

Квадратные корни.

Факт 1.

- Возьмем некоторое неотрицательное число a (то есть $a \geq 0$). Тогда (арифметическим) квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число b , при возведении которого в квадрат мы получим число a :

$$\sqrt{a} = b \quad \text{то же самое, что} \quad a = b^2$$

Из определения следует, что $a \geq 0, b \geq 0$. Эти ограничения являются важным условием существования квадратного корня и их следует запомнить!

Вспомним, что любое число при возведении в квадрат дает неотрицательный результат. То есть $100^2 = 10000 \geq 0$ и $(-100)^2 = 10000 \geq 0$.

- Чему равен $\sqrt{25}$? Мы знаем, что $5^2 = 25$ и $(-5)^2 = 25$. Так как по определению мы должны найти неотрицательное число, то -5 не подходит, следовательно, $\sqrt{25} = 5$ (так как $25 = 5^2$).

Нахождение значения $\sqrt{a}$ называется извлечением квадратного корня из числа a , а число a называется подкоренным выражением.

- Исходя из определения, выражения $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-4}$ и т.п. не имеют смысла.

Факт 2.

Для быстрых вычислений полезно будет выучить таблицу квадратов натуральных чисел от 1 до 20:

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$

Факт 3.

Какие действия можно выполнять с квадратными корнями?

- Сумма или разность квадратных корней **НЕ РАВНА** квадратному корню из суммы или разности, то есть

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$$

Таким образом, если вам нужно вычислить, например, $\sqrt{25} + \sqrt{49}$, то первоначально вы должны найти значения $\sqrt{25}$ и $\sqrt{49}$, а затем их сложить. Следовательно,

$$\sqrt{25} + \sqrt{49} = 5 + 7 = 12$$

Если значения $\sqrt{a}$ или $\sqrt{b}$ при сложении $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ найти не удастся, то такое выражение дальше не преобразуется и остается таким, как есть. Например, в сумме $\sqrt{2} + \sqrt{49}$ мы можем найти

$\sqrt{49}$ – это 7, а вот $\sqrt{2}$ никак преобразовать нельзя, поэтому $\sqrt{2} + \sqrt{49} = \sqrt{2} + 7$. Дальше это выражение, к сожалению, упростить невозможно ☹ и это его конечный вид.

- Произведение/частное квадратных корней равно квадратному корню из произведения/частного, то есть

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{и} \quad \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

(при условии, что обе части равенств имеют смысл)

Пример: $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$;

$$\sqrt{768} : \sqrt{3} = \sqrt{768 : 3} = \sqrt{256} = 16$$
;

$$\sqrt{(-25) \cdot (-64)} = \sqrt{25 \cdot 64} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = 5 \cdot 8 = 40.$$

- Пользуясь этими свойствами, удобно находить квадратные корни из больших чисел путем разложения их на множители.

Рассмотрим пример. Найдём $\sqrt{44100}$. Так как $44100 : 100 = 441$, то $44100 = 100 \cdot 441$. По признаку делимости число 441 делится на 9 (так как сумма его цифр равна 9 и делится на 9), следовательно, $441 : 9 = 49$, то есть $441 = 9 \cdot 49$.

Таким образом, мы получили:

$$\sqrt{44100} = \sqrt{9 \cdot 49 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 7 \cdot 10 = 210$$

Рассмотрим ещё один пример:

$$\sqrt{\frac{32 \cdot 294}{27}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 49 \cdot 2}{9 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 4 \cdot 49}{9}} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 7}{3} = \frac{56}{3}$$

- Покажем, как вносить числа под знак квадратного корня на примере выражения $5\sqrt{2}$ (сокращённая запись от выражения $5 \cdot \sqrt{2}$). Так как $5 = \sqrt{25}$, то

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$$

Заметим также, что, например,

1) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$,

2) $5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

3) $\sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$.

Почему так? Объясним на примере 1). Как вы уже поняли, как-то преобразовать число $\sqrt{2}$ мы не можем. Представим, что $\sqrt{2}$ – это некоторое число a . Соответственно, выражение $\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ есть не что иное, как $a + 3a$ (одно число a плюс ещё три таких же числа a). А мы знаем, что это равно четырём таким числам a , то есть $4\sqrt{2}$.

Факт 4.

- Часто говорят “нельзя извлечь корень”, когда не удастся избавиться от знака $\sqrt{\quad}$ корня (радикала) при нахождении значения какого-то числа. Например, извлечь корень из числа 16 можно, потому что $16 = 4^2$, поэтому $\sqrt{16} = 4$. А вот извлечь корень из числа 3, то есть найти $\sqrt{3}$, нельзя, потому что нет

такого рационального числа, которое в квадрате даст 3.

