Решения задач ЕГЭ 2024. Часть 2

Содержание

Задача №13. Уравнение

Тип 1

№13.1 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $\sin 2x - \sin(x - \pi) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

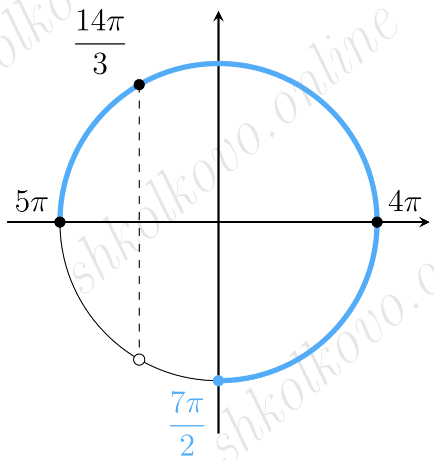
б) $4\pi;\ \dfrac{14\pi}{3};\ 5\pi$

Решение

а)

$$\sin 2x - \sin(x - \pi) = 0$$
$$2\sin x\cos x + \sin x = 0$$
$$\sin x\,(2\cos x + 1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ лежат точки $4\pi;\ \dfrac{14\pi}{3};\ 5\pi$.

№13.2 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos(\pi - x) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{8\pi}{3};\ -\dfrac{5\pi}{2}$

Решение

а)

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos(\pi - x) = 0$$

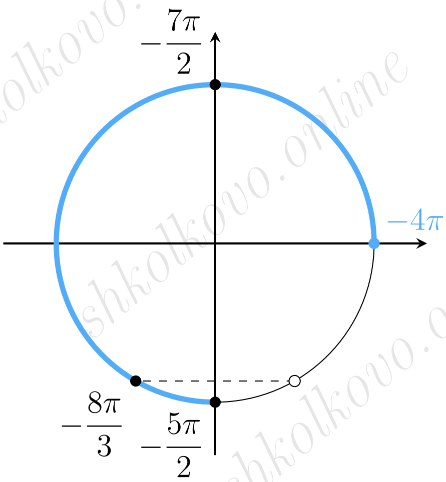
$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\cos x\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{8\pi}{3};\ -\dfrac{5\pi}{2}$.

№13.3 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\sin(x-\pi) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

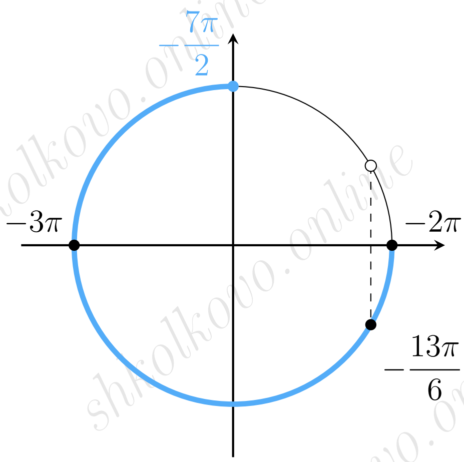
б) $-3\pi;\ -\frac{13\pi}{6};\ -2\pi$

Решение

а)

$$\sin 2x + \sqrt{3}\sin(x-\pi) = 0$$
$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = 0 \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ лежат точки $-3\pi;\ -\frac{13\pi}{6};\ -2\pi$.

№13.4 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x+\pi) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{15\pi}{4};\ 4\pi;\ \frac{17\pi}{4};\ 5\pi$

Решение

а)

$$\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x+\pi) = 0$$

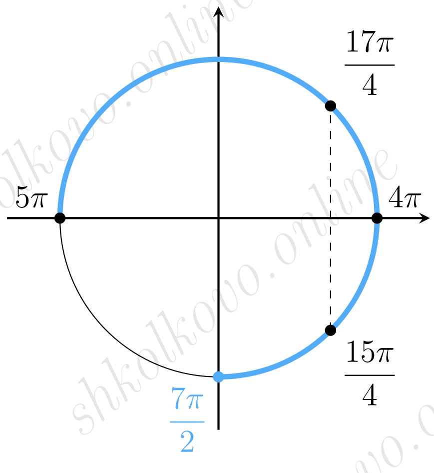
$$2\sin x\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$$

$$\sin x\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\sin x = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ лежат точки $\frac{15\pi}{4};\ 4\pi;\ \frac{17\pi}{4};\ 5\pi$.

№13.5 *(Сибирь)*

а) Решите уравнение $\sin 2x - \cos(x - \pi) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Ответ

а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k;\ -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{7\pi}{2};\ \dfrac{23\pi}{6};\ \dfrac{9\pi}{2}$

Решение

а)

$$\sin 2x - \cos(x - \pi) = 0$$

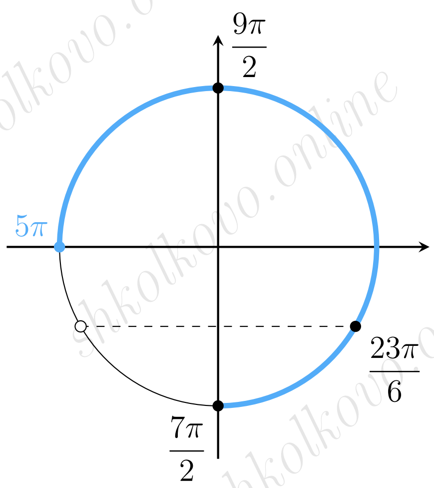
$$2\sin x\cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x\,(2\sin x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ лежат точки $\dfrac{7\pi}{2};\ \dfrac{23\pi}{6};\ \dfrac{9\pi}{2}$.

Тип 2

№13.6 *(Саратов)*

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\sin(x-\pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

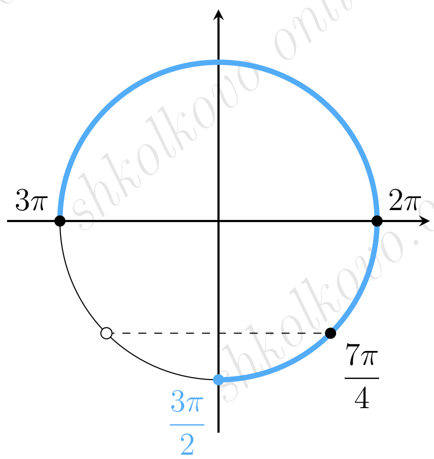
б) $\dfrac{7\pi}{4};\ 2\pi;\ 3\pi$

Решение

а)

$$\cos 2x + \sqrt{2}\sin(x-\pi) - 1 = 0$$
$$1 - 2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$$
$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0$$
$$\sin x\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ лежат точки $\dfrac{7\pi}{4};\ 2\pi;\ 3\pi$.

№13.7 *(Татарстан)*

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{3}\sin(x+\pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

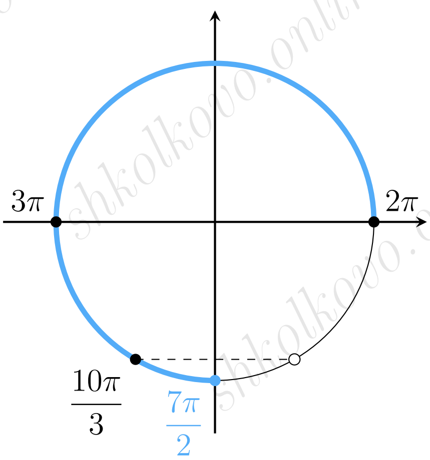
б) $2\pi;\ 3\pi;\ \dfrac{10\pi}{3}$

Решение

а) По формуле приведения $\sin(x+\pi) = -\sin x$. Тогда имеем

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$
$$1 - 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$
$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\sin x \cdot \left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ лежат точки $2\pi;\ 3\pi;\ \dfrac{10\pi}{3}$.

№13.8 *(Санкт-Петербург)*

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{3}\sin(x-\pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ

а) πk; $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$

б) 2π; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; 3π

Решение

а) По формуле приведения $\sin(x-\pi) = -\sin x$. Тогда имеем

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$

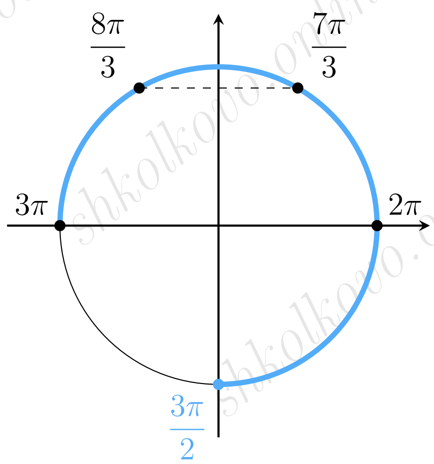
$$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$\sin x \cdot \left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ лежат точки 2π; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; 3π.

№13.9 *(Москва)*

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin(x - \pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

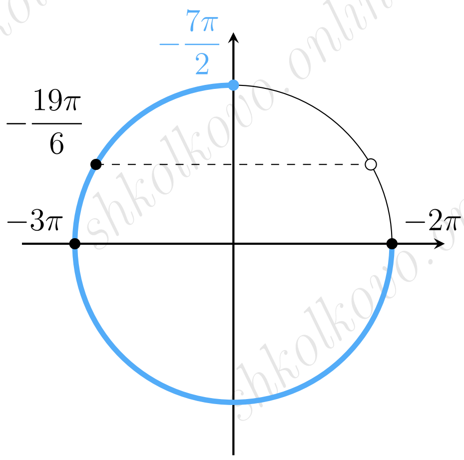
б) $-\dfrac{19\pi}{6};\ -3\pi;\ -2\pi$

Решение

а) По формуле приведения $\sin(x - \pi) = -\sin x$. Тогда имеем

$$\cos 2x + \sin x - 1 = 0$$
$$1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$
$$\sin x \cdot (2\sin x - 1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ лежат точки $-\dfrac{19\pi}{6};\ -3\pi;\ -2\pi$.

№13.10 *(Санкт-Петербург)*

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

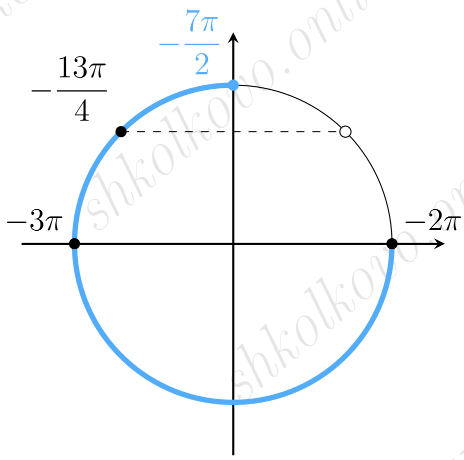
б) $-\frac{13\pi}{4};\ -3\pi;\ -2\pi$

Решение

а) По формуле приведения $\sin(x+\pi) = -\sin x$. Тогда имеем

$$\cos 2x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$$
$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$$
$$2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$$
$$\sin x \cdot \left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ лежат точки $-\frac{13\pi}{4};\ -3\pi;\ -2\pi$.

№13.11 *(Адыгея)*

а) Решите уравнение $\cos 2x+\sqrt{2}\cos(x+\pi)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

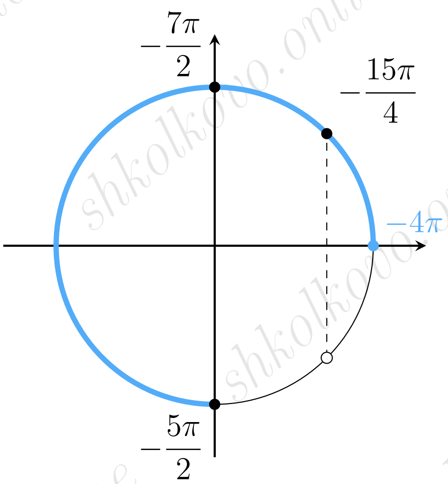
б) $-\dfrac{5\pi}{2};\ -\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{15\pi}{4}$

Решение

а) По формуле приведения $\cos(x+\pi)=-\cos x$. Тогда имеем

$$\cos 2x-\sqrt{2}\cos x+1=0$$
$$2\cos^2 x-1-\sqrt{2}\cos x+1=0$$
$$2\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x=0$$
$$\cos x\cdot\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=0$$
$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{5\pi}{2};\ -\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{15\pi}{4}$.

№13.12 *(Центр)*

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{3}\cos(x-\pi) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ

а) $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

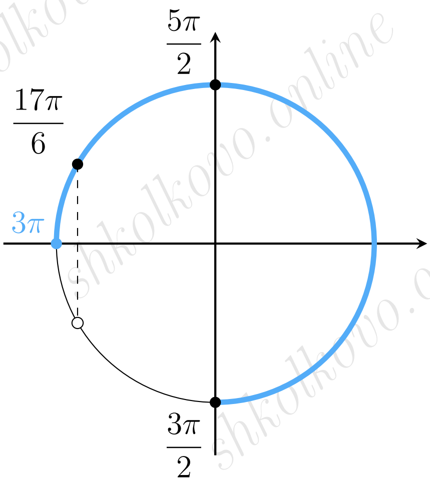
б) $\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{17\pi}{6}$

Решение

а) По формуле приведения $\cos(x-\pi) = -\cos x$. Тогда имеем

$$\cos 2x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$
$$2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$
$$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$$
$$\cos x \cdot \left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ лежат точки $\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{17\pi}{6}$.

