Поскольку движение равномерное, длину дуги можно выразить через линейную скорость и время движения:

$$\Delta l = R\Delta\varphi = v\Delta t \tag{1.21}$$

Выразим линейную скорость:

$$v = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}R = \omega R \tag{1.22}$$

Отсюда **связь линейной и угловой скорости**:

$$v = \omega R \tag{1.23}$$

Определение 10

Период обращения — это время одного полного оборота, то есть отношение времени обращения к числу оборотов:

$$T = \frac{t}{N} \tag{1.24}$$

Единицы измерения: $[T] = \text{с}$ (секунда).

При равномерном движении по окружности период определяется по формуле:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad v = const \tag{1.25}$$

Определение 11

Частота обращения — это величина, обратная периоду. Частота показывает, сколько полных оборотов совершается в единицу времени.

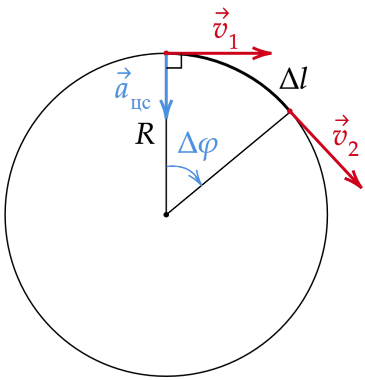
$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad (1.26)$$

Единицы измерения: $[\nu]$ = об/с (оборот в секунду) = Гц (герц) $= \text{с}^{-1}$

Отсюда угловая скорость, выраженная через частоту и период:

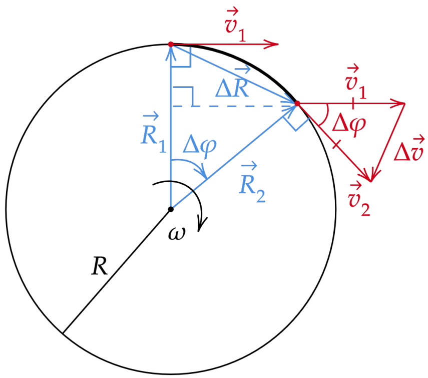
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (1.27)$$

При равномерном движении по окружности с изменением направления вектора скорости возникает **центростремительное ускорение** , направленное перпендикулярно вектору скорости $\vec{a}_{\text{цс}} \perp \vec{v}$ в центр окружности.



Центростремительное ускорение вычисляется по формуле:

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \qquad (1.28)$$



$v_1 = v_2 = v$

Выведем эту формулу. Поскольку движение по окружности равномерное, модуль линейной скорости постоянен:

$$|\Delta\vec{v}| = const$$

Из подобия треугольников:

$$\frac{|\vec{R}_1|}{|\vec{v}_1|} = \frac{|\Delta\vec{R}|}{|\Delta\vec{v}|}$$

Преобразуем выражение и разделим обе части на Δt:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \cdot \frac{R}{v} = \frac{|\Delta\vec{R}|}{\Delta t}$$

Ускорение по определению:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Модуль ускорения равен:

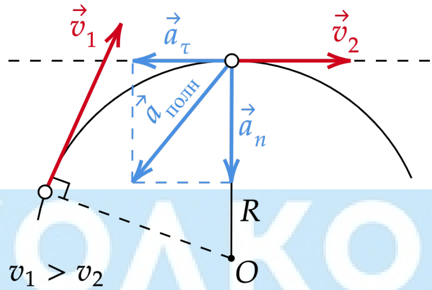
$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

С учетом этого:

$$|\vec{a}| \cdot \frac{R}{v} = |\vec{v}|$$

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R}$$

При криволинейном движении скорость изменяется по величине и по направлению, поэтому полное ускорение имеет две компоненты — нормальное ускорение и тангенциальное ускорение.



Нормальное (центростремительное) ускорение — компонента ускорения, характеризующая быстроту изменения направления вектора скорости для траектории с кривизной, направленное перпендикулярно (по нормали) вектору скорости к центру кривизны траектории.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \tag{1.29}$$

Единицы измерения:

$[a_n] = \text{м}/c^2$ (метр в секунду за секунду).

Тангенциальное ускорение — компонента ускорения, направленная по касательной к траектории движения. Если модуль скорости увеличивается, то тангенциальное ускорение a_τ направлено по касательной в направлении скорости. Если модуль скорости уменьшается, то тангенциальное ускорение a_τ направлено по касательной в противоположном скорости направлении.

Единицы измерения:

$[a_\tau] = \text{м}/c^2$ (метр в секунду за секунду).

Полное ускорение тела, движущегося по окружности, равно векторной сумме тангенциального и нормального ускорений.

$$\vec{a}_{\text{полн}} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \tag{1.30}$$

Или по теореме Пифагора:

$$a_{\text{полн}} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Пример №1

Диск равномерно вращается и за время $t = 2$ мин совершает $N = 360$ оборотов.

Найдите:

1) Частоту вращения ν;

2) Угловую скорость вращения ω;

3) Период вращения диска T;

4) Линейную скорость v_1 точек диска, расположенных на расстоянии $R_1 = 0,2$ м от центра диска;

5) Ускорение a_n точек диска, расположенных на расстоянии $R_2 = 10$ см от центра диска.

Решение:

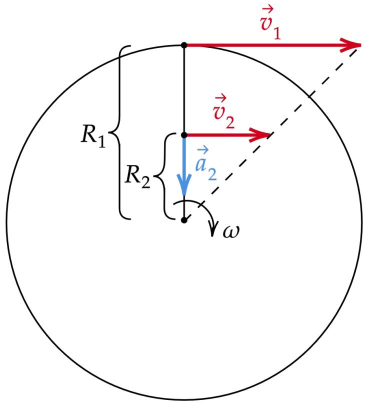
1) $\nu = \dfrac{N}{t} = \dfrac{360}{120\ \text{с}} = 3\ \text{об/с}$

2) $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 3\ \text{с}^{-1} \approx 18,8\ \text{с}^{-1}$

3) $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{t}{N} = \dfrac{1}{3}\ \text{с} \approx 0,33\ \text{с}$

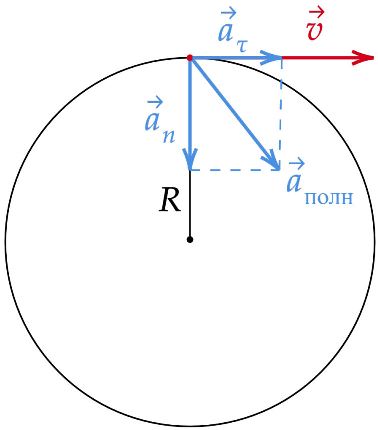
4) $v_1 = \omega R_1 = 18,8\ \text{с}^{-1} \cdot 0,2\ \text{м} = 3,76\ \text{м/с}$

5) $a_n = \omega^2 R_2 = (18,8\ \text{с}^{-1})^2 \cdot 0,1\ \text{м} \approx 35,3\ \text{м/с}^2$



Пример №2

Космонавт на тренировке, сидя в центрифуге, вращается по окружности радиуса 100 м, причем его скорость меняется по закону: $v(t) = 3t$. Найдите полное ускорение, которое испытывает космонавт через 20 секунд после начала тренировки.