Такие числа (или выражения с такими числами) являются иррациональными. Например, числа $\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2}$, $\sqrt{15}$ и т.п. являются иррациональными.

Также иррациональными являются числа π (число “пи”, приблизительно равное 3,14), e (это число называют числом Эйлера, приблизительно оно равно 2,7) и т.д.

• Обращаем ваше внимание на то, что любое число будет либо рациональным, либо иррациональным. А вместе все рациональные и все иррациональные числа образуют множество, называемое **множеством действительных (вещественных) чисел**. Обозначается это множество буквой $\mathbb{R}$.

Значит, все числа, которые на данный момент мы знаем, называются вещественными числами.

Факт 5.

Как сравнить два квадратных корня?

• Для квадратных корней верно: если $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, то $a < b$; если $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, то $a = b$.

Пример:

1) сравним $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$. Для начала преобразуем второе выражение в $\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$. Таким образом, так как $50 < 72$, то и $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Следовательно, $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.

2) Между какими целыми числами находится $\sqrt{50}$?

Так как $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, а $49 < 50 < 64$, то $7 < \sqrt{50} < 8$, то есть число $\sqrt{50}$ находится между числами 7 и 8.

3) Сравним $\sqrt{2} - 1$ и 0,5. Предположим, что $\sqrt{2} - 1 > 0,5$:

$$\sqrt{2} - 1 > 0,5 \quad | +1 \quad (\text{прибавим единицу к обеим частям})$$

$$\sqrt{2} > 0,5 + 1 \quad | ^2 \quad (\text{возведем обе части в квадрат})$$

$$2 > 1,5^2$$

$$2 > 2,25$$

Видим, что мы получили неверное неравенство. Следовательно, наше предположение было неверным и $\sqrt{2} - 1 < 0,5$.

Заметим, что прибавление некоторого числа к обеим частям неравенства не влияет на его знак. Умножение/деление обеих частей неравенства на положительное число также не влияет на его знак, а умножение/деление на отрицательное число меняет знак неравенства на противоположный!

Возводить обе части уравнения/неравенства в квадрат можно ТОЛЬКО ТОГДА, когда обе части неотрицательные. Например, в неравенстве из предыдущего примера возводить обе части в квадрат можно, в неравенстве $-3 < \sqrt{2}$ нельзя (убедитесь в этом сами)!

• Следует запомнить, что

$$\sqrt{2} \approx 1,4$$

$$\sqrt{3} \approx 1,7$$

Знание приблизительного значения данных чисел поможет вам при сравнении чисел!

• Для того, чтобы извлечь корень (если он извлекается) из какого-то большого числа, которого нет в таблице квадратов, нужно сначала определить, между какими “сотнями” оно находится, затем – между

какими “десятками”, а потом уже определить последнюю цифру этого числа. Покажем, как это работает, на примере.

Возьмем $\sqrt{28224}$. Мы знаем, что $100^2 = 10\,000$, $200^2 = 40\,000$ и т.д. Заметим, что 28224 находится между 10 000 и 40 000. Следовательно, $\sqrt{28224}$ находится между 100 и 200.

Теперь определим, между какими “десятками” находится наше число (то есть, например, между 120 и 130). Также из таблицы квадратов знаем, что $11^2 = 121$, $12^2 = 144$ и т.д., тогда $110^2 = 12100$, $120^2 = 14400$, $130^2 = 16900$, $140^2 = 19600$, $150^2 = 22500$, $160^2 = 25600$, $170^2 = 28900$. Таким образом, мы видим, что 28224 находится между 160^2 и 170^2 . Следовательно, число $\sqrt{28224}$ находится между 160 и 170.

Попробуем определить последнюю цифру. Давайте вспомним, какие однозначные числа при возведении в квадрат дают на конце 4? Это 2^2 и 8^2 . Следовательно, $\sqrt{28224}$ будет заканчиваться либо на 2, либо на 8. Проверим это. Найдем 162^2 и 168^2 :

$$162^2 = 162 \cdot 162 = 26224$$

$$168^2 = 168 \cdot 168 = 28224.$$

Следовательно, $\sqrt{28224} = 168$. Вуаля!

Степень.

Факт 1.

- Выражение a^n называется степенью, a – основанием степени, n – показателем степени.

Основные формулы:

$a^0 = 1$	$a^1 = a$
$a^{nm} = (a^n)^m$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$a^{\frac{k}{r}} = \sqrt[r]{a^k}$	
$a, b > 0, \quad k \in \mathbb{Z},$	$r \in \mathbb{N}, \quad m, n \in \mathbb{R}$

Факт 2.

- Наиболее часто встречающиеся степени:

$2^2 = 2$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$			
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$			
$2^7 = 128$				
$2^8 = 256$				
$2^9 = 512$				
$2^{10} = 1024$				