№13.13 *(Центр)*

а) Решите уравнение $\cos 2x + \cos(x - \pi) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ

а) $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

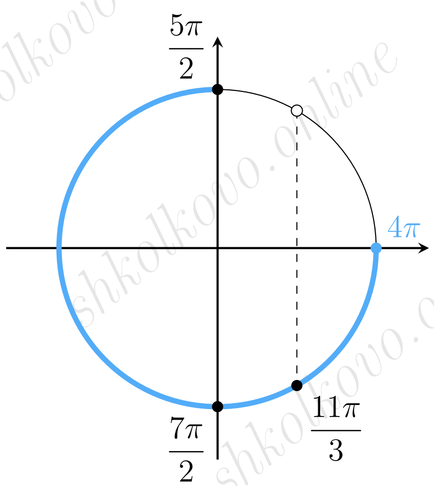
б) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{11\pi}{3}$

Решение

а) По формуле приведения $\cos(x - \pi) = -\cos x$. Тогда имеем

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$
$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$
$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$
$$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ лежат точки $\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{11\pi}{3}$.

Тип 3

№13.14 *(Дагестан)*

а) Решите уравнение $2\cos^2 x - \sin(x-\pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ

а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k;\ -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

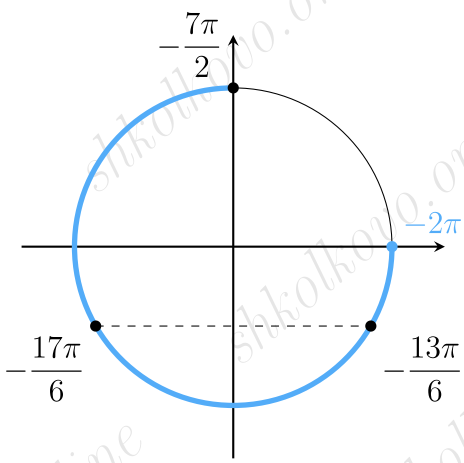
б) $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{17\pi}{6};\ -\dfrac{13\pi}{6}$

Решение

а) По формуле приведения $\sin(x-\pi) = -\sin x$. Тогда имеем

$$2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$$
$$2\cdot\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x - 1 = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$
$$(\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ лежат точки $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{17\pi}{6};\ -\dfrac{13\pi}{6}$.

№13.15 *(Дагестан)*

а) Решите уравнение $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(x-\pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

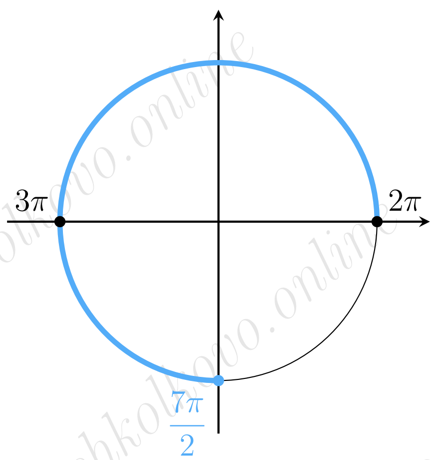
б) $2\pi;\ 3\pi$

Решение

а) По формуле приведения $\sin(x-\pi) = -\sin x$. Тогда имеем

$$\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$
$$1 - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$
$$\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\sin x\left(\sin x + \sqrt{3}\right) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = -\sqrt{3}\end{array}\right.$$
$$x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ лежат точки $2\pi;\ 3\pi$.

№13.16 *(Дагестан)*

а) Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin(x+\pi) - 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k;\ -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

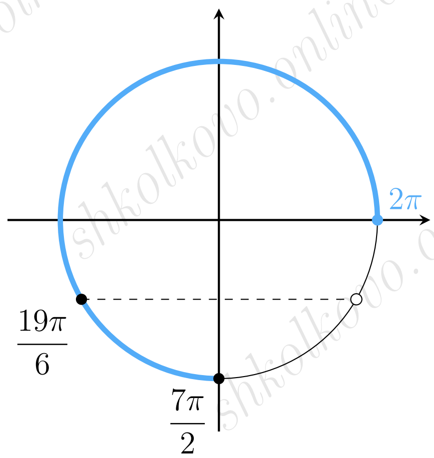
б) $\dfrac{19\pi}{6};\ \dfrac{7\pi}{2}$

Решение

а) По формуле приведения $\sin(x+\pi) = -\sin x$. Тогда имеем

$$2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0$$
$$2\cdot\left(1 - \sin^2 x\right) - 3\sin x - 3 = 0$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$
$$(\sin x + 1)(2\sin x + 1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{19\pi}{6};\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Задача №14. Стереометрия

Тип 1

№14.1 *(Дальний восток)*

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ стороны основания ABC равны 12, а боковые рёбра равны 25. На рёбрах AB, AC, и SA отмечены точки F, E и K соответственно. Известно, что $AE = AF = 10$, $AK = 15$.

а) Докажите, что объём пирамиды $KAEF$ составляет $\dfrac{5}{12}$ от объёма пирамиды $SABC$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью (KEF).

Ответ

б) $10\sqrt{57}$

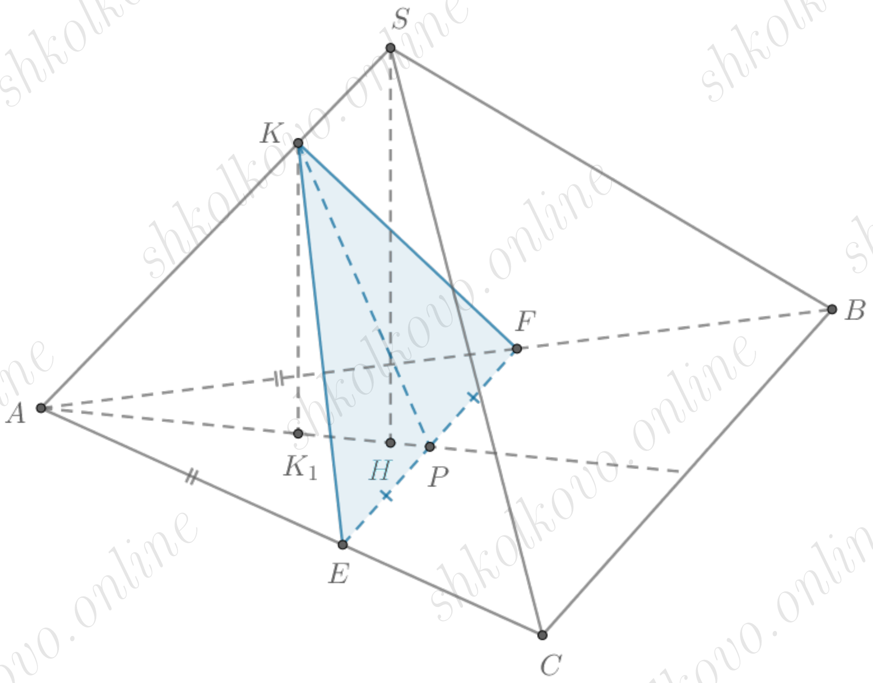
Решение

а) Треугольники ACB и AEF подобны, так как $\angle A$ — общий угол этих треугольников и $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{AF}{AB}$.

Коэффициент подобия этих треугольников равен $k = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому получаем

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{25}{36}.$$

Пусть SH — высота пирамиды. Опустим из точки K перпендикуляр KK_1 на плоскость основания, при этом получим, что точка K_1 лежит на прямой AH.



Треугольники AKK_1 и ASH подобны, так как $\angle A$ — общий угол этих треугольников и

$\angle AK_1K = \angle AHS = 90^\circ$. Тогда
$$\frac{KK_1}{SH} = \frac{AK}{AS} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Тогда
$$\frac{V_{KAEF}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{AEF} \cdot KK_1}{\frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH} = \frac{25}{36} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{12}.$$

б) Треугольник ASC равнобедренный, поэтому
$$\cos\angle SAC = \frac{\frac{1}{2}AC}{AS} = \frac{6}{25}.$$

По теореме косинусов для $\triangle AKE$:
$$KE^2 = AK^2 + AE^2 - 2 \cdot AK \cdot KE \cdot \cos\angle KAE =$$
$$= 225 + 100 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \frac{6}{25} = 253$$
$$KE = \sqrt{253}$$

Треугольники KAE и KAF равны, так как AK — общая сторона этих треугольников, $AF = AE$ и $\angle KAE = \angle KAF$, так как пирамида правильная. Тогда $KF = KE = \sqrt{253}$.

Треугольники AEF и ACB подобны, поэтому $\triangle AEF$ равносторонний и $EF = 10$.

Пусть P — середина EF. Тогда $EP = PF = 5$.

Найдём KP по теореме Пифагора из $\triangle KPE$:
$$KP^2 = KE^2 - EP^2 = 253 - 25 = 228$$
$$KP = 2\sqrt{57}$$

Тогда
$$S_{KFE} = \frac{1}{2}KP \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{57} \cdot 10 = 10\sqrt{57}.$$

Тип 2

№14.2 *(Санкт-Петербург)*

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC, точка K делит ребро BC в отношении $BK : KC = 2 : 1$, а $AB = 6$ и $SO = 3\sqrt{7}$.

а) Докажите, что плоскость (OMK) параллельна прямой SA.

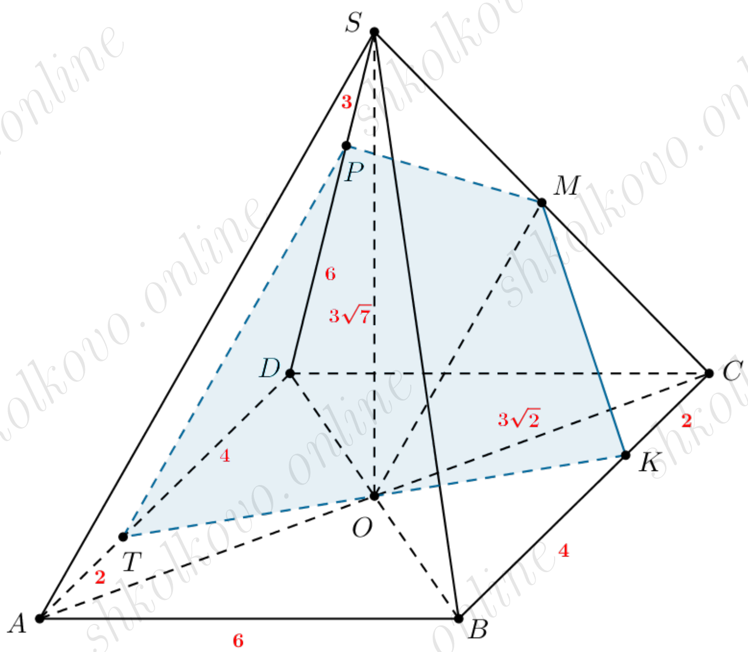
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость (OMK) пересечёт грань SAD.

Ответ

б) 6

Решение

а) По условию $SABCD$ — правильная пирамида, поэтому $ABCD$ — квадрат. Так как O — центр основания $ABCD$, то O — середина диагонали AC. Тогда MO — средняя линия треугольника SAC и $SA \parallel MO$. Следовательно, $SA \parallel (OMK)$, так как прямая SA параллельна прямой из этой плоскости.



б) Так как $ABCD$ — квадрат, то его стороны равны. Тогда $BC = AB = 6$. По условию $BK : KC = 2 : 1$, поэтому получаем $BK = 4$, $CK = 2$.

Пусть прямая KO пересекает ребро AD в точке T. Рассмотрим треугольники CKO и ATO. В них $CO = AO$, так как O — середина AC, $\angle KCO = \angle TAO$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми BC и AD и секущей CA, $\angle KOC = \angle TOA$ как вертикальные. Значит, $\triangle CKO = \triangle ATO$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AT = CK = 2$. Тогда $DT = AD - AT = 4$. Значит, $DT : TA = 2 : 1$.

Чтобы построить сечение пирамиды плоскостью (OMK), через точку T проведём прямую, параллельную SA, эта прямая будет лежать в плоскости (ASD). Пусть она пересекает ребро SD

в точке P. Тогда $TPMK$ — это сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью (OMK), и нам нужно найти отрезок PT. Диагонали основания AC и BD равны $6\sqrt{2}$, поэтому $CO = 3\sqrt{2}$. Мы знаем, что $SO = 3\sqrt{7}$. Найдём боковое ребро SC пирамиды по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC :

$$SC = \sqrt{\left(3\sqrt{7}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{63+18} = \sqrt{81} = 9.$$

Тогда так как $SABCD$ — правильная пирамида, то $SA = SB = SC = SD = 9$.

Так как $DT : TA = 2 : 1$ и $TP \parallel AS$, то получаем, что

$$DP : PS = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad PD = 6,\ SP = 3.$$

Заметим, что $\triangle ADS \sim \triangle TDP$, так как $SA \parallel PT$. В треугольнике SAD известно, что $SA = SD = 9$, тогда $PT = PD = 6$.

№14.3 *(Татарстан)*

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC, точка K делит ребро BC в отношении $BK : KC = 3 : 1$, а $AB = 2$ и $SO = \sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость (OMK) параллельна прямой SA.