Решение:

$$v(\tau) = 3\tau = 3 \cdot 20 = 60 \text{ м/с}$$

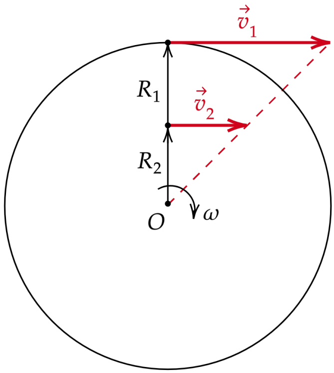
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{60^2}{100} = 36 \text{ м/с}^2$$

$$a_\tau = v'(t) = 3 \text{ м/с}^2$$

$$a_{\text{полн}} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{36^2 + 3^2} \approx 36,12 \text{ м/с}^2$$

Кинематические соотношения при движении по окружности

Соотношение 1: диск



Все точки, принадлежащие одному и тому же диску, вращаются с одинаковой угловой скоростью

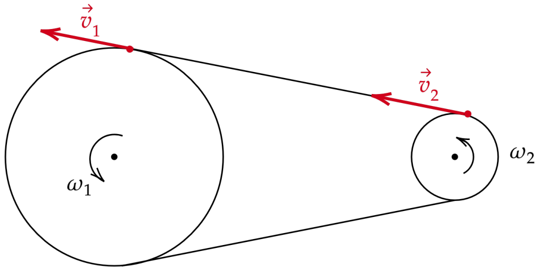
$$\omega_1 = \omega_2 \tag{1.31}$$

С учетом связи линейной и угловой скорости можно сделать вывод, что линейные скорости точек относятся прямо пропорционально их радиусам:

$$v = \omega R \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Чем ближе точка к центру окружности, тем меньше ее скорость, чем дальше от центра — тем скорость точки больше. Сам же центр окружности O неподвижен $v_o = 0$.

Соотношение 2: ременная передача

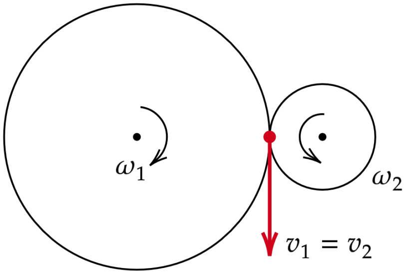


Поскольку шкивы соединены ремнем и ремень не растягивается и не сжимается, линейные скорости всех точек ремня одинаковы:

$$v_1 = v_2 \tag{1.32}$$

Угловые скорости точек ремня могут быть разными $\omega_1 \neq \omega_2$ или одинаковыми $\omega_1 = \omega_2$ (в зависимости от условия задачи).

Соотношение 3: имеется точка контакта



В точке контакта («зацепа») линейные скорости равны:

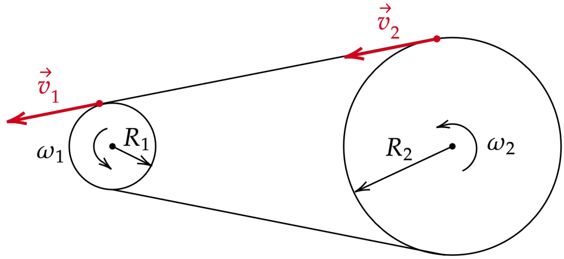
$$v_1 = v_2 \tag{1.33}$$

Угловые скорости точек «зацепа» могут быть разными $\omega_1 \neq \omega_2$ или одинаковыми $\omega_1 = \omega_2$ (в зависимости от условия задачи).

Пример №3

Движение от шкива 1 к шкиву 2 передается при помощи ременной передачи. Радиус второго шкива 20 см, период его вращения 4 с. Найдите радиус первого шкива, если известно, что он делает 60 оборотов в минуту.

Решение:



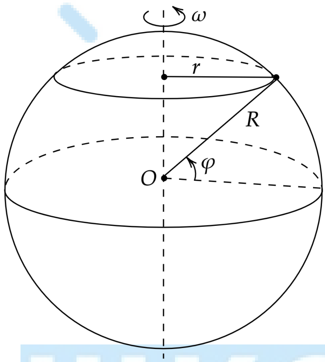
$$v_1 = v_2\ , \quad v = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$2\pi\nu_1 R_1 = \frac{2\pi}{T_2} R_2 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{1}{\nu_1 T_2} R_2 = \frac{20\ \text{см}}{1\ \text{с}^{-1} \cdot 4\ \text{с}} = 5\ \text{см}$$

Пример №4

Найти линейную скорость и ускорение точек, расположенных на земной поверхности (широта $\varphi = 60°$), обусловленные вращением Земли вокруг своей оси. Радиус Земли $R = 6400$ км.



Решение:

$T = 24$ часа $= 86400$ с

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ , \quad r = R\cos\varphi$$

$$v = \frac{2\pi}{86400} \cdot 6400 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} \approx 233 \text{ м/с}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{233^2}{6400 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2}} \approx 0,017 \text{ м/с}^2$$

Глава 2

Динамика

2.1 Динамика Ньютона.

Динамика, в отличие от кинематики, изучает **причины** возникновения механического движения.

Определение 12

Инерциальная система отсчета (ИСО) — система отсчета, в которой тела либо движутся прямолинейно и равномерно, либо покоятся, когда векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю. Критерием ИСО является первый закон Ньютона. Во всех инерциальных системах отсчета **процессы механики протекают одинаково**.

Как правило, для задач часто рассматривают систему отсчета, **связанную с поверхностью Земли**, как инерциальную. Если СО (тело) движется прямолинейно и равномерно или покоится относительно Земли (у тела нет ускорения относительно Земли), то эту СО (тело) можно считать ИСО.

Многие законы механики справедливы только в инерциальных системах отсчета.

I. Первый закон Ньютона:

Существуют такие системы отсчёта, называемые **инерциальными**, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

II. Второй закон Ньютона:

В **инерциальной системе отсчёта** ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F_i}}{m} \tag{2.1}$$

Масса тела есть мера его инертности. ***Сила*** есть мера взаимодействия двух материальных тел.

III. Третий закон Ньютона:

Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению. Эти силы имеют одну и ту же физическую природу и направлены вдоль прямой, соединяющей их точки приложения.

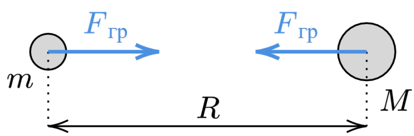
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| \tag{2.2}$$

Третий закон Ньютона выполняется **почти** всегда. Не выполняется, например, для силы Лоренца (магнетизм).

Силы в механике

1. Сила гравитации

Закон всемирного тяготения: две материальные точки массами m и M притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними.



Сила гравитации описывается законом Ньютона:

$$\boxed{F_{гр} = G\frac{mM}{R^2}}$$

где M, m — массы материальных точек, R — расстояние между ними, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ — гравитационная постоянная.

В данном случае ***масса*** является мерой гравитационного взаимодействия, мерой силы притяжения. Считается, что инерционная масса и гравитационная масса эквивалентны и равны:

$$m_{\text{ин}} = m_{\text{гр}} = m$$

Закон всемирного тяготения, будучи справедливым для материальных точек, перестает быть верным, если размерами тел пренебречь нельзя. Имеются, однако, ***два важных исключения***.

1. Закон справедлив, **если тела являются однородными шарами.** Тогда R — расстояние между их центрами. Сила притяжения направлена вдоль прямой, соединяющей центры шаров.

2. Закон справедлив, **если одно из тел — однородный шар, а другое — материальная точка, находящаяся вне шара.** Тогда R — расстояние от точки до центра шара. Сила притяжения направлена вдоль прямой, соединяющей точку с центром шара.

Второй случай особенно важен, так как позволяет применять формулу для силы притяжения тела (например, искусственного спутника) к планете.

Сила притяжения возникает между любыми объектами, обладающими массами. Массивные тела, такие как планета или звезда, обладают огромными массами, поэтому воздействие с их стороны ощущается больше, чем со стороны тел, имеющих относительно малые массы. Притяжением со стороны тел, обладающих малой массой обычно пренебрегают.

2. Сила тяжести

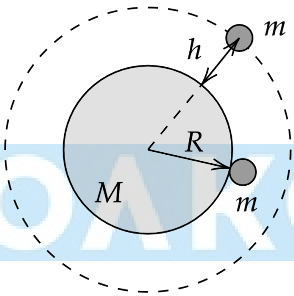
Сила тяжести — сила гравитационного притяжения, действующая на тело со стороны планеты.

$$\boxed{F_{\text{т}} = mg}$$

Учитывая, что сила тяжести является частным случаем силы гравитации, выведем ***ускорение свободного падения*** — силовую характеристику поля силы тяжести:

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = G\frac{M}{R^2}}$$

где m — масса тела, расположенного в поле силы тяжести планеты, M — масса планеты, R — радиус планеты.