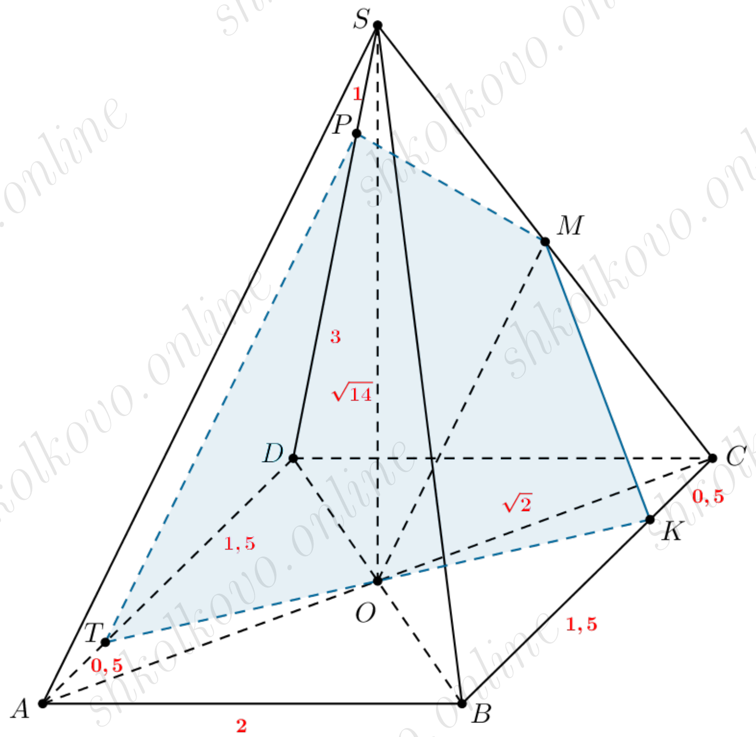
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость (OMK) пересечёт грань SAD.

Ответ

б) 3

Решение

а) По условию $SABCD$ — правильная пирамида, поэтому $ABCD$ — квадрат. Так как O — центр основания $ABCD$, то O — середина диагонали AC. Тогда MO — средняя линия треугольника SAC и $SA \parallel MO$. Следовательно, $SA \parallel (OMK)$, так как прямая SA параллельна прямой из этой плоскости.



б) Так как $ABCD$ — квадрат, то его стороны равны. Тогда $BC = AB = 2$. По условию $BK : KC = 3 : 1$, поэтому получаем $BK = 1{,}5$, $CK = 0{,}5$.

Пусть прямая KO пересекает ребро AD в точке T. Рассмотрим треугольники CKO и ATO. В них $CO = AO$, так как O — середина AC, $\angle KCO = \angle TAO$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми BC и AD и секущей CA, $\angle KOC = \angle TOA$ как вертикальные. Значит, $\triangle CKO = \triangle ATO$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AT = CK = 0{,}5$. Тогда $DT = AD - AT = 1{,}5$. Значит, $DT : TA = 3 : 1$.

Чтобы построить сечение пирамиды плоскостью (OMK), через точку T проведём прямую, параллельную SA, эта прямая будет лежать в плоскости (ASD). Пусть она пересекает ребро SD

в точке P. Тогда $TPMK$ — это сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью (OMK), и нам нужно найти отрезок PT.

Диагонали основания AC и BD равны $2\sqrt{2}$, поэтому $CO = \sqrt{2}$. Мы знаем, что $SO = \sqrt{14}$. Найдём боковое ребро SC пирамиды по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC :

$$SC = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{14}\right)^2} = \sqrt{2+14} = \sqrt{16} = 4.$$

Тогда так как $SABCD$ — правильная пирамида, то $SA = SB = SC = SD = 4$.

Так как $DT : TA = 3 : 1$ и $TP \parallel AS$, то получаем, что

$$DP : PS = 3 : 1 \quad \Rightarrow \quad PD = 3,\ SP = 1.$$

Заметим, что $\triangle ADS \sim \triangle TDP$, так как $SA \parallel PT$. В треугольнике SAD известно, что $SA = SD = 4$, тогда $PT = PD = 3$.

№14.4 *(Москва)*

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC, точка K делит ребро BC в отношении $BK : KC = 3 : 2$, а $AB = 4$ и $SO = 2\sqrt{23}$.

а) Докажите, что плоскость (OMK) параллельна прямой SA.

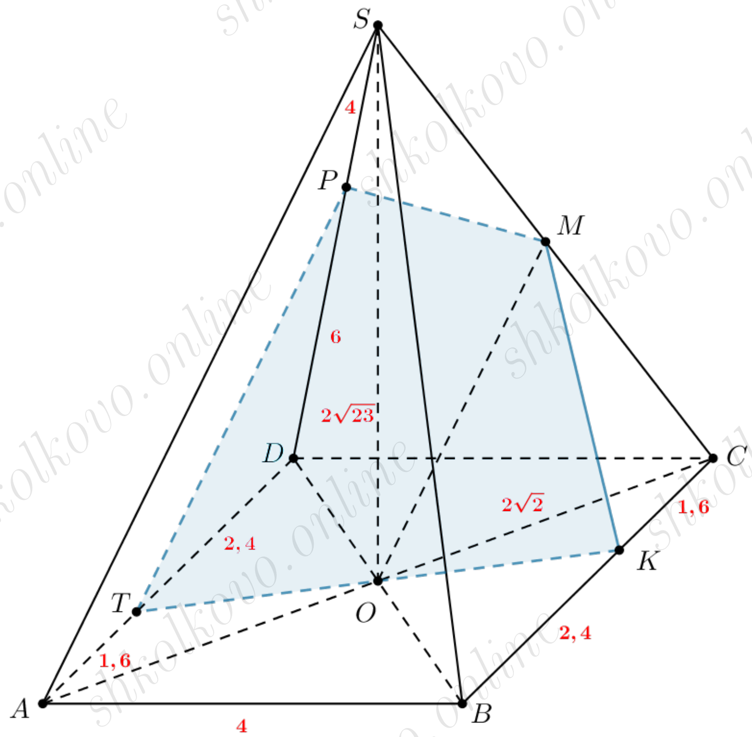
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость (OMK) пересечёт грань SAD.

Ответ

б) 6

Решение

а) По условию $SABCD$ — правильная пирамида, поэтому $ABCD$ — квадрат. Так как O — центр основания $ABCD$, то O — середина диагонали AC. Тогда MO — средняя линия треугольника SAC и $SA \parallel MO$. Следовательно, $SA \parallel (OMK)$, так как прямая SA параллельна прямой из этой плоскости.



б) Так как $ABCD$ — квадрат, то его стороны равны. Тогда $BC = AB = 4$. По условию $BK : KC = 3 : 2$, поэтому получаем $BK = 2{,}4$, $CK = 1{,}6$.

Пусть прямая KO пересекает ребро AD в точке T. Рассмотрим треугольники CKO и ATO. В них $CO = AO$, так как O — середина AC, $\angle KCO = \angle TAO$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми BC и AD и секущей CA, $\angle KOC = \angle TOA$ как вертикальные. Значит, $\triangle CKO = \triangle ATO$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AT = CK = 1{,}6$. Тогда $DT = AD - AT = 2{,}4$. Значит, $DT : TA = 3 : 2$.

Чтобы построить сечение пирамиды плоскостью (OMK), через точку T проведём прямую, параллельную SA, эта прямая будет лежать в плоскости (ASD). Пусть она пересекает ребро SD

в точке P. Тогда $TPMK$ — это сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью (OMK), и нам нужно найти отрезок PT.

Диагонали основания AC и BD равны $4\sqrt{2}$, поэтому $CO = 2\sqrt{2}$. Мы знаем, что $SO = 2\sqrt{23}$. Найдём боковое ребро SC пирамиды по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC :

$$SC = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{23}\right)^2} = \sqrt{8+92} = \sqrt{100} = 10.$$

Тогда так как $SABCD$ — правильная пирамида, то $SA = SB = SC = SD = 10$.

Так как $DT : TA = 3:2$ и $TP \parallel AS$, то получаем, что

$$DP : PS = 3:2 \quad \Rightarrow \quad PD = 6,\, SP = 4.$$

Заметим, что $\triangle ADS \sim \triangle TDP$, так как $SA \parallel PT$. В треугольнике SAD известно, что $SA = SD = 10$, тогда $PT = PD = 6$.

Тип 3

№14.5 *(Астрахань)*

Дана правильная пирамида $SABC$, точки K и M — середины рёбер AB и SC соответственно. Точки N и L на ребрах BC и SA соответственно расположены таким образом, что $AL = 4LS$ и прямые NL и MK пересекаются.

а) Докажите, что прямые LK, MN и BS пересекаются в одной точке.

б) Найдите отношение $CN : NB$.

Ответ

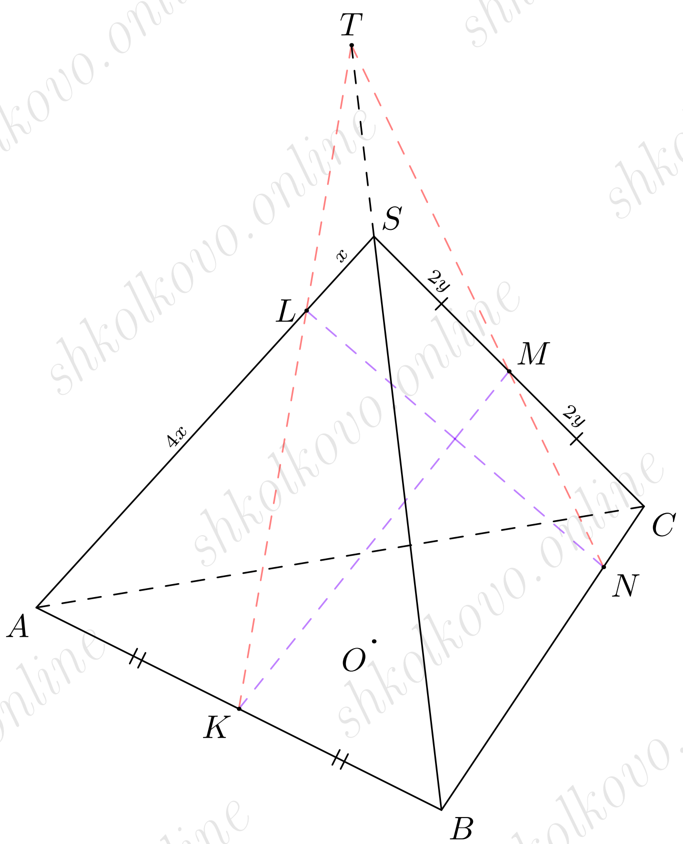
б) $1 : 4$

Решение

а) Так как прямые NL и MK пересекаются, то точки N, L, M, K лежат в одной плоскости. Тогда плоскости (NML) и (SBC) пересекаются по прямой MN, плоскости (NML) и (SAB) пересекаются по прямой KL, плоскости (SAB) и (SBC) пересекаются по прямой SB. Если три плоскости попарно пересекаются по трём прямым, то либо эти прямые параллельны друг другу, либо это одна и та же прямая, либо они пересекаются в одной точке.

Параллельными эти прямые быть не могут, иначе получаем $KL \parallel SB \parallel MN$ и так как K — это середина AB, то KL будет средней линией треугольника ASB. Но по условию точка L не является серединой SA. Противоречие.

Совпадать эти прямые тоже не могут, так как прямые KL и MN лежат в плоскостях разных граней. Значит, прямые LK, MN и BS пересекаются в одной точке.



б) По теореме Менелая для треугольника ASB и прямой KL :

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AL}{LS} \cdot \frac{ST}{TB} = 1$$
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{ST}{TB} = 1$$
$$\frac{ST}{TB} = \frac{1}{4}$$

По теореме Менелая для треугольника SBC и прямой MN :

$$\frac{ST}{TB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CM}{MS} = 1$$
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{1}{1} = 1$$
$$\frac{CN}{NB} = \frac{1}{4}$$

№14.6 *(Астрахань)*

Дана правильная пирамида $SABC$, точки K и M — середины рёбер AB и SC соответственно. Точки N и L на ребрах BC и SA соответственно расположены таким образом, что $2AL = 3LS$ и прямые NL и MK пересекаются.

а) Докажите, что прямые LK, MN и BS пересекаются в одной точке.

б) Найдите отношение $BN : NC$.

Ответ

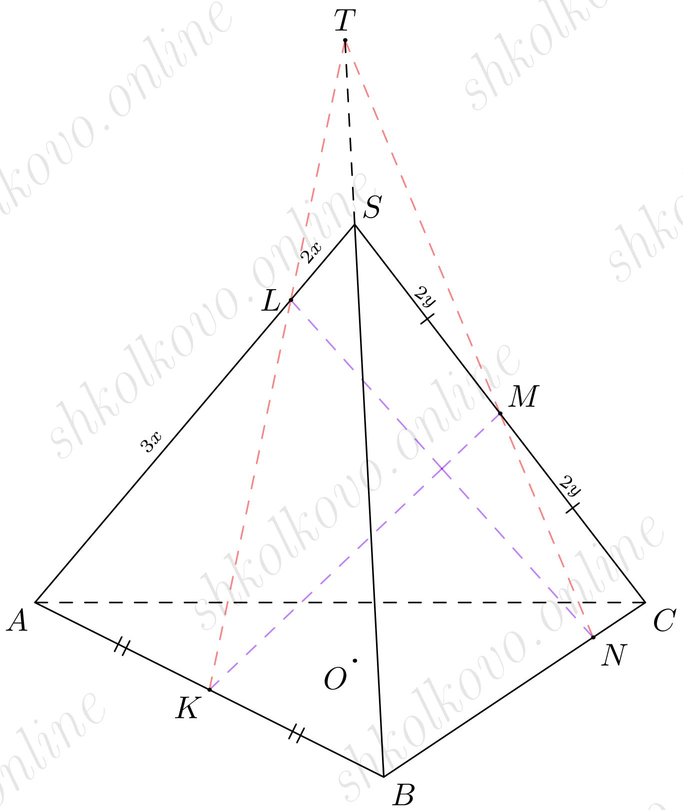
б) 3 : 2

Решение

а) Так как прямые NL и MK пересекаются, то точки N, L, M, K лежат в одной плоскости. Тогда плоскости (NML) и (SBC) пересекаются по прямой MN, плоскости (NML) и (SAB) пересекаются по прямой KL, плоскости (SAB) и (SBC) пересекаются по прямой SB. Если три плоскости попарно пересекаются по трём прямым, то либо эти прямые параллельны друг другу, либо это одна и та же прямая, либо они пересекаются в одной точке.

Параллельными эти прямые быть не могут, иначе получаем $KL \parallel SB \parallel MN$ и так как K — это середина AB, то KL будет средней линией треугольника ASB. Но по условию точка L не является серединой SA. Противоречие.

Совпадать эти прямые тоже не могут, так как прямые KL и MN лежат в плоскостях разных граней. Значит, прямые LK, MN и BS пересекаются в одной точке.



б) По теореме Менелая для треугольника ASB и прямой KL :

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AL}{LS} \cdot \frac{ST}{TB} = 1$$
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{ST}{TB} = 1$$
$$\frac{ST}{TB} = \frac{2}{3}$$

По теореме Менелая для треугольника SBC и прямой MN :

$$\frac{ST}{TB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CM}{MS} = 1$$
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{1}{1} = 1$$
$$\frac{BN}{NC} = \frac{3}{2}$$

№14.7 *(Астрахань)*

Дана правильная пирамида $SABC$, точки K и M — середины рёбер AB и SC соответственно. Точки N и L на ребрах BC и SA соответственно расположены таким образом, что $AL = 3LS$ и прямые NL и MK пересекаются.

а) Докажите, что прямые LK, MN и BS пересекаются в одной точке.

б) Найдите отношение $BN : NC$.

Ответ

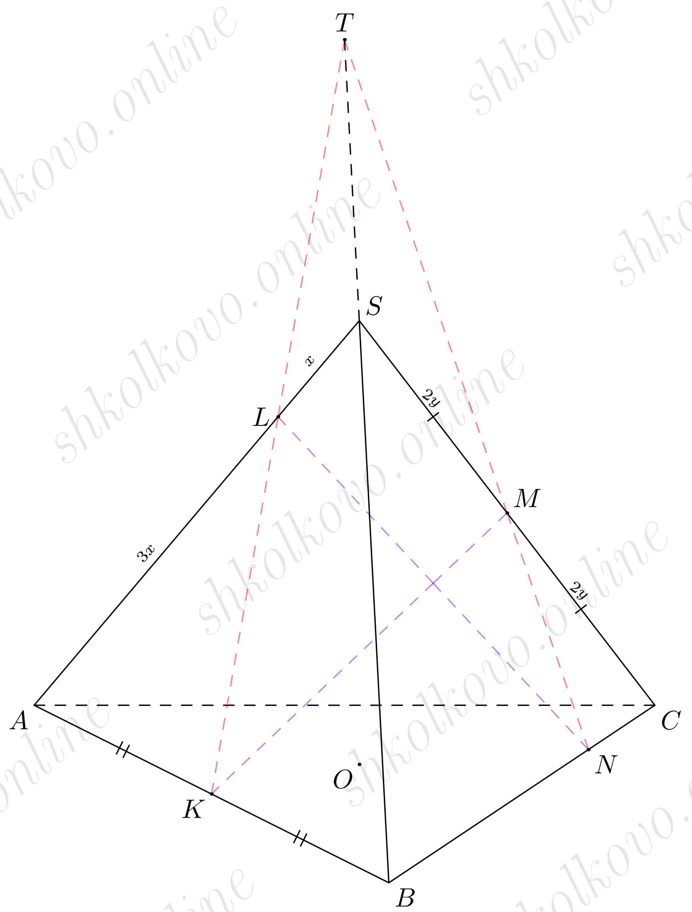
б) $3 : 1$

Решение

а) Так как прямые NL и MK пересекаются, то точки N, L, M, K лежат в одной плоскости. Тогда плоскости (NML) и (SBC) пересекаются по прямой MN, плоскости (NML) и (SAB) пересекаются по прямой KL, плоскости (SAB) и (SBC) пересекаются по прямой SB. Если три плоскости попарно пересекаются по трём прямым, то либо эти прямые параллельны друг другу, либо это одна и та же прямая, либо они пересекаются в одной точке.

Параллельными эти прямые быть не могут, иначе получаем $KL \parallel SB \parallel MN$ и так как K — это середина AB, то KL будет средней линией треугольника ASB. Но по условию точка L не является серединой SA. Противоречие.

Совпадать эти прямые тоже не могут, так как прямые KL и MN лежат в плоскостях разных граней. Значит, прямые LK, MN и BS пересекаются в одной точке.



б) По теореме Менелая для треугольника ASB и прямой KL :

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AL}{LS} \cdot \frac{ST}{TB} = 1$$
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{ST}{TB} = 1$$
$$\frac{ST}{TB} = \frac{1}{3}$$

По теореме Менелая для треугольника SBC и прямой MN :

$$\frac{ST}{TB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CM}{MS} = 1$$
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{1}{1} = 1$$
$$\frac{BN}{NC} = \frac{3}{1}$$

Тип 4

№14.8 *(Дагестан)*

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины ребер AB и CD соответственно.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна ребрам AB и CD.

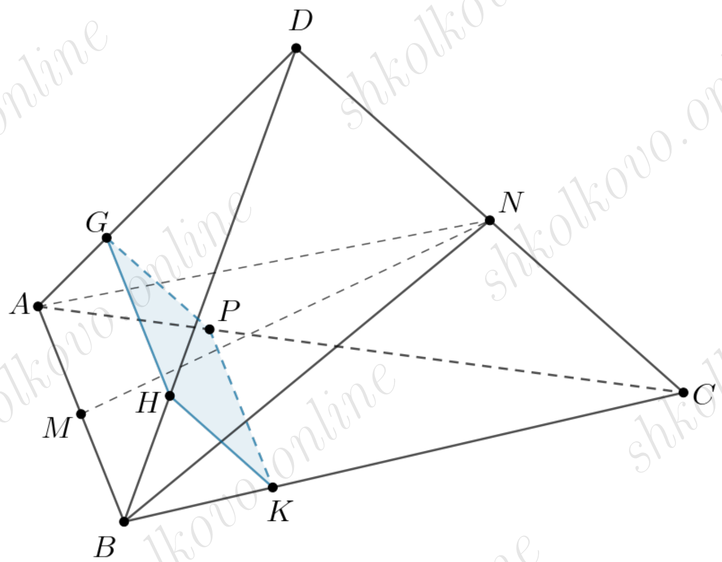
б) Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K. Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если известно, что $BK = 1$, $KC = 5$.

Ответ

б) 5

Решение

а) Так как тетраэдр правильный, то все его ребра равны и все грани являются равными правильными треугольниками. Так как AN и BN — медианы в равных правильных треугольниках ADC и DBC, то $AN = BN$. Тогда $\triangle ANB$ равнобедренный, следовательно, медиана NM, проведенная к основанию, также является и высотой. Таким образом, $NM \perp AB$. Аналогично $\triangle DMC$ равнобедренный и MN — медиана и высота этого треугольника, то есть $MN \perp CD$.



б) Если $MN \perp \alpha$, то α проходит через прямые, параллельные AB и CD, то есть $AB \parallel \alpha$, $CD \parallel \alpha$. Тогда α пересекает плоскость (ABC) по прямой $PK \parallel AB$, а плоскости (ACD) и (BCD) по прямым PG и KH соответственно, параллельным CD. Тогда $PKHG$ — сечение тетраэдра плоскостью α.

Далее имеем $CD \perp AN$ и $CD \perp BN$, так как AN и BN — медианы в равносторонних треугольниках. Тогда $CD \perp (ANB)$, следовательно, $CD \perp AB$. Значит, $PKHG$ — прямоугольник.

Треугольники BKH и BCD подобны, так как $KH \parallel CD$, откуда

$$\frac{BK}{BC} = \frac{KH}{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} = \frac{KH}{6} \quad \Leftrightarrow \quad KH = 1$$

Треугольники CPK и CAB подобны, так как $PK \parallel AB$, откуда

$$\frac{PK}{AB} = \frac{CK}{CB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{PK}{6} = \frac{5}{6} \quad \Leftrightarrow \quad PK = 5$$

Следовательно, площадь сечения $PKHG$ равна

$$S_{PKHG} = KH \cdot PK = 1 \cdot 5 = 5$$

№14.9 *(Дагестан)*

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины ребер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна ребрам AB и CD.

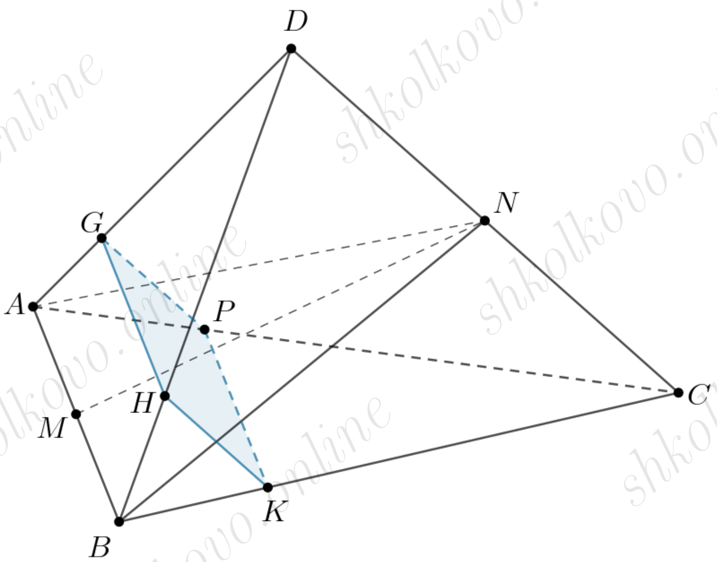
б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если известно, что $BK = 1$, $KC = 3$.

Ответ

б) 3

Решение

а) Так как тетраэдр правильный, то все его ребра равны и все грани являются равными правильными треугольниками. Так как AN и BN — медианы в равных правильных треугольниках ADC и DBC, то $AN = BN$. Тогда $\triangle ANB$ равнобедренный, следовательно, медиана NM, проведенная к основанию, также является и высотой. Таким образом, $NM \perp AB$. Аналогично $\triangle DMC$ равнобедренный и MN — медиана и высота этого треугольника, то есть $MN \perp CD$.



б) Если $MN \perp \alpha$, то α проходит через прямые, параллельные AB и CD, то есть $AB \parallel \alpha$, $CD \parallel \alpha$. Тогда α пересекает плоскость (ABC) по прямой $PK \parallel AB$, а плоскости (ACD) и (BCD) по прямым PG и KH соответственно, параллельным CD. Тогда $PKHG$ — сечение тетраэдра плоскостью α.

Далее имеем $CD \perp AN$ и $CD \perp BN$, так как AN и BN — медианы в равносторонних треугольниках. Тогда $CD \perp (ANB)$, следовательно, $CD \perp AB$. Значит, $PKHG$ — прямоугольник.

Треугольники BKH и BCD подобны, так как $KH \parallel CD$, откуда

$$\frac{BK}{BC} = \frac{KH}{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{KH}{4} \quad \Leftrightarrow \quad KH = 1$$

Треугольники CPK и CAB подобны, так как $PK \parallel AB$, откуда

$$\frac{PK}{AB} = \frac{CK}{CB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{PK}{4} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad PK = 3$$

Следовательно, площадь сечения $PKHG$ равна

$$S_{PKHG} = KH \cdot PK = 1 \cdot 3 = 3$$

Тип 5

№14.10 *(Сибирь)*

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания $ABCD$. Точка N делит ребро SD в отношении $SN : ND = 1 : 2$. Плоскость α, проходящая через точки O и N и параллельная ребру SA, пересекает ребро SC в точке M. Известно, что $SA = AB = 6$.

а) Докажите, что точка M — середина SC.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость α пересечёт грань BSC.

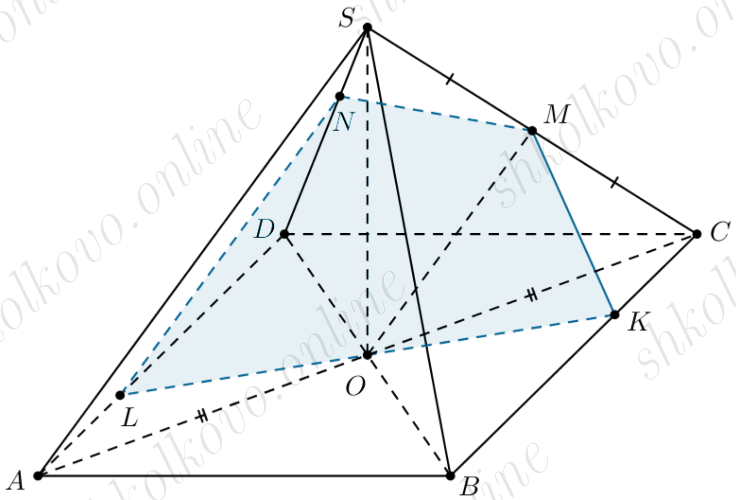
Ответ

б) $\sqrt{7}$

Решение

а) В правильной четырехугольной пирамиде основание $ABCD$ является квадратом, тогда O — точка пересечения его диагоналей AC и BD, значит, O — середина AC и BD.

Плоскость α пересекает плоскость (ASC) и параллельна прямой SA, лежащей в этой плоскости. Значит, плоскость α пересекает (ASC) по прямой, параллельной SA. Таким образом, $SA \parallel MO$. Следовательно, MO — средняя линия треугольника CAS, так как $MO \parallel SA$ и O — середина AC. Значит, M — середина SC.