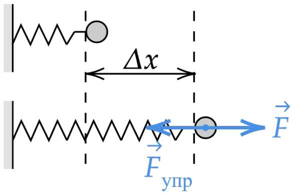
Если тело находится на высоте h над поверхностью планеты, то для ускорения свободного падения:

$$\boxed{g(h) = G\frac{M}{(R+h)^2}}$$

3. Сила упругости

Сила упругости возникает при упругой деформации тела и направлена в сторону, противоположную смещению частиц тела в процессе деформации.

Сила упругости подчиняется ***закону Гука***: сила упругости, возникающая при упругой деформации растяжения или сжатия тела



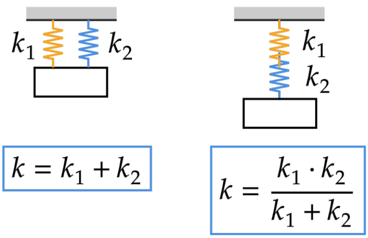
пропорциональна абсолютному значению изменения длины тела.

$$\boxed{F_{\text{упр}_x} = -k\Delta x} \qquad \boxed{F_{\text{упр}} = k\Delta x}$$

где Δx — удлинение пружины, k — жесткость пружины.

При малом удлинении (деформации) можно считать, что ***деформация упругая***, то есть исчезающая после прекращения действий на тело внешних сил.

Типы соединения пружин, не обладающих массой



1) Параллельное соединение:

Общая сила упругости: $F_{\text{упр}} = F_{\text{упр1}} + F_{\text{упр2}}$

С учетом закона Гука: $k\Delta l = k_1\Delta l + k_2\Delta l \quad \Rightarrow \quad k = k_1 + k_2 \quad \Rightarrow$ $k = \sum k_i$

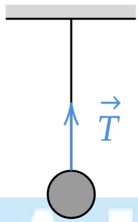
2) Последовательное соединение:

Общее удлинение пружины, состоящей из двух пружин: $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$

С учетом закона Гука: $\dfrac{F_{упр}}{k} = \dfrac{F_{упр}}{k_1} + \dfrac{F_{упр}}{k_2} \Rightarrow \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} \Rightarrow$ $\dfrac{1}{k} = \sum \dfrac{1}{k_i}$

4. Сила натяжения нити

Если тело подвешено на нити, то возникает сила натяжения нити T. Из-за того что нить растягивается, расстояние между молекулами увеличивается, и молекулы пытаются сжаться, что приводит к возникновению ***силы натяжения нити***.



У силы натяжения нити нет формулы. Вектор силы натяжения нити направлен вдоль нити против деформации согласно закону Гука.

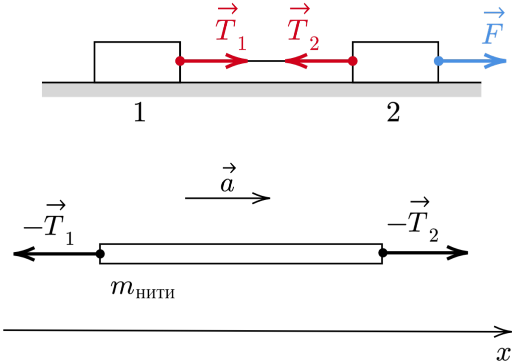
При прочтении условия задачи следует обращать внимание на слова-маркеры.

- **Невесомая нить** $\Rightarrow$ Из условия невесомости нити следует, что ***модуль силы натяжения нити в любой точке одинаков***.

$$\boxed{T_1 = T_2 = T}$$

Рассмотрим конструкцию, состоящую из грузов 1 и 2, связанных невесомой нитью. На груз 2 действует сила F, тянущая конструкцию вправо.

Рассмотрим отдельно нить и силы T_1 и T_2, действующие на нее по третьему закону Ньютона со стороны грузов 1 и 2:

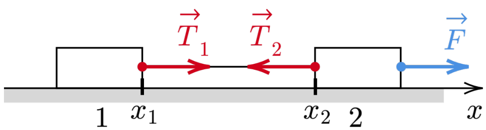


Пусть у невесомой нити есть масса $m_{\text{нити}} = 0$ и она (нить) движется с ускорением a. Тогда по второму закону Ньютона модули сил натяжения нити равны:

$$T_2 - T_1 = m_{\text{нити}} a \Rightarrow T_1 = T_2$$

- **Нерастяжимая нить** $\Rightarrow$ Поскольку нить нерастяжимая, то ее длина постоянна, следовательно, ***можно записать кинематическую связь***.

$$\boxed{a_1 = a_2 = a}$$



Поскольку нить нерастяжимая, то длина ее постоянна $\Delta L = 0$:

$$L = const = x_2 - x_1$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} - \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \Rightarrow 0 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} - \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \Rightarrow v_{x2} = v_{x1}$$

Продифференцируем полученное уравнение по времени:

$$\frac{\Delta v_{x2}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_{x1}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a_{x2} = a_{x1}$$

Таким образом, нерастяжимость нити дает возможность получить кинематическую связь — равенство ускорений.

5. Сила нормальной реакции опоры

Представим, что тело лежит на поверхности. Под действием веса тела поверхность деформируется и по третьему закону Ньютона пытается вернуть себя в исходное положение, действуя на тело силой N — ***силой нормальной реакции опоры***.

Слово «нормальная» отсылает к понятию «нормаль» и отражает, что сила нормальной реакции опоры направлена перпендикулярно поверхности. Данная сила возникает, когда есть контакт тела с какой-либо опорой.

6. Вес

Вес тела — это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Вес приложен к опоре или подвесу, а не к телу.

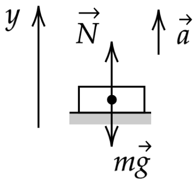
На понятии веса основана базовая задача про лифт.

7. Сила трения

Существует сухое и вязкое трение.

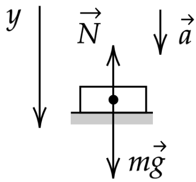
7.1 Вязкое трение

Вязкое трение возникает при движении твердого тела в жидкости или газе.



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$
$$ma = N - mg$$
$$N = mg + ma$$
$$\boxed{P = m(g + a)}$$

Вес тела больше силы тяжести.



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$
$$ma = mg - N$$
$$N = mg - ma$$
$$\boxed{P = m(g - a)}$$

Вес тела меньше силы тяжести.

Если $a = g \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ состояние невесомости.

Формулы для сил сопротивления при вязком трении выводятся, как правило, эмпирически и действуют в узком диапазоне значений скоростей или для определенной формы тела.

7.2 Сухое трение

Выделяют три основных вида сухого трения: трение покоя, скольжения и качения. В названиях отражен вид движения, при котором возникает трение того или иного вида.

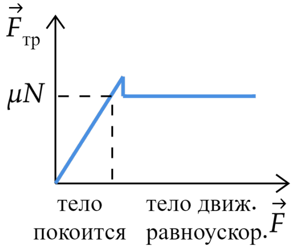
1) Сила трения покоя

Возникает в ситуации возможного движения одного тела по поверхности другого и направлена вдоль поверхности соприкосновения, против направления возможного движения.

У силы трения покоя нет формулы. Существует следующее **неравенство**:

$$\boxed{F_{\text{тр. п.}} \leq \mu N}$$

Максимальная величина силы трения покоя равна силе трения скольжения, то есть сила трения покоя может находиться в диапазоне от нуля до μN.

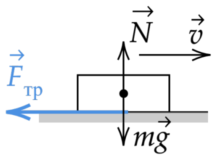


2) Сила трения скольжения

Возникает при скольжении. Определяется по формуле:

$$\boxed{F_{\text{тр. ск.}} = \mu N}$$

где N — сила нормальной реакции опоры, μ — коэффициент трения. Коэффициент трения определяется свойствами материала трущихся поверхностей.