б) Плоскость α пересекает плоскость грани ASD и параллельна прямой SA, лежащей в этой плоскости. Значит, плоскость α пересекает ASD по прямой, параллельной SA.

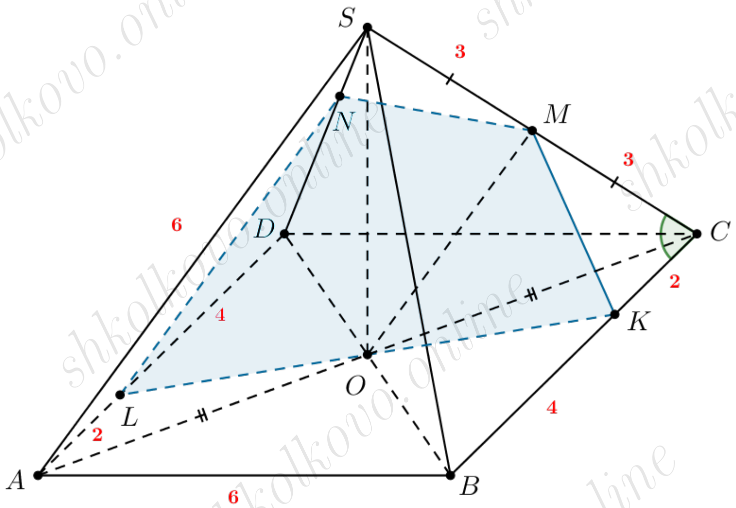
Пусть L — точка пересечения плоскости α и ребра AD. Тогда $NL \parallel SA$. Следовательно, по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{DL}{LA} = \frac{DN}{NS} = \frac{2}{1}.$$

По условию $SABCD$ — правильная пирамида, $AB = SA = 6$. Значит, все ребра пирамиды равны 6. Тогда

$$DL = 4,\ AL = 2.$$

Плоскость α проходит через точки L и O, следовательно, пересекает плоскость основания $ABCD$ по прямой LO. Пусть LO пересекает BC в точке K.



Рассмотрим $\triangle AOL$ и $\triangle COK$. В них $AO = CO$, так как O — середина AC, $\angle OAL = \angle OCK$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AD и BC и секущей AC, $\angle AOL = \angle COK$ как вертикальные. Значит, $\triangle AOL = \triangle COK$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $CK = AL = 2$. Тогда $BK = BC - CK = 4$.

Так как по условию точка M — середина отрезка SC и $SC = 6$, то $CM = 3$.

Нам нужно найти длину отрезка MK, так как по нему плоскость α пересекает грань BSC.

Все ребра пирамиды равны, поэтому $\triangle BSC$ — равносторонний. Тогда $\angle SCB = 60^\circ$. По теореме косинусов для $\triangle MCK$:

$$MK^2 = CM^2 + CK^2 - 2 \cdot CM \cdot CK \cdot \cos\angle MCK$$

$$MK^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$MK^2 = 9 + 4 - 6$$

$$MK^2 = 7$$

$$MK = \sqrt{7}$$

№14.11 *(Сибирь)*

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания $ABCD$. Точка N делит ребро SD в отношении $SN : ND = 2 : 3$. Плоскость α, проходящая через точки O и N и параллельная ребру SA, пересекает ребро SC в точке M. Известно, что $SA = AB = 10$.

а) Докажите, что точка M — середина SC.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость α пересечёт грань BSC.

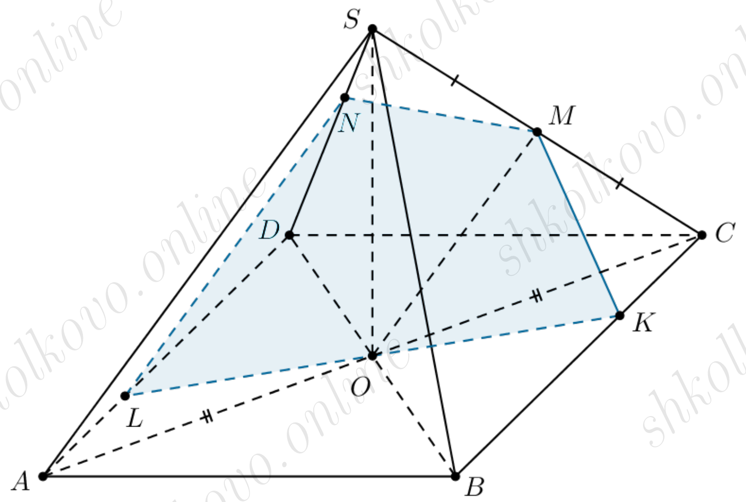
Ответ

б) $\sqrt{21}$

Решение

а) В правильной четырехугольной пирамиде основание $ABCD$ является квадратом, тогда O — точка пересечения его диагоналей AC и BD, значит, O — середина AC и BD.

Плоскость α пересекает плоскость (ASC) и параллельна прямой SA, лежащей в этой плоскости. Значит, плоскость α пересекает (ASC) по прямой, параллельной SA. Таким образом, $SA \parallel MO$. Следовательно, MO — средняя линия треугольника CAS, так как $MO \parallel SA$ и O — середина AC. Значит, M — середина SC.



б) Плоскость α пересекает плоскость грани ASD и параллельна прямой SA, лежащей в этой плоскости. Значит, плоскость α пересекает ASD по прямой, параллельной SA.

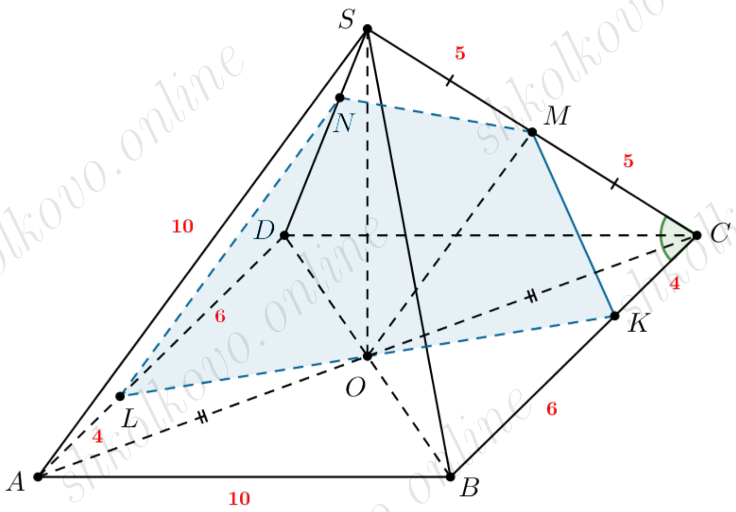
Пусть L — точка пересечения плоскости α и ребра AD. Тогда $NL \parallel SA$. Следовательно, по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{DL}{LA} = \frac{DN}{NS} = \frac{3}{2}.$$

По условию $SABCD$ — правильная пирамида, $AB = SA = 10$. Значит, все ребра пирамиды равны 10. Тогда

$$DL = 6,\ AL = 4.$$

Плоскость α проходит через точки L и O, следовательно, пересекает плоскость основания $ABCD$ по прямой LO. Пусть LO пересекает BC в точке K.



Рассмотрим $\triangle AOL$ и $\triangle COK$. В них $AO = CO$, так как O — середина AC, $\angle OAL = \angle OCK$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AD и BC и секущей AC, $\angle AOL = \angle COK$ как вертикальные. Значит, $\triangle AOL = \triangle COK$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $CK = AL = 4$. Тогда $BK = BC - CK = 6$.

Так как по условию точка M — середина отрезка SC и $SC = 10$, то $CM = 5$.

Нам нужно найти длину отрезка MK, так как по нему плоскость α пересекает грань BSC.

Все ребра пирамиды равны, поэтому $\triangle BSC$ — равносторонний. Тогда $\angle SCB = 60°$. По теореме косинусов для $\triangle MCK$:

$$MK^2 = CM^2 + CK^2 - 2 \cdot CM \cdot CK \cdot \cos \angle MCK$$

$$MK^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$MK^2 = 25 + 16 - 20$$

$$MK^2 = 21$$

$$MK = \sqrt{21}$$

№14.12 *(Сибирь)*

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания $ABCD$. Точка N делит ребро SD в отношении $SN : ND = 1 : 3$. Плоскость α, проходящая через точки O и N и параллельная ребру SA, пересекает ребро SC в точке M. Известно, что $SA = AB = 4$.

а) Докажите, что точка M — середина SC.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость α пересечёт грань BSC.

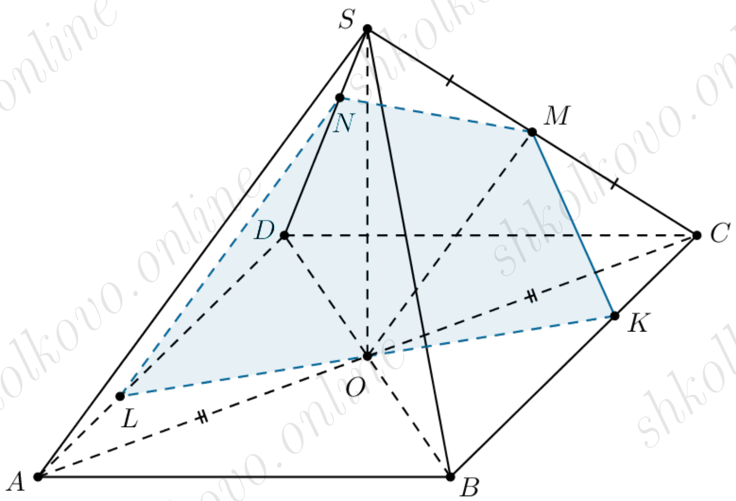
Ответ

б) $\sqrt{3}$

Решение

а) В правильной четырехугольной пирамиде основание $ABCD$ является квадратом, тогда O — точка пересечения его диагоналей AC и BD, значит, O — середина AC и BD.

Плоскость α пересекает плоскость (ASC) и параллельна прямой SA, лежащей в этой плоскости. Значит, плоскость α пересекает (ASC) по прямой, параллельной SA. Таким образом, $SA \parallel MO$. Следовательно, MO — средняя линия треугольника CAS, так как $MO \parallel SA$ и O — середина AC. Значит, M — середина SC.



б) Плоскость α пересекает плоскость грани ASD и параллельна прямой SA, лежащей в этой плоскости. Значит, плоскость α пересекает ASD по прямой, параллельной SA.

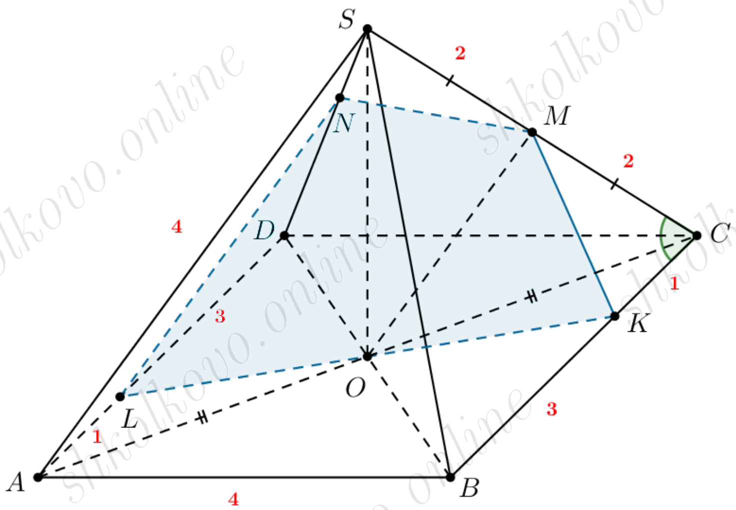
Пусть L — точка пересечения плоскости α и ребра AD. Тогда $NL \parallel SA$. Следовательно, по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{DL}{LA} = \frac{DN}{NS} = \frac{3}{1}.$$

По условию $SABCD$ — правильная пирамида, $AB = SA = 4$. Значит, все ребра пирамиды равны 4. Тогда

$$DL = 3, \ AL = 1.$$

Плоскость α проходит через точки L и O, следовательно, пересекает плоскость основания $ABCD$ по прямой LO. Пусть LO пересекает BC в точке K.



Рассмотрим $\triangle AOL$ и $\triangle COK$. В них $AO = CO$, так как O — середина AC, $\angle OAL = \angle OCK$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AD и BC и секущей AC, $\angle AOL = \angle COK$ как вертикальные. Значит, $\triangle AOL = \triangle COK$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $CK = AL = 1$. Тогда $BK = BC - CK = 3$.

Так как по условию точка M — середина отрезка SC и $SC = 4$, то $CM = 2$.

Нам нужно найти длину отрезка MK, так как по нему плоскость α пересекает грань BSC.

Все ребра пирамиды равны, поэтому $\triangle BSC$ — равносторонний. Тогда $\angle SCB = 60°$. По теореме косинусов для $\triangle MCK$:

$$MK^2 = CM^2 + CK^2 - 2 \cdot CM \cdot CK \cdot \cos \angle MCK$$

$$MK^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$MK^2 = 4 + 1 - 2$$

$$MK^2 = 3$$

$$MK = \sqrt{3}$$

Тип 6

№14.13 *(Центр)*

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K — середины ребер AB и SC соответственно. На продолжении ребра SB за точку S отмечена точка R. Прямые RM и RK пересекают ребра AS и BC в точках N и L соответственно, причем $2BL = 3LC$.

а) Докажите, что прямые MK и NL пересекаются.

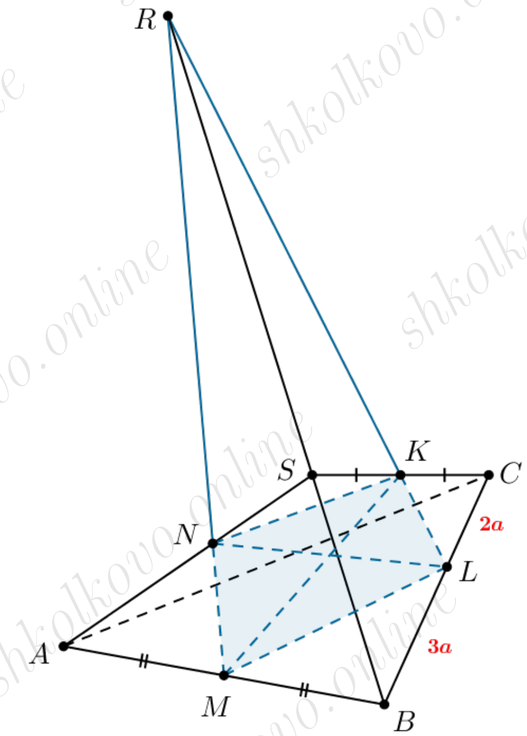
б) Найдите отношение $AN : NS$.

Ответ

б) $3 : 2$

Решение

а) Рассмотрим плоскость (MRK). Точка N лежит на прямой MR, поэтому лежит и в плоскости (MRK). Точка L лежит на прямой KR, поэтому лежит и в плоскости (MRK). Значит, прямые NL и MK лежат в плоскости (MRK).



$KLMN$ — четырехугольник, а MK и NL — его диагонали, следовательно, прямые, содержащие их, пересекаются.

б) По теореме Менелая для треугольника SBC и прямой KL :

$$\frac{SK}{KC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BR}{RS} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{BR}{RS} = 1$$

$$\frac{BR}{RS} = \frac{3}{2}$$

По теореме Менелая для треугольника SAB и прямой MN :

$$\frac{SN}{NA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BR}{RS}=1$$

$$\frac{SN}{NA}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$$\frac{AN}{NS}=\frac{3}{2}$$

Задача №15. Неравенство

Тип 1

№15.1 *(Дальний восток)*

Решите неравенство

$$\frac{49^x - 6\cdot 7^x + 3}{7^x - 5} + \frac{6\cdot 7^x - 39}{7^x - 7} \leqslant 7^x + 5.$$

Ответ

$(-\infty; 0] \cup (\log_7 5; 1)$

Решение

Пусть $t = 7^x > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} + \frac{6t - 39}{t - 7} \leqslant t + 5.$$

Перенесем все слагаемые в одну сторону и приведем их к общему знаменателю:

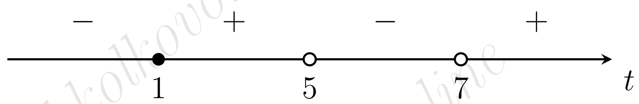
$$\frac{(t^2 - 6t + 3)\,(t - 7) + (6t - 39)(t - 5) - (t + 5)(t - 5)(t - 7)}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t^3 - 7t^2 - 6t^2 + 42t + 3t - 21) + (6t^2 - 30t - 39t + 195) - (t^3 - 7t^2 - 25t + 175)}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0$$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 45t - 21 + 6t^2 - 69t + 195 - t^3 + 7t^2 + 25t - 175}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0$$

$$\frac{t - 1}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Тогда решением неравенства будет совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} t \leqslant 1 \\ 5 < t < 7 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 7^x \leqslant 1 \\ 5 < 7^x < 7 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \log_7 5 < x < 1 \end{array}\right.$$

Таким образом, получим ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup (\log_7 5; 1)$.

№15.2 *(Дальний восток)*

Решите неравенство

$$\frac{9^x - 6\cdot 3^x + 4}{3^x - 5} + \frac{6\cdot 3^x - 51}{3^x - 9} \leqslant 3^x + 5.$$

Ответ

$(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

Решение

Пусть $t = 3^x > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \leqslant t + 5.$$

Перенесем все слагаемые в одну сторону и приведем их к общему знаменателю:

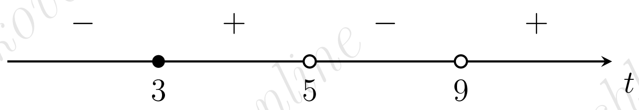
$$\frac{(t^2 - 6t + 4)\,(t - 9) + (6t - 51)(t - 5) - (t + 5)(t - 5)(t - 9)}{(t - 5)(t - 9)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t^3 - 9t^2 - 6t^2 + 54t + 4t - 36) + (6t^2 - 30t - 51t + 255) - (t^3 - 9t^2 - 25t + 225)}{(t - 5)(t - 9)} \leqslant 0$$

$$\frac{t^3 - 15t^2 + 58t - 36 + 6t^2 - 81t + 255 - t^3 + 9t^2 + 25t - 225}{(t - 5)(t - 9)} \leqslant 0$$

$$\frac{2(t - 3)}{(t - 5)(t - 9)} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Тогда решением неравенства будет совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} t \leqslant 3 \\ 5 < t < 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x \leqslant 3^1 \\ 3^{\log_3 5} < 3^x < 3^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1 \\ \log_3 5 < x < 2 \end{array}\right.$$

Таким образом, получим ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$.

Тип 2

№15.3 *(Красноярский край)*

Решите неравенство

$$3^x - 8 - \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 19}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leqslant \frac{1}{3^x - 3}.$$

Ответ

$(-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1) \cup (1; 2]$

Решение

Пусть $t = 3^x > 0$. Тогда имеем

$$t - 8 - \frac{6t - 19}{t^2 - 5t + 6} \leqslant \frac{1}{t - 3}$$

$$\frac{(t-8)(t-2)(t-3) - (6t-19) - (t-2)}{(t-2)(t-3)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-3)\left((t-8)(t-2) - 7\right)}{(t-2)(t-3)} \leqslant 0$$

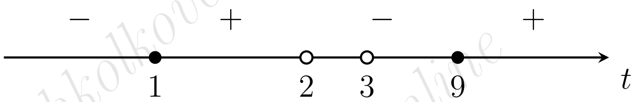
$$\frac{(t-3)\left(t^2 - 10t + 9\right)}{(t-2)(t-3)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-3)(t-1)(t-9)}{(t-2)(t-3)} \leqslant 0$$

Если $t \neq 3$, то $x \neq 1$. Тогда поделим на $(t-3)$ числитель и знаменатель:

$$\frac{(t-1)(t-9)}{t-2} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Значит, $t \in (-\infty; 1] \cup (2; 3) \cup (3; 9]$.

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x \leqslant 1 \\ \begin{cases} 3^x > 2 \\ 3^x \leqslant 9 \\ 3^x \neq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \begin{cases} x > \log_3 2 \\ x \leqslant 2 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$x \in (-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1) \cup (1; 2]$$

№15.4 *(Красноярский край)*

Решите неравенство

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leqslant \frac{1}{2^x - 4}.$$

Ответ

$(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$

Решение

Пусть $t = 2^x > 0$. Тогда имеем

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leqslant \frac{1}{t - 4}$$

$$\frac{(t-6)(t-3)(t-4) - (9t-37) - (t-3)}{(t-3)(t-4)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-4)\left((t-6)(t-3) - 10\right)}{(t-3)(t-4)} \leqslant 0$$

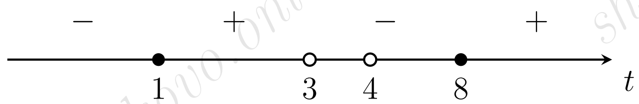
$$\frac{(t-4)\left(t^2 - 9t + 8\right)}{(t-3)(t-4)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-4)(t-1)(t-8)}{(t-3)(t-4)} \leqslant 0$$

Если $t \neq 4$, то $x \neq 2$. Тогда поделим на $(t-4)$ числитель и знаменатель:

$$\frac{(t-1)(t-8)}{t-3} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Значит, $t \in (-\infty; 1] \cup (3; 4) \cup (4; 8]$.

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x \leqslant 1 \\ \begin{cases} 2^x > 3 \\ 2^x \leqslant 8 \\ 2^x \neq 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \begin{cases} x > \log_2 3 \\ x \leqslant 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$x \in (-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$$

№15.5 *(Урал)*

Решите неравенство

$$11^x - 6 - \frac{11^x \cdot 24 - 244}{121^x - 16 \cdot 11^x + 60} \leqslant \frac{1}{11^x - 10}.$$

Ответ

$(-\infty; 0] \cup (\log_{11} 6; \log_{11} 10) \cup (\log_{11} 10; 1]$

Решение

Пусть $t = 11^x > 0$. Тогда имеем

$$t - 6 - \frac{24t - 244}{t^2 - 16t + 60} \leqslant \frac{1}{t - 10}$$

$$\frac{(t-6)(t-6)(t-10) - (24t - 244) - (t-6)}{(t-6)(t-10)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-10)\left((t-6)^2 - 25\right)}{(t-6)(t-10)} \leqslant 0$$

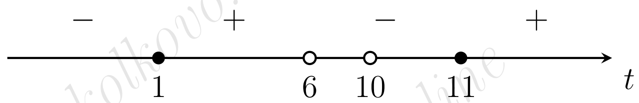
$$\frac{(t-10)\left(t^2 - 12t + 11\right)}{(t-6)(t-10)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-10)(t-1)(t-11)}{(t-6)(t-10)} \leqslant 0$$

Если $t \neq 10$, то $x \neq \log_{11} 10$. Тогда поделим на $(t - 10)$ числитель и знаменатель:

$$\frac{(t-1)(t-11)}{t-6} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Значит, $t \in (-\infty; 1] \cup (6; 10) \cup (10; 11]$.

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} 11^x \leqslant 1 \\ \begin{cases} 11^x > 6 \\ 11^x \leqslant 11 \\ 11^x \neq 10 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \begin{cases} x > \log_{11} 6 \\ x \leqslant 1 \\ x \neq \log_{11} 10 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$x \in (-\infty; 0] \cup (\log_{11} 6; \log_{11} 10) \cup (\log_{11} 10; 1]$$

Тип 3

№15.6 *(Саратов)*

Решите неравенство
$$\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}\geqslant \frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}.$$

Ответ

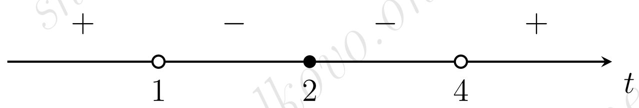
$(-\infty;0)\cup\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

Решение

Преобразуем левую часть, домножив числитель и знаменатель на 4:
$$\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}=\frac{8\cdot 8^{x-1}}{8\cdot 8^{x-1}-4}=\frac{8^x}{8^x-4}.$$

Положим $t=8^x$. Тогда неравенство примет следующий вид:
$$\frac{t}{t-4}\geqslant\frac{3}{t-1}+\frac{8}{t^2-5t+4}$$
$$\frac{t}{t-4}-\frac{3}{t-1}-\frac{8}{(t-1)(t-4)}\geqslant 0$$
$$\frac{t(t-1)-3(t-4)-8}{(t-1)(t-4)}\geqslant 0$$
$$\frac{t^2-t-3t+12-8}{(t-1)(t-4)}\geqslant 0$$
$$\frac{t^2-4t+4}{(t-1)(t-4)}\geqslant 0$$
$$\frac{(t-2)^2}{(t-1)(t-4)}\geqslant 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



Тогда решением неравенства будет совокупность:
$$\left[\begin{array}{l} t<1\\ t=2\\ t>4\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l} 8^x<8^0\\ 8^x=8^{\frac{1}{3}}\\ 8^x>8^{\frac{2}{3}}\end{array}\right.$$
$$x\in(-\infty;0)\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

№15.7 *(Центр)*

Решите неравенство

$$\frac{9^{x-1}}{9^{x-1}-1}-\frac{5}{9^x-1}\geqslant\frac{36}{81^x-10\cdot 9^x+9}.$$

Ответ

$(-\infty;0)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(1;+\infty)$

Решение

Преобразуем первое слагаемое левой части, домножив числитель и знаменатель на 9:

$$\frac{9^{x-1}}{9^{x-1}-1}=\frac{9\cdot 9^{x-1}}{9\cdot 9^{x-1}-9}=\frac{9^x}{9^x-9}.$$

Положим $t=9^x$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{t}{t-9}-\frac{5}{t-1}\geqslant\frac{36}{t^2-10t+9}$$

$$\frac{t}{t-9}-\frac{5}{t-1}-\frac{36}{(t-1)(t-9)}\geqslant 0$$

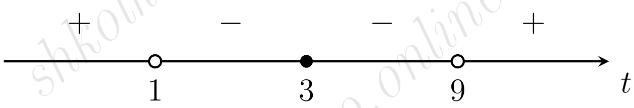
$$\frac{t(t-1)-5(t-9)-36}{(t-1)(t-9)}\geqslant 0$$

$$\frac{t^2-t-5t+45-36}{(t-1)(t-9)}\geqslant 0$$

$$\frac{t^2-6t+9}{(t-1)(t-9)}\geqslant 0$$

$$\frac{(t-3)^2}{(t-1)(t-9)}\geqslant 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



Тогда решением неравенства будет совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}t<1\\ t=3\\ t>9\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}9^x<9^0\\ 9^x=9^{\frac{1}{2}}\\ 9^x>9^1\end{array}\right.$$

$$x\in(-\infty;0)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(1;+\infty)$$

Тип 4

№15.8 *(Центр)*

Решите неравенство
$$\frac{3^x+9}{3^x-9}+\frac{3^x-9}{3^x+9}\geqslant\frac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}.$$

Ответ

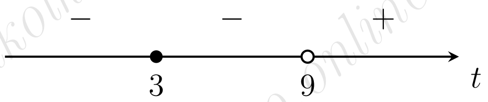
$\{1\}\cup(2;+\infty)$

Решение

Пусть $t=3^x$. Тогда неравенство примет вид:
$$\frac{t+9}{t-9}+\frac{t-9}{t+9}\geqslant\frac{12t+144}{(t-9)(t+9)}$$
$$\frac{(t+9)^2+(t-9)^2-(12t+144)}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0$$
$$\frac{(t^2+18t+81)+(t^2-18t+81)-12t-144}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0$$
$$\frac{2t^2-12t+18}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0$$
$$\frac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0$$

Заметим, что $t=3^x>0$, поэтому домножим обе части неравенства на заведомо положительно выражение $t+9$ и поделим на 2, получим
$$\frac{(t-3)^2}{t-9}\geqslant 0.$$

По методу интервалов получим:



Тогда решением неравенства будет совокупность:
$$\left[\begin{aligned}&t=3\\&t>9\end{aligned}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&3^x=3^1\\&3^x>3^2\end{aligned}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&x=1\\&x>2\end{aligned}\right.$$

Получим $x\in\{1\}\cup(2;+\infty)$.