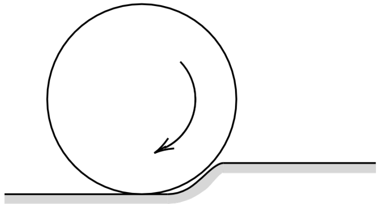
Сила трения скольжения направлена противоположно относительной скорости:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{тр. ск.}} \uparrow\downarrow \vec{v}_{\text{отн}}}$$

При прочтении условия задачи следует обращать внимание на слова-маркеры. Если в условии сказано, что поверхность ***гладкая***, то действием силы трения можно пренебречь. Если в условии сказано, что поверхность ***шероховатая***, то действует сила трения.

3) Сила трения качения

Возникает при качении, когда тело деформирует поверхность при движении. Образуется некий «бугорок», на который телу необходимо закатиться.



Для этого необходимо создать момент силы, чтобы создалось некоторое вращение. Сила трения качения препятствует тому, чтобы тело закатывалось, создавая момент силы, который препятствует вращению.

8. Сила Архимеда

На погруженное в жидкость или газ тело действует ***выталкивающая сила***, или ***сила Архимеда***.

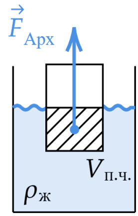
Обобщенный закон: в любой СО на тело, погруженное в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила, равная весу жидкости (или газа) в объеме погруженной части тела.

$$F_{\text{Арх}} = P_{\text{ж}}$$

Формулировка закона Архимеда для ИСО: на любое тело, которое погружено в жидкость (газ), находящуюся в состоянии равновесия, действует со стороны жидкости (газа) сила выталкивания, равная произведению плотности вещества в котором находится тело, на ускорение свободного падения и на объем погруженной части тела.

$$\boxed{F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{п.ч.}}}$$

где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости (среды), g — ускорение свободного падения, $V_{\text{п.ч.}}$ — объем погруженной части.



Применимость закона для ИСО: сосуд с жидкостью движется равномерно и прямолинейно или покоится относительно ИСО (не имеет ускорения относительно ИСО), либо сам сосуд с жидкостью является ИСО.

2.2 Давление. Сила Архимеда.

Определение 13

Давление — это физическая величина, численно равная отношению силы F, действующей перпендикулярно поверхности к площади этой поверхности S.

$$p = \frac{F}{S} \tag{2.3}$$

Единицы измерения:

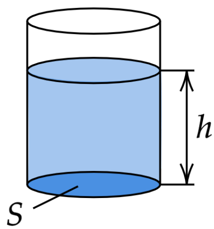
$[p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1$ Па — паскаль.

$[p] =$ мм. рт. ст. — миллиметр ртутного столба (1 мм. рт. ст. $= 133,3$ Па).

$[p] =$ атм — атмосфера (1 атм $= 10^5$ Па).

Давление жидкостей и газов

Имеется сосуд с площадью дна S, заполненный жидкостью до высоты h.



На дно сосуда площадью S действует сила — вес жидкости P. Найдем давление на дно сосуда:

$$p = \frac{P}{S} \tag{2.4}$$

Поскольку жидкость в сосуде неподвижна, ее вес равен силе тяжести, которую можно вычислить, если известна масса жидкости:

$$P = mg \tag{2.5}$$

Массу жидкости можно выразить через ее плотность $\rho_ж$ и объем V:

$$m = \rho_ж \cdot V \tag{2.6}$$

Из геометрии объем жидкости:

$$V = S \cdot h \tag{2.7}$$

По очереди подставив известные величины в приведенные выше формулы, для вычисления давления имеем следующее выражение:

$$p = \frac{\rho_ж Shg}{S} \quad \Rightarrow \quad p = \rho_ж gh \tag{2.8}$$

Давление, создаваемое слоем жидкости на дно и стенки сосуда прямо пропорционально **высоте** слоя жидкости и ее **плотности**. Давление столба жидкости **не зависит** от ее массы и формы сосуда.

- Давление жидкости на дно сосуда:

$$p = \rho_ж gh$$

- Среднее давление жидкости на стенки сосуда:

$$p = \frac{\rho_ж gh}{2},$$

где $\rho_ж$ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, h — высота столба жидкости.

Сила давления

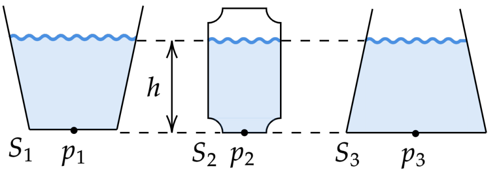
Определение 14

Сила давления — сила, действующая перпендикулярно поверхности тела, равная произведению давления на площадь этой поверхности.

$$F = p \cdot S \tag{2.9}$$

Единицы измерения:

$[F] = \text{Н}$ — ньютоны.



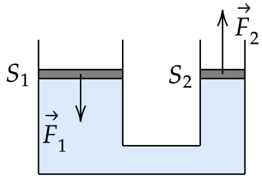
Сила давления жидкости на дно сосуда **зависит** от площади основания этого сосуда.

Закон Паскаля

Давление, оказываемое на жидкость или газ, передается в любую точку этой среды **без изменения по всем направлениям**.

Применение закона Паскаля:

- Гидравлический пресс — устройство, дающее выигрыш в силе. Состоит из поршней большего и малого диаметров, установленных в сообщающихся цилиндрах, под поршнями находится жидкость.
  На поршень большего диаметра начинают действовать силой $\vec{F}_1$, создавая давление $p = \dfrac{F_1}{S_1}$. Избыточное давление p согласно закону Паскаля распространяется равномерно во все стороны, создавая на поршне малого диаметра точно такое же давление $p = \dfrac{F_2}{S_2}$. Из равенства давлений на поршнях можно вывести со-



отношение:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$$

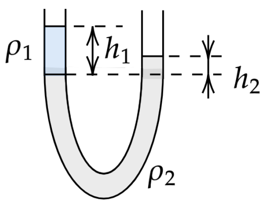
- Сообщающиеся сосуды — любые два или несколько соединенных между собой сосудов, в которых жидкость может свободно перетекать из одного сосуда в другой.

  Особенности сообщающихся сосудов:

  1. **Однородная** жидкость устанавливается на одном уровне независимо от формы сосуда (при условии, что давление над жидкостью в сосудах одинаково).

  $$p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \rho_{ж} g h_1 = \rho_{ж} g h_2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_2$$

  2. **Неоднородная** жидкость устанавливается на разных уровнях. Высоты столбов жидкостей обратно пропорциональны их плотностям:

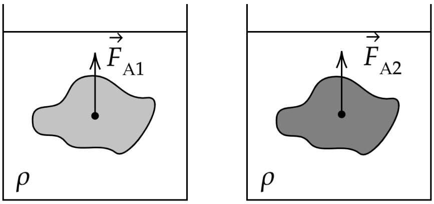


$$p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1},$$

где p_1 и p_2 — давление столба жидкости в первом и втором колене сосуда соответственно.

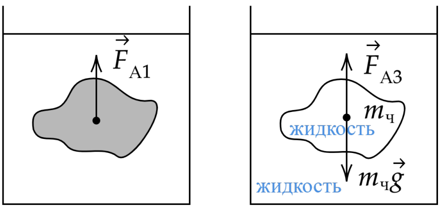
Сила Архимеда

Вывод формулы для инерциальной системы отсчета (ИСО).
Сила Архимеда не должна зависеть от свойств тела, поскольку она действует на тело со стороны жидкости. Рассмотрим два случая.
Случай 1. Пусть имеется свинцовое и стальное тело произвольной одинаковой формы и два одинаковых сосуда с жидкостью.



Свинец Сталь

Силы Архимеда $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$, действующие на тело из свинца и на тело и стали равны, так как сила Архимеда определяется разностью давлений со стороны жидкости и не зависит от материала, из которого состоит тело. Итак, $F_1 = F_2$.
Случай 2. Представим, что материал, из которого состоит второе тело — жидкость массой $m_ч$, причем та же самая, что содержится в обоих сосудах. Тело, состоящее из жидкости массой $m_ч$ находится в равновесии, и на него действуют сила тяжести $m_ч\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{Арх3}$, как показано на рисунке ниже.