№15.9 *(Татарстан, Санкт-Петербург)*

Решите неравенство

$$\frac{2^x+8}{2^x-8}+\frac{2^x-8}{2^x+8}\geqslant\frac{2^{x+4}+96}{4^x-64}.$$

Ответ

$\{2\}\cup(3;+\infty)$

Решение

Пусть $t=2^x$. Тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+8}{t-8}+\frac{t-8}{t+8}\geqslant\frac{16t+96}{(t-8)(t+8)}$$

$$\frac{(t+8)^2+(t-8)^2-(16t+96)}{(t-8)(t+8)}\geqslant 0$$

$$\frac{(t^2+16t+64)+(t^2-16t+64)-16t-96}{(t-8)(t+8)}\geqslant 0$$

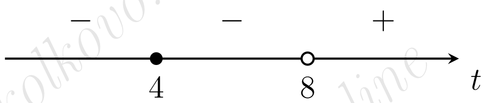
$$\frac{2t^2-16t+32}{(t-8)(t+8)}\geqslant 0$$

$$\frac{2(t-4)^2}{(t-8)(t+8)}\geqslant 0$$

Заметим, что $t=2^x>0$, поэтому домножим обе части неравенства на заведомо положительно выражение $t+8$ и поделим на 2, получим

$$\frac{(t-4)^2}{t-8}\geqslant 0.$$

По методу интервалов получим:



Тогда решением неравенства будет совокупность:

$$\left[\begin{aligned}&t=4\\&t>8\end{aligned}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&2^x=2^2\\&2^x>2^3\end{aligned}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&x=2\\&x>3\end{aligned}\right.$$

Получим $x\in\{2\}\cup(3;+\infty)$.

№15.10 *(Москва)*

Решите неравенство

$$\frac{7^x+7}{7^x-7}+\frac{7^x-7}{7^x+7}\geqslant\frac{4\cdot 7^x+96}{49^x-49}.$$

Ответ

$\{0\}\cup(1;+\infty)$

Решение

Пусть $t=7^x$. Тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+7}{t-7}+\frac{t-7}{t+7}\geqslant\frac{4t+96}{(t-7)(t+7)}$$

$$\frac{(t+7)^2+(t-7)^2-(4t+96)}{(t-7)(t+7)}\geqslant 0$$

$$\frac{(t^2+14t+49)+(t^2-14t+49)-4t-96}{(t-7)(t+7)}\geqslant 0$$

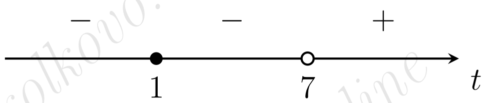
$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-7)(t+7)}\geqslant 0$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-7)(t+7)}\geqslant 0$$

Заметим, что $t=7^x>0$, поэтому домножим обе части неравенства на заведомо положительно выражение $t+7$ и поделим на 2, получим

$$\frac{(t-1)^2}{t-7}\geqslant 0.$$

По методу интервалов получим:



Тогда решением неравенства будет совокупность:

$$\left[\begin{aligned}&t=1\\&t>7\end{aligned}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&7^x=7^0\\&7^x>7^1\end{aligned}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&x=0\\&x>1\end{aligned}\right.$$

Получим $x\in\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Тип 5

№15.11 *(Дагестан)*

Решите неравенство

$$\frac{6\cdot 9^{x-1}-10}{81^{x-\frac{1}{2}}-9}\leqslant 1.$$

Ответ

$\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup(1;+\infty)$

Решение

Пусть $t=9^{x-1}>0$. Тогда

$$81^{x-\frac{1}{2}}=9^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=9^{2x-1}=9t^2.$$

Тогда неравенство примет вид

$$\frac{6t-10}{9t^2-9}\leqslant 1$$

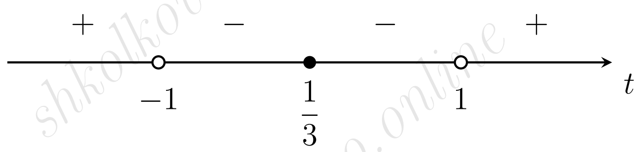
$$1-\frac{6t-10}{9\left(t^2-1\right)}\geqslant 0$$

$$\frac{9t^2-9-6t+10}{9(t-1)(t+1)}\geqslant 0$$

$$\frac{9t^2-6t+1}{9(t-1)(t+1)}\geqslant 0$$

$$\frac{(3t-1)^2}{9(t-1)(t+1)}\geqslant 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



Следовательно, получаем

$$\left[\begin{array}{l}t<-1\\ t=\dfrac{1}{3}\\ t>1\end{array}\right.\ \underset{t>0}{\Rightarrow}\ \left[\begin{array}{l}9^{x-1}=\dfrac{1}{3}\\ 9^{x-1}>1\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x-1=-\dfrac{1}{2}\\ x-1>0\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x>1\end{array}\right.$$

Таким образом, $x\in\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup(1;+\infty)$.

Задача №16. Экономическая

Тип 1

№16.1 *(Дальний восток)*

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 419 375 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ

648000

Решение

Составим таблицу, обозначив сумма кредита за $S = 419\,375$ руб., за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{20}{100} = \frac{6}{5}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x
4	$k^3S - k^2x - kx - x$	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$	x

Так как в конце четвертого года кредит погашен, то

$$k^4S - k^3x - k^2x - kx = x$$

$$x\left(k^3 + k^2 + k + 1\right) = k^4S$$

$$x\frac{k^4 - 1}{k - 1} = k^4S$$

$$x = Sk^4\frac{k - 1}{k^4 - 1}$$

Мы знаем, что $k = \dfrac{6}{5}$, $S = 419375$. Тогда получаем, что

$$x = Sk^4\frac{k-1}{k^4-1} = S \cdot \frac{6^4}{5^4} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{6^4}{5^4} - 1} = S \cdot \frac{6^4}{5^4} \cdot \frac{5^3}{6^4 - 5^4} = 419375 \cdot \frac{6^4}{5 \cdot 671} = 125 \cdot 1296 = 162000$$

Заметим, что за четыре года банку выплачено $4x$ рублей, значит, сумма выплат составила $4 \cdot 162000 = 648000$ рублей.

№16.2 *(Дальний восток)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 177 120 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ

300000

Решение

Составим таблицу, обозначив сумму кредита за $S = 177120$ руб., за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x
4	$k^3S - k^2x - kx - x$	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$	x

Так как в конце четвертого года кредит погашен, то

$$k^4S - k^3x - k^2x - kx = x$$

$$x\left(k^3 + k^2 + k + 1\right) = k^4S$$

$$x\frac{k^4 - 1}{k - 1} = k^4S$$

$$x = Sk^4\frac{k - 1}{k^4 - 1}$$

Мы знаем, что $k = \dfrac{5}{4}$, $S = 177120$. Тогда получаем, что

$$x = Sk^4\frac{k-1}{k^4-1} = S \cdot \frac{5^4}{4^4} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5^4}{4^4} - 1} = S \cdot \frac{5^4}{4^4} \cdot \frac{4^3}{5^4 - 4^4} =$$

$$= 177120 \cdot \frac{5^4}{4 \cdot 369} = 120 \cdot 625 = 75000$$

Заметим, что за четыре года банку выплачено $4x$ рублей, значит, сумма выплат составила

$$4 \cdot 75000 = 300000 \text{ рублей.}$$

№16.3 *(Дальний восток)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 185 640 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ

234256

Решение

Составим таблицу, обозначив сумму кредита за $S = 185640$ руб., за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x
4	$k^3S - k^2x - kx - x$	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$	x

Так как в конце четвертого года кредит погашен, то

$$k^4S - k^3x - k^2x - kx = x$$

$$x\left(k^3 + k^2 + k + 1\right) = k^4S$$

$$x\frac{k^4 - 1}{k - 1} = k^4S$$

$$x = Sk^4\frac{k - 1}{k^4 - 1}$$

Мы знаем, что $k = 1{,}1$, $S = 185640$. Тогда получаем, что

$$x = Sk^4\frac{k-1}{k^4-1} = S \cdot 1{,}1^4 \cdot \frac{0{,}1}{1{,}1^4 - 1} = S \cdot 1{,}1^4 \cdot \frac{10^3}{11^4 - 10^4} =$$

$$= 185640 \cdot \frac{11^4}{10 \cdot 4641} = 4 \cdot 14641 = 58564$$

Заметим, что за четыре года банку выплачено $4x$ рублей, значит, сумма выплат составила

$$4 \cdot 58564 = 234256 \text{ рублей.}$$

Тип 2

№16.4 *(Дальний восток)*

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 40% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Ответ

1029000

Решение

Составим таблицу, обозначив сумму кредита за $S = 545000$ руб., за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{40}{100} = 1{,}4$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$k^3S - k^2x - kx = x$$

$$x\left(k^2 + k + 1\right) = k^3S$$

$$x\frac{k^3 - 1}{k - 1} = k^3S$$

$$x = Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1}$$

Мы знаем, что $k = 1{,}4$, $S = 545000$. Тогда получаем, что

$$x = Sk^3\frac{k-1}{k^3-1} = S \cdot 1{,}4^3 \cdot \frac{0{,}4}{1{,}4^3 - 1} = S \cdot \frac{14^3}{10^3} \cdot \frac{400}{14^3 - 10^3} =$$

$$= S \cdot 14^3 \cdot \frac{4}{10 \cdot 1744} = 545000 \cdot 14^3 \cdot \frac{1}{4360} = 125 \cdot 14^3 = 70^3 = 343000$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, значит, сумма, выплаченная банку, составила

$$3 \cdot 343000 = 1029000 \text{ рублей.}$$

Тип 3

№16.5 *(Дальний восток)*

В июле 2026 года планируется взять кредит на 3 года в размере 800 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— в январе 2027 и 2028 годов долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2029 года долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Ответ

990000

Решение

Составим таблицу, обозначив сумму кредита за $S = 800000$ руб., за x руб. — ежегодный платеж. В первые два года долг увеличивался в $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$ раза, а в третий — в $1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$ раза.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	$1{,}1S$	x
2	$1{,}1S - x$	$1{,}1^2S - 1{,}1x$	x
3	$1{,}1^2S - 2{,}1x$	$1{,}2\left(1{,}1^2S - 2{,}1x\right)$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$1{,}2\left(1{,}1^2S - 2{,}1x\right) = x$$

$$1{,}2 \cdot 1{,}1^2S = x + 1{,}2 \cdot 2{,}1x$$

$$3{,}52x = 1{,}2 \cdot 1{,}1^2S$$

$$x = \frac{1{,}2 \cdot 1{,}1^2}{3{,}52}S$$

Мы знаем, что $S = 800000$. Тогда получаем, что

$$x = \frac{1{,}2 \cdot 1{,}1^2}{3{,}52}S = \frac{12 \cdot 11}{320}S =$$

$$= \frac{3 \cdot 11}{80} \cdot 800000 = 33 \cdot 10000 = 330000$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, значит, сумма, выплаченная банку, составила

$$3 \cdot 330000 = 990000 \text{ рублей.}$$

Тип 4

№16.6 *(Татарстан)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 65 500 рублей больше суммы, взятой кредита?