Свинец Жидкость

Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F}_{\text{Арх3}} + m_{\text{ч}}\vec{g} = 0$$

$$F_{\text{Арх3}} = m_{\text{ч}} g$$

Массу погруженной части можно найти по формуле $m_{\text{ч}} = \rho \cdot V_{\text{п.ч.}}$ Если обобщить, то имеем:

$$F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{п.ч.}},$$

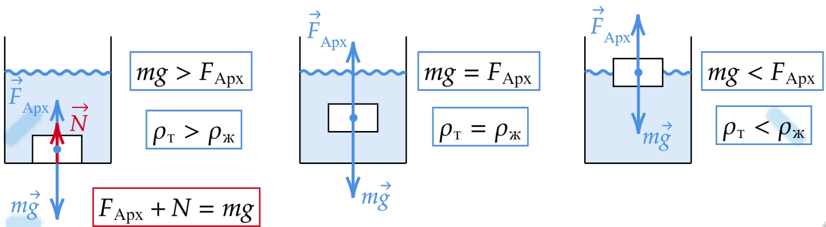
где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости, $V_{\text{п.ч.}}$ — объем погруженной в жидкость части тела.

Универсальная формула для инерциальной и неинерциальной систем отсчета.
В общем виде закон Архимеда представлен равенством:

$$F_{\text{Арх}} = P_{\text{ж}}$$

Формулировка: сила Архимеда, действующая на тело, равна весу жидкости в объеме погруженной части (или в объеме вытесненной телом части).

Условия плавания тел где $\rho_{\text{т}}$ — плотность тела, $\rho_{\text{ж}}$ — плот-



тело тонет

тело плавает внутри жидкости

тело плавает на поверхности жидкости

ность жидкости, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции опоры.

Глава 3

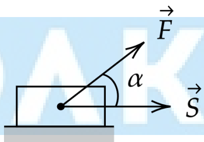
Законы сохранения

3.1 Работа и энергия.

Определение 15

Работа силы — скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения. По определению скалярного произведения работа силы — произведение модуля вектора силы на модуль вектора перемещения и на косинус угла между ними.

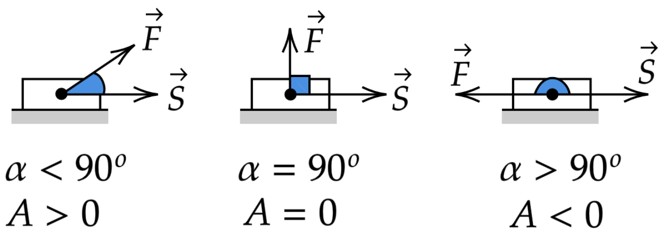
$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = F \cdot S \cdot \cos\alpha \tag{3.1}$$



Единицы измерения:

$[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ — джоуль.

Зависимость работы от **направления силы**:



Определение 16

Мощность — скалярная величина, характеризующая скорость совершения работы, равная отношению работы, выполняемой за некоторый промежуток времени, к этому промежутку времени.

$$N = \frac{A}{t} \tag{3.2}$$

Единицы измерения:

$[N]$ = Вт — ватт.

При неизменной силе $\vec{F} = const$ справедливы следующие рассуждения.

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} \tag{3.3}$$

$$A = FS\cos\alpha \tag{3.4}$$

Подставляя выражение работы в выражение мощности, имеем:

$$N = \frac{\Delta(FS\cos\alpha)}{\Delta t} = F\cos\alpha\frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{3.5}$$

По определению $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = v$, следовательно, мгновенная мощность:

$$N = Fv\cos\alpha \tag{3.6}$$

Определение 17

Коэффициент полезного действия (КПД) — физическая величина, равная отношению полезной работы (мощности) к затраченной.

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{зат}}} \cdot 100\% = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{зат}}} \cdot 100\% \tag{3.7}$$

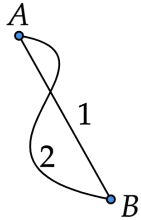
Единицы измерения: $[\eta] = \%$ — проценты. $[\eta] =$ доли единицы (для перевода в доли единицы необходимо проценты поделить на 100%).

КПД показывает, какая часть энергии переводится в пользу. КПД не может быть больше 100% или 1.

Силы в природе можно классифицировать на **два вида**:

1. Консервативные (потенциальные) силы — силы, сохраняющие механическую энергию замкнутой системы тел. Работа консервативных сил не зависит от формы пути между двумя точками (при перемещении тела между ними), а зависит лишь от начального и конечного положения тела. Работа потенциальной силы по замкнутой траектории равна нулю.
Примеры: сила тяжести, сила упругости, сила гравитации, сила Кулона.

2. Диссипативные силы — силы, которые рассеивают механическую энергию. Работа диссипативной силы зависит от траектории движения тела и по замкнутой траектории не равна нулю.
Примеры: сила трения, сила сопротивления, сила натяжения.



Для консервативных сил:
$A_1 = A_2$

Для диссипативных сил:
$A_1 \neq A_2$

Определение 18

Энергия — скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения и взаимодействия материи, мерой перехода движения материи из одних форм в другие.

1. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия обусловлена движением тела.

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} \tag{3.8}$$

Единицы измерения:
$[E_{\text{к}}]$ = Дж — джоуль.

Зная, что импульс $p = mv$, а также домножив и поделив на m, имеем:

$$E_{\text{кин}} = \frac{m^2v^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{кин}} = \frac{p^2}{2m} \tag{3.9}$$

Теорема о кинетической энергии

Изменение кинетической энергии тела равно работе всех сил, действующих на тело.

$$\Delta E_{\text{кин}} = A_{F_1} + A_{F_2} + \ldots + A_{F_i} = \sum_{i=1}^{n} A_{F_i} \tag{3.10}$$

2. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия зависит от взаимного положения тел в системе, которое изменяют консервативные силы.

Консервативная сила	Формула	Потенциальная энергия
Сила тяжести	$F_{\text{тяж}} = mg$	$E_{\text{пот}} = mgh$
Сила упругости	$F_{\text{упр}} = -kx$	$E_{\text{пот}} = \dfrac{kx^2}{2}$
Гравитационная сила	$F_{\text{грав}} = G\dfrac{Mm}{R^2}$	$E_{\text{пот}} = -G\dfrac{Mm}{R}$
Сила Кулона	$F_{\text{Кул}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}$	$E_{\text{пот}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r}$

Единицы измерения:

$[E_{\text{пот}}] = \text{Дж}$ — джоуль.

Величина потенциальной энергии может быть определена с точностью до произвольной постоянной, значение которой зависит от выбора нулевого уровня. Нулевой уровень — положение тела, в котором потенциальную энергию, которой оно обладает, условно принимают за ноль.

В отличие от кинетической энергии, потенциальная энергия может принимать отрицательные значения, если тело находится ниже нулевого уровня.

Теорема о потенциальной энергии

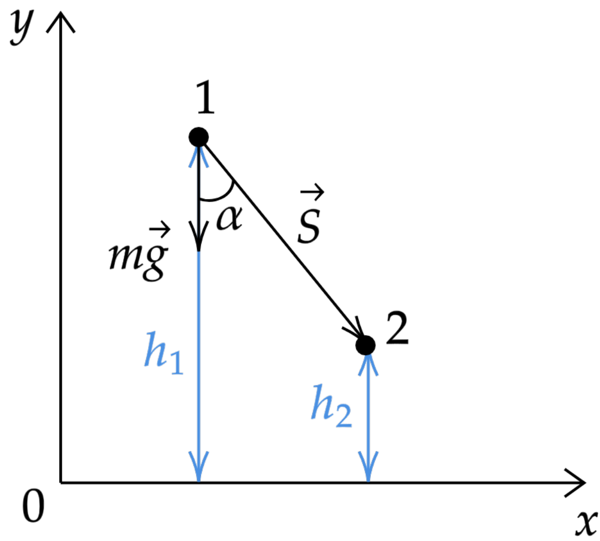
Работа потенциальной силы определяется как разность потенциальных энергий («было» минус «стало»).

$$A_{\text{пот}} = E_{\text{пот.н.}} - E_{\text{пот.к.}} \tag{3.11}$$

Рассмотрим, как работает данная теорема на примере силы тяжести.

Пусть тело массой m переместилось из положения 1 в положение 2. Работу силы тяжести в положении 1 можно найти по уже известной нам формуле:

$$A_{mg} = mgS\cos\alpha \tag{3.12}$$



Теперь воспользуемся теоремой о потенциальной энергии и найдем работу той же силы тяжести с учетом того, что $E_{\text{пот}} = mgh$:

$$A_{mg} = mgh_1 - mgh_2 = mg(h_1 - h_2)$$

Также можно заметить, что $(h_1 - h_2) = S\cos\alpha$, тогда:

$$A_{mg} = mgS\cos\alpha \tag{3.13}$$

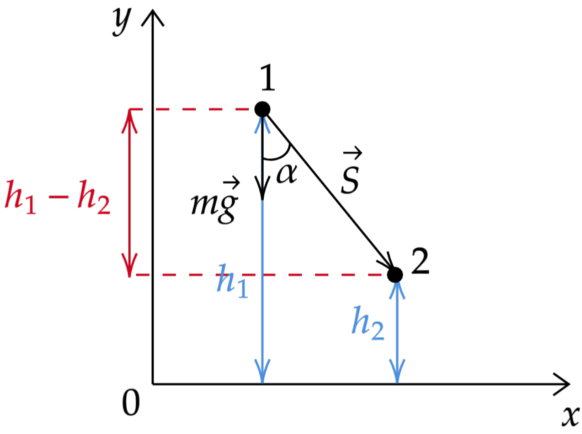
Таким образом, мы вывели связь между общей формулой для работы и формулой для работы потенциальных сил.

Закон сохранения механической энергии

Вспомним теорему о кинетической энергии:

$$\Delta E_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^{n} A_{F_i}$$

Разобьем сумму всех сил на суммы потенциальных и непотенци-



альных сил:

$$\Delta E_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^{n} A^{\text{пот}}{}_{F_i} + \sum_{i=1}^{n} A^{\text{непот}}{}_{F_i}$$

Если сумма работ всех непотенциальных сил равна нулю $\sum\limits_{i=1}^{n} A^{\text{непот}}{}_{F_i} = 0$, то:

$$\Delta E_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^{n} A^{\text{пот}}{}_{F_i}$$

Вспомним теорему о потенциальной энергии и подставим ее в предыдущее выражение: $A_{\text{пот}} = E_{\text{пот.н.}} - E_{\text{пот.к.}}$.

$$\Delta E_{\text{кин}} = E_{\text{кин.к}} - E_{\text{кин.н}} = \sum_{i=1}^{n} (E_{\text{пот.н.i}} - E_{\text{пот.к.i}}) = 0$$

Таким образом, мы вывели **закон сохранения механической энергии**:

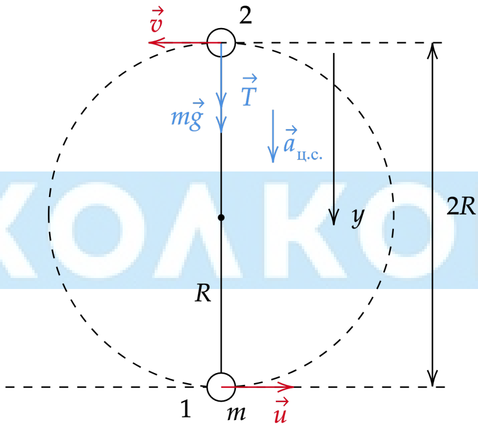
$$E_{\text{кин.к}} + \sum_{i=1}^{n} E_{\text{пот.к.i}} = E_{\text{кин.н}} + \sum_{i=1}^{n} E_{\text{пот.н.i}} = const \qquad (3.14)$$

Формулировка: сумма кинетической и потенциальной энергии в конце равна сумме кинетической и потенциальной энергии в начале и есть величина неизменная в том случае, если работа всех непотенциальных сил равна нулю.

Шаблоны для решения задач

1. Шарик, подвешенный на нити, совершает полный оборот с минимальной скоростью

Необходимо определить, с какой минимальной скоростью шарик, подвешенный на нити, сможет совершить полный оборот.



Пусть при прохождении положения 1 шарик массой m имеет скорость u. Рассмотрим положение 2. В верхней точке (положение 2) на шарик действует сила натяжения нити и сила тяжести. Так как траектория движения — окружность, то присутствует центростремительное ускорение. Для совершения полного оборота шарику необходимо обладать некоторой скоростью в верхней точке (положение 2). В противном случае, если его скорость в положении 2 равна нулю, шарик упадет вниз. Примем скорость шарика в верхней точке за v. Запишем второй закон Ньютона для шарика в положении 2 и спроецируем его на ось Oy:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$Oy: \quad mg + T = ma_{\text{ц.с.}} \quad a_{\text{ц.с.}} = \frac{v^2}{R}$$

$$mg + T = m\frac{v^2}{R}$$

Рассмотрим энергии, которыми обладает шарик в положениях 1 и 2. Примем, что нулевой уровень потенциальной энергии проходит через точку 1, как показано на рисунке. Тогда в положении 1 шарик будет обладать только кинетической энергией. В положении 2 шарик находится на высоте $H = 2R$ относительно выбранного нами нулевого уровня и обладает скоростью v, следовательно, он обладает потенциальной и кинетической энергиями. Запишем закон сохранения энергии для шарика в положениях 1 и 2:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg2R$$

Из ЗСЭ следует, что чем меньше скорость u, тем меньше скорость v. Из второго закона Ньютона следует, что чем меньше скорость v, тем меньше сила натяжения нити T. Чтобы тело совершило полный оборот, сила натяжения нити должна быть минимальна в верхней точке (положение 2) и во всех положениях должна быть $T \geq 0$. Так как нас интересует минимальная скорость, то и значение T должно быть минимальным $\Rightarrow T = 0$ — предельный случай, то есть сила натяжения нити отсутствует.

Учтем этот случай при записи второго закона Ньютона для положения 2:

$$mg + 0 = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = gR$$

Поделим на m и домножим на 2 выражение для ЗСЭ, а также учтем, что $v^2 = gR$:

$$u^2 = gR + 2g2R = 5gR \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{5gR} = u_{min}$$

Это и есть минимальная скорость, необходимая для того, чтобы шарик на нити сделал полный оборот.

2. Шарик, закрепленный на стержне, совершает полный оборот с минимальной скоростью

ЗСЭ для стержня выглядит аналогично ЗСЭ для нити:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg2R$$

В данном случае минимальная скорость v в положении 2 равна нулю. Тогда:

$$\frac{mu^2}{2} = 0 + mg2R \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{4gR}$$

Минимальная скорость, которая необходима для того чтобы шарик, закрепленный на стержне, совершил полный оборот: $u_{min} = 0$.

$$u_{min} = 2\sqrt{gR}$$

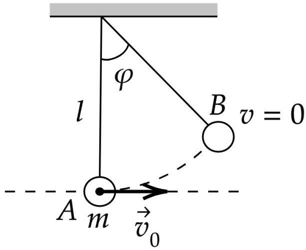
В отличие от нити стержень является жесткой конструкцией, и сила натяжения может действовать как вниз, так и вверх, поэтому условия минимальности для стержня и нити разные.

3. Шарик на нити отклоняют от положения равновесия

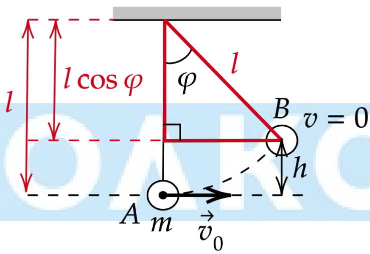
Рассмотрим следующую мини-конструкцию. Пусть шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, имеет скорость v_0 в положении A (положение равновесия) и поднимается в положение B, где его скорость $v = 0$, отклонившись на угол φ от положения равновесия.

Пусть нулевой уровень для потенциальной энергии шарика проходит через точку A как показано на рисунке. Тогда в положении A шарик обладал только кинетической энергией. При переходе из положения A в положение B шарик поднимается на некоторую высоту h, где его скорость становится равной нулю. Следовательно, в положении B шарик обладает только потенциальной энергией. Исходя из этого запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = 2gh$$



Выразим высоту h. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник, который на рисунке ниже показан красным цветом.



Тогда высоту h можно найти как:

$$h = l - l\cos\varphi$$

Подставим в предыдущую формулу и найдем связь между тремя параметрами (l, v_0, φ):

$$v_0^2 = 2gl(1 - \cos\varphi)$$

3.2 Импульс.

Определение 19

Импульс — векторная физическая величина, численно равная произведению массы на скорость. Импульс есть количественная характеристика движения.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{3.15}$$

Единицы измерения: $[p] =$ кг·м/с

Второй закон Ньютона в импульсной форме

Запишем второй закон Ньютона согласно основной его формулировке:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = m\vec{a} \tag{3.16}$$

Распишем ускорение по определению:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3.17}$$

Рассмотрим отдельно правую часть. Распишем изменение скорости и раскроем скобки:

$$gm\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{m(\vec{v}_{\text{к}} - \vec{v}_0)}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_{\text{к}} - m\vec{v}_0}{\Delta t} \tag{3.18}$$

Выражения $m\vec{v}_{\text{к}}$ и $m\vec{v}_0$ есть не что иное, как конечный и начальный импульс системы:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \frac{\vec{p}_{\text{к}} - \vec{p}_0}{\Delta t} \tag{3.19}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n)\Delta t \tag{3.20}$$

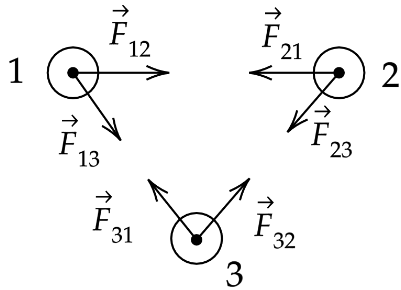
Таким образом, второй закон Ньютона в импульсной форме:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \tag{3.21}$$

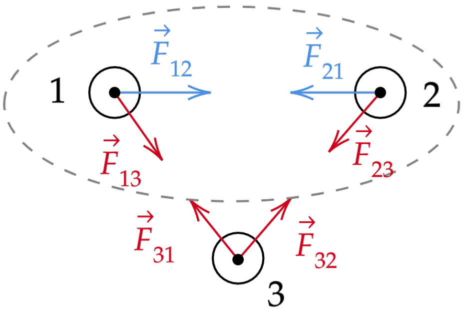
Выражение $\vec{F}\Delta t$ называется **импульсом силы**.

Импульс системы тел

Рассмотрим систему из трех тел 1, 2, 3. Пусть все тела системы взаимодействуют друг с другом с некоторыми силами $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{23}$ и $\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{32}$.



Выберем систему «поменьше», состоящую из тел 1 и 2. Внутренние силы — силы, которые появляются в результате взаимодействия тел внутри системы. Внешние силы действуют на тела системы со стороны внешних объектов. В данном случае $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ — внутренние силы, $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{23}$ — внешние силы.



Запишем второй закон Ньютона в импульсной форме для тела 1 и 2 и просуммируем полученные уравнения.

Для первого тела: $\Delta\vec{p}_1 = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13})\Delta t$.

Для второго тела: $\Delta\vec{p}_2 = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23})\Delta t$.

Сумма: $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23})\Delta t$.

По третьему закону Ньютона векторная сумма внутренних сил $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ равна нулю. Величину $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2$ назовем изменением импульса системы $\Delta\vec{p}_{\text{сист}}$. С учетом этого: $\Delta\vec{p}_{\text{сист}} = (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23})\Delta t$

В общем виде:

$$\Delta\vec{p}_{\text{сист}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t \tag{3.22}$$

Формулировка: изменение импульса системы равно векторной сумме импульсов внешних сил.

Закон сохранения импульса

Импульс системы тел есть величина постоянная, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

$$\Delta\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{сист}} = \vec{const} \tag{3.23}$$

Закон сохранения импульса выполняется в следующих случаях:

1. Если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\vec{F}_{\text{внеш }1} + \vec{F}_{\text{внеш }2} + ... + \vec{F}_{\text{внеш }n} = \vec{0} \tag{3.24}$$

2. Если сумма проекций векторов внешних сил, действующих на систему тел, на некоторую ось равна нулю. Тогда импульс системы остается неизменным вдоль этой оси:

$$F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = 0 \tag{3.25}$$

3. Если промежуток времени взаимодействия Δt пренебрежительно мал, то есть стремится к нулю (например, при взрывах, ударах, столкновениях):

$$\Delta t \to 0 \tag{3.26}$$

Глава 4

Статика и колебания

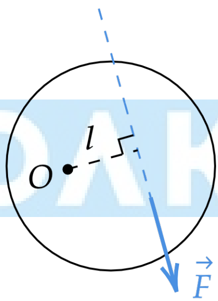
4.1 Статика.

Определение 20

Момент силы относительно оси вращения — произведение силы на ее плечо. Момент силы является скалярной величиной в плоскости и векторной величиной в пространстве.

$$M = \pm F \cdot l \tag{4.1}$$

Единицы измерения: $[M]$ = Н·м



Определение 21

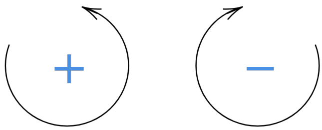
Плечо силы — кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Определение 22

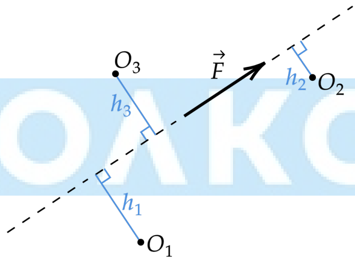
Линия действия силы — прямая, проходящая через вектор силы.

Направление момента силы

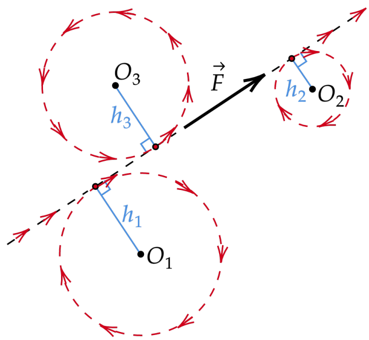
Момент силы считается положительным, если сила стремится поворачивать тело против часовой стрелки, и отрицательным. если по часовой стрелке.



Рассмотрим это на примере. Пусть даны сила $\vec{F}$ и три оси вращения O_1, O_2, O_3. В данном случае h_1, h_2, h_3 являются плечами силы $\vec{F}$ относительно осей O_1, O_2, O_3 соответственно.



Мысленно проведем для каждой оси окружность радиусом, равным длине плеча, с центром в оси вращения так, чтобы эта окружность касалась линии действия силы $\vec{F}$.

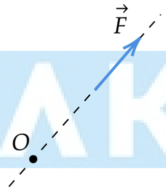


В точке соприкосновения плеч h_1 и h_2 и линии действия силы направление силы $\vec{F}$ словно «закручивает» окружности по часовой стрелке. Следовательно, момент силы $\vec{F}$ относительно оси O_3 отрицательный.

В точке соприкосновения плеча h_3 и линии действия силы направление силы $\vec{F}$ «закручивает» окружность против часовой стрелки. Следовательно, момент силы $\vec{F}$ относительно оси O_3 положительный.

При решении задач чертить окружности не нужно, здесь это приведено для упрощения понимания.

Момент силы равен нулю, если линия действия силы пересекает ось вращения: $l = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0$



Правило моментов: тело, имеющее неподвижную ось вращения, находится в равновесии, если **алгебраическая сумма моментов всех приложенных к телу сил равна нулю.**

Условия равновесия

1) Силы уравновешены вдоль любой оси.

2) Суммарный момент сил, вращающих тело в одну сторону, равен суммарному моменту сил, вращающих тело в другую сторону.

Также условия равновесия тела можно сформулировать следующим образом:

1) Равна нулю векторная сумма всех сил, приложенных к телу.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \vec{0} \qquad (4.2)$$

2) Равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил, приложен-

ных к телу, относительно любой оси.

$$M_{F_1} + M_{F_2} + ... + M_{F_n} = 0 \tag{4.3}$$

Чтобы тело находилось в равновесии, должны выполняться **оба условия.**

4.2 Механические колебания.

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний

- Колебания — это повторяющиеся во времени изменения состояния системы. Понятие колебаний охватывает очень широкий круг явлений.

- Колебания механических систем — это механическое движение тела или системы тел, которое обладает повторяемостью во времени и происходит в окрестности положения равновесия.

- Положением равновесия называется такое положение системы, в котором она может оставаться сколь угодно долго (будучи помещенной в это положение в состоянии покоя).

- Период колебаний T — это время одного полного колебания. Можно сказать, что за период тело проходит путь в четыре амплитуды.

  Единицы измерения: [с] (секунда).

- Частота колебаний ν — это величина, обратная периоду:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

  Частота показывает, сколько полных колебаний совершается за одну секунду.

  Единицы измерения: [Гц] (герц).

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях

- Гармонические колебания — это колебания, при которых координата зависит от времени по гармоническому закону:

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \alpha)}$$

где A — амплитуда колебаний тела — величина его наибольшего отклонения от положения равновесия,

Единицы измерения: [м] (метр).

ω — циклическая частота,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Единицы измерения: [рад/с] (радиан в секунду).

- Аргумент косинуса $(\omega t + \alpha)$ называется фазой колебаний. Величина α, равная значению фазы при $t = 0$, называется начальной фазой. Начальная фаза отвечает начальной координате тела: $x_0 = A\cos\alpha$.

  Смещение при гармонических колебаниях есть фаза колебаний $(\omega t + \alpha)$

Динамика гармонических колебаний

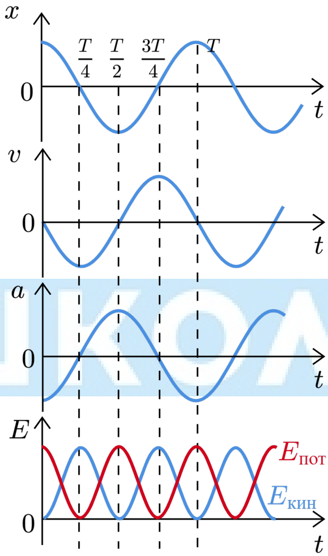
Найдем дифференциальное уравнение, которое описывает гармонические колебания. Для этого вычислим производные функции $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ по времени.

Первая производная по времени:

$$x'_t = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Вторая производная по времени:

$$x''_{tt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x$$



$$\boxed{x = A\cos\omega t}$$

$$\boxed{x_{max} = A}$$

$$\boxed{v = x'_t = -A\omega\sin\omega t}$$

$$\boxed{v_{max} = A\omega}$$

$$\boxed{a = v'_t = -A\omega^2\cos\omega t}$$

$$\boxed{a_{max} = A\omega^2}$$

$$\boxed{T_E = \frac{T_x}{2} = \frac{T_v}{2} = \frac{T_a}{2}}$$

▻Период колебаний энергии в 2 раза меньше периода колебаний x, v и a.

▻Колебания $E_{пот}$ и $E_{кин}$ меняются в противофазе, а $E_{полн}$ – постоянна.

Из сравнения полученных выражений следует основное уравнение динамики гармонических колебаний:

$$\boxed{x''_{tt} + \omega^2 x = 0}$$

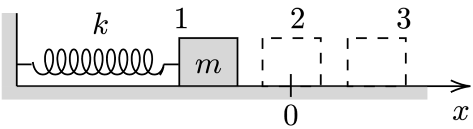
Решение этого уравнения всегда будет выражение вида:

$$\boxed{x = A\cos\omega t + \varphi_0}$$

Свободные колебания. Превращение энергии при гармонических колебаниях.

- Свободные колебания — колебания системы, предоставленные самой себе (при постоянных внешних условиях).

- Пружинный маятник — это закреплённый на пружине груз, способный совершать колебания в горизонтальном или вертикальном направлении.



Пол.	v	a	$E_{кин}$	$E_{пот}$
1	0	max	0	max
2	max	0	max	min
3	0	max	0	max

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Запомни :
макароны

Найдём период малых горизонтальных колебаний пружинного маятника. Колебания будут малыми, если величина деформации пружины много меньше её размеров. При малых деформациях мы можем пользоваться законом Гука. Это приведёт к тому, что колебания окажутся гармоническими.

Трением пренебрегаем. Груз имеет массу m, жёсткость пружины равна k. Координате $x = 0$ отвечает положение равновесия, в котором пружина не деформирована. Следовательно, величина деформации пружины равна модулю координаты груза. В горизонтальном направлении на груз действует только сила упругости $\vec{F}$ со стороны пружины. Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось X имеет вид

$$ma_x = F_x$$

Если $x > 0$ (груз смещён вправо, как на рисунке), то сила упругости направлена в противоположную сторону и $F_x < 0$. Наоборот, если $x < 0$, то $F_x > 0$. Знаки x и F_x всё время противоположны, поэтому закон Гука можно записать так:

$$F_x = -kx$$

$$ma_x = -kx$$

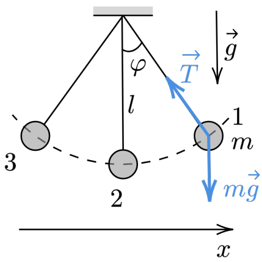
отсюда можем написать выражение для определения циклической частоты

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Отсюда и из соотношения $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ находим период горизонтальных колебаний пружинного маятника.

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

- Математический маятник — это небольшое тело, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити. Математический маятник может совершать колебания в вертикальной плоскости в поле силы тяжести.



$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$ Запомни : лыжи

Пол.	v	a	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{пот}}$
1	0	max	0	max
2	max	0	max	min
3	0	max	0	max

Найдём период малых колебаний математического маятника. Длина нити равна l. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Запишем для маятника второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

и спроектируем его на ось X:

$$ma_x = T_x$$

Если маятник занимает такое положение, как на рисунке (т.е. $x > 0$), то

$$T_x = -T\sin\varphi = -T\frac{x}{l}$$

Если же маятник находится по другую сторону от положения равновесия (т.е. $x < 0$), то

$$T_x = T\sin\varphi = -T\frac{x}{l}$$

Итак, при любом положении маятника имеем

$$ma_x = -T\frac{x}{l}$$

Когда маятник покоится в положении равновесия, выполнено равенство

$T = mg$. При малых колебаниях, когда отклонения маятника от положения равновесия малы (по сравнению с длиной нити), выполнено приближённое равенство $T \approx mg$. Воспользуемся им в предыдущей формуле:

$$ma_x = -mg\frac{x}{l}$$

или

$$a_x = -g\frac{x}{l}$$

Это уравнение гармонических колебаний, в котором

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Отсюда и из соотношения $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ находим период математического маятника

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

- Превращение энергии при гармонических колебаниях

При свободных механических колебаниях кинетическая и потенциальная энергии изменяются периодически. При максимальном отклонении тела от положения равновесия его скорость, а следовательно, и кинетическая энергия обращаются в нуль. В этом положении потенциальная энергия колеблющегося тела достигает максимального значения. Для груза на горизонтально расположенной пружине потенциальная энергия — это энергия упругих деформаций пружины. Для математического маятника — это энергия в поле тяготения Земли.

Когда тело при своем движении проходит через положение равновесия, его скорость максимальна. В этот момент оно обладает максимальной кинетической и минимальной потенциальной энергией. Увеличение кинетической энергии происходит за счет уменьшения потенциальной энергии. При дальнейшем движении начинает увеличиваться потенциальная энергия за счет убыли кинетической энергии и т. д.

Таким образом, **при гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.**