Ответ

122000

Решение

Составим таблицу, обозначив за S руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$k^3S - k^2x - kx = x$$

$$x\left(k^2 + k + 1\right) = k^3S$$

$$x\frac{k^3 - 1}{k - 1} = k^3S$$

$$x = Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1}$$

$$3x = 3Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1}$$

Мы знаем, что $k = \dfrac{5}{4}$. Преобразуем правую часть:

$$3Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1} = 3S \cdot \frac{5^3}{4^3} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 1} =$$

$$= 3S \cdot \frac{5^3}{4^3} \cdot \frac{4^2}{5^3 - 4^3} = \frac{375}{244}S$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, тогда $3x = S + 65500$. Подставим это в выражение для $3x$:

$$S + 65500 = \frac{375}{244}S$$

$$65500 = \frac{131}{244}S$$

$$S = \frac{65500 \cdot 244}{131}$$

$$S = 122000$$

№16.7 *(Москва)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Ответ

182000

Решение

Составим таблицу, обозначив за S руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{20}{100} = \frac{6}{5}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$k^3S - k^2x - kx = x$$

$$x\left(k^2 + k + 1\right) = k^3S$$

$$x\frac{k^3 - 1}{k - 1} = k^3S$$

$$x = Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1}$$

$$3x = 3Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1}$$

Мы знаем, что $k = \dfrac{6}{5}$. Преобразуем правую часть:

$$3Sk^3\frac{k-1}{k^3-1} = 3S\cdot\frac{6^3}{5^3}\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\left(\frac{6}{5}\right)^3-1} =$$

$$= 3S\cdot\frac{6^3}{5^3}\cdot\frac{5^2}{6^3-5^3} = \frac{648}{455}S$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, тогда $3x = S + 77200$. Подставим это в выражение для $3x$:

$$S + 77200 = \frac{648}{455}S$$

$$77200 = \frac{193}{455}S$$

$$S = \frac{77200\cdot 455}{193}$$

$$S = 182000$$

№16.8 *(Санкт-Петербург)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 40 980 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Ответ

198600

Решение

Составим таблицу, обозначив за S руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$k^3S - k^2x - kx = x$$

$$x\left(k^2 + k + 1\right) = k^3S$$

$$x\frac{k^3-1}{k-1} = k^3S$$

$$x = Sk^3\frac{k-1}{k^3-1}$$

$$3x = 3Sk^3\frac{k-1}{k^3-1}$$

Мы знаем, что $k = 1{,}1$. Преобразуем правую часть:

$$3Sk^3\frac{k-1}{k^3-1} = 3S\cdot 1{,}1^3\cdot\frac{0{,}1}{(1{,}1)^3-1} =$$
$$= S\cdot\frac{3\cdot 1{,}331\cdot 0{,}1}{0{,}331} = \frac{3993}{3310}S$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, тогда $3x = S + 40980$. Подставим это в выражение для $3x$:

$$S + 40980 = \frac{3993}{3310}S$$

$$40980 = \frac{683}{3310}S$$

$$S = \frac{40980\cdot 3310}{683}$$

$$S = 198600$$

№16.9 *(Центр)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в кредит в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после погашения кредита должна быть на 104 800 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Ответ

195200

Решение

Составим таблицу, обозначив за S руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за

$k=1+\frac{25}{100}=\frac{5}{4}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS-x$	k^2S-kx	x
3	$k^2S-kx-x$	k^3S-k^2x-kx	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$k^3S-k^2x-kx=x$$

$$x\left(k^2+k+1\right)=k^3S$$

$$x\frac{k^3-1}{k-1}=k^3S$$

$$x=Sk^3\frac{k-1}{k^3-1}$$

$$3x=3Sk^3\frac{k-1}{k^3-1}$$

Мы знаем, что $k=\dfrac{5}{4}$. Преобразуем правую часть:

$$3Sk^3\frac{k-1}{k^3-1}=3S\cdot\frac{5^3}{4^3}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3-1}=$$

$$=3S\cdot\frac{5^3}{4^3}\cdot\frac{4^2}{5^3-4^3}=\frac{375}{244}S$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, тогда $3x=S+104800$. Подставим это в выражение для $3x$:

$$S+104800=\frac{375}{244}S$$

$$104800=\frac{131}{244}S$$

$$S=\frac{104800\cdot 244}{131}$$

$$S=195200$$

Тип 5

№16.10 *(Центр)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и общая сумма платежей составит 375 000 рублей.

Ответ

221400

Решение

Составим таблицу, обозначив сумму кредита за S руб., за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x
4	$k^3S - k^2x - kx - x$	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$	x

Так как в конце четвертого года кредит погашен, то

$$k^4S - k^3x - k^2x - kx = x$$

Это уравнение преобразуется в уравнение вида:

$$x\left(k^3 + k^2 + k + 1\right) = k^4S$$

$$x\frac{k^4 - 1}{k - 1} = k^4S$$

$$S = \frac{x \cdot (k^4 - 1)}{k^4 \cdot (k - 1)}$$

По условию $4x = 375000$, откуда получаем, что $x = 93750$.

Мы знаем, что $k = \dfrac{5}{4}$, $x = 93750$. Тогда получаем, что

$$S = \frac{x\cdot(k^4-1)}{k^4\cdot(k-1)} = x\cdot\frac{4^4}{5^4}\cdot\frac{\dfrac{5^4}{4^4}-1}{\dfrac{1}{4}} = x\cdot\frac{4^4}{5^4}\cdot\frac{5^4-4^4}{4^3} =$$

$$= 93750\cdot\frac{4\cdot 369}{5^4} = 150\cdot 4\cdot 369 = 221400$$

Тип 6

№16.11 *(Дагестан)*

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 720 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2027, 2028, 2029 годов долг остается равным 720 тыс. руб.

— выплаты в 2030 и 2031 годах равны.

— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму платежей за пять лет.

Ответ

1540000

Решение

Каждый год сумма кредита увеличивается на 25%, то есть в $1+\frac{25}{100}=1{,}25$ раза.

Составим таблицу, обозначив сумму кредита за $S=720000$ рублей. В первые 3 года заёмщик выплачивает только начисленные проценты, то есть по $0{,}25S$ рублей. Платежи в 4 и 5 года равны, обозначим их за x рублей.

Год	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.	Долг в руб. после платежа
1	$1{,}25S$	$0{,}25S$	S
2	$1{,}25S$	$0{,}25S$	S
3	$1{,}25S$	$0{,}25S$	S
4	$1{,}25S$	x	$1{,}25S-x$
5	$(1{,}25S-x)\cdot 1{,}25$	x	$(1{,}25S-x)\cdot 1{,}25-x$

Так как за 5 лет долг полностью погашен, то долг после пятого платежа равен 0, поэтому получаем

$$(1{,}25S-x)\cdot 1{,}25-x=0$$

$$\left(\frac{5}{4}S-x\right)\cdot\frac{5}{4}-x=0$$

$$\frac{9}{4}x=\frac{5^2}{4^2}S$$

$$x=\frac{5^2}{4\cdot 9}\cdot 720000$$

$$x=500000$$

Тогда общая сумма платежей за 5 лет в рублях равна

$$0{,}25S\cdot 3+2x=0{,}25\cdot 720000\cdot 3+2\cdot 500000=1540000$$

№16.12 *(Дагестан)*

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1260 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2027, 2028, 2029 годов долг остается равным 1260 тыс. руб.

— выплаты в 2030 и 2031 годах равны.

— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму платежей за пять лет.

Ответ

2695000 рублей

Решение

Каждый год сумма кредита увеличивается на 25%, то есть в $1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$ раза.

Составим таблицу, обозначив сумму кредита за $S = 1260000$ рублей. В первые 3 года заёмщик выплачивает только начисленные проценты, то есть по $0{,}25S$ рублей. Платежи в 4 и 5 года равны, обозначим их за x рублей.

Год	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.	Долг в руб. после платежа
1	$1{,}25S$	$0{,}25S$	S
2	$1{,}25S$	$0{,}25S$	S
3	$1{,}25S$	$0{,}25S$	S
4	$1{,}25S$	x	$1{,}25S - x$
5	$(1{,}25S - x) \cdot 1{,}25$	x	$(1{,}25S - x) \cdot 1{,}25 - x$

Так как за 5 лет долг полностью погашен, то долг после пятого платежа равен 0, поэтому получаем

$$(1{,}25S - x) \cdot 1{,}25 - x = 0$$

$$\left(\frac{5}{4}S - x\right) \cdot \frac{5}{4} - x = 0$$

$$\frac{5^2}{4^2}S - \frac{5}{4}x - x = 0$$

$$\frac{9}{4}x = \frac{5^2}{4^2}S$$

$$x = \frac{5^2}{4 \cdot 9} \cdot 1260000$$

$$x = 875000$$

Тогда общая сумма платежей за 5 лет в рублях равна:

$$0{,}25S \cdot 3 + 2x = 0{,}25 \cdot 1260000 \cdot 3 + 2 \cdot 875000 = 2695000$$

Тип 7

№16.13 *(Адыгея)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 48 250 рублей больше суммы, взятой кредита?

Ответ

162000

Решение

Составим таблицу, обозначив за S руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{20}{100} = \frac{6}{5}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления %	Долг в руб. после начисления %	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$k^3S - k^2x - kx = x$$

$$x\left(k^2 + k + 1\right) = k^3S$$

$$x\frac{k^3 - 1}{k - 1} = k^3S$$

$$x = Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1}$$

$$3x = 3Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1}$$

Мы знаем, что $k = \dfrac{6}{5}$. Преобразуем правую часть:

$$3Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1} = 3S \cdot \frac{6^3}{5^3} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\left(\frac{6}{5}\right)^3 - 1} =$$

$$= 3S \cdot \frac{6^3}{5^3} \cdot \frac{5^2}{6^3 - 5^3} = \frac{648}{455}S$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, тогда $3x = S + 48250$. Подставим это в выражение для $3x$:

$$S + 48250 = \frac{648}{455}S$$

$$48250 = \frac{193}{455}S$$

$$S = \frac{48250 \cdot 455}{193}$$

$$S = 113720$$

Тогда за три года банку заплатили

$$S + 48250 = 113750 + 48250 = 162000 \text{ руб.}$$

Задача №17. Планиметрия

Тип 1

№17.1 *(Дальний восток)*

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. При этом M — точка пересечения его диагоналей BE и AD. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.

б) Найдите AB, если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

Ответ

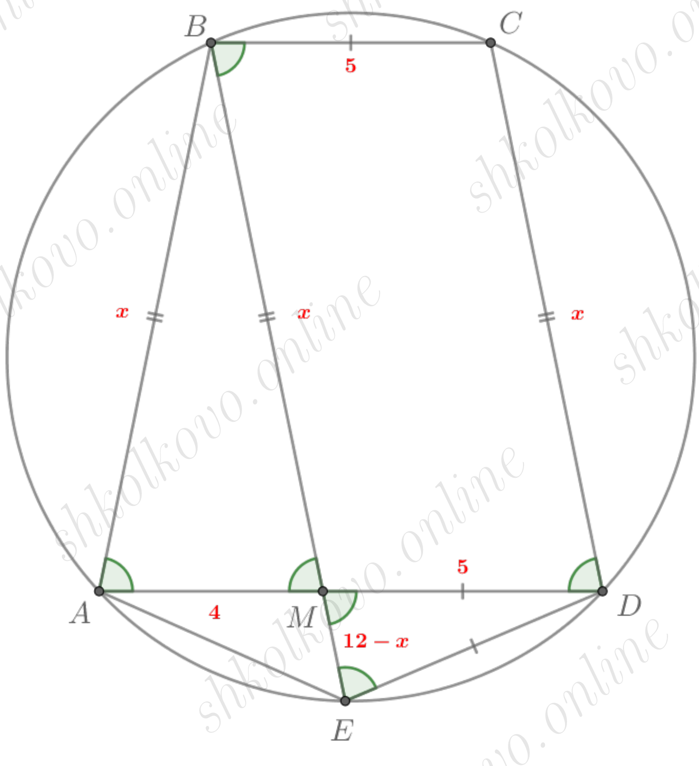
б) 10

Решение

а) Так как $BCDM$ — параллелограмм, то $CD \parallel BM$ и $CD = BM$. Тогда $EBCD$ — трапеция, так как $CD \parallel BE$ и $BE = BM + ME = CD + ME > CD$.

Вокруг трапеции $BCDE$ описана окружность, следовательно, она равнобедренная, в которой $BC = DE$.

Значит, в пятиугольнике $ABCDE$ равны стороны BC и DE.



б) Аналогично пункту а) получаем, что $ABCD$ — равнобедренная трапеция, в которой $BC \parallel AD$, $AD > BC$ и $AB = CD$.

Так как по условию $BCDM$ — параллелограмм, то $DM = BC = 5$. Тогда

$$AM = AD - DM = 9 - 5 = 4.$$

Пусть $AB = CD = BM = x$. По свойству пересекающихся хорд AD и BE в окружности:

$$AM \cdot MD = BM \cdot ME$$
$$4 \cdot 5 = x \cdot (12 - x)$$
$$x^2 - 12x + 20 = 0$$
$$(x - 2)(x - 10) = 0$$
$$\left[\begin{aligned} &x = 2 \\ &x = 10 \end{aligned}\right.$$

Заметим, что если $x = 2$, то $ME = 10$. Тогда в $\triangle MDE$ стороны будут равны 5, 5 и 10, что невозможно по неравенству треугольника.

Значит, $AB = x = 10$.

Тип 2

№17.2 *(Москва)*

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE, если $AD = 6$.

Ответ

б) $\dfrac{17}{3}$

Решение

а) Равные хорды AB и CD стягивают равные дуги, следовательно, вписанные углы, опирающиеся на них, равны, то есть $\angle ACB = \angle CAD$. Тогда накрест лежащие углы, образованные прямыми BC и AD и секущей AC, равны, следовательно, $BC \parallel AD$.

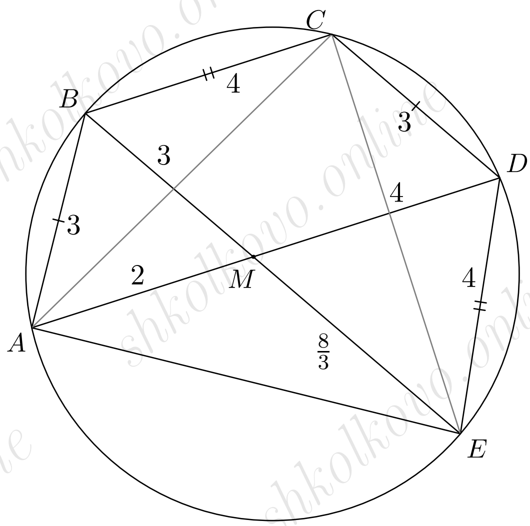
Равные хорды BC и DE стягивают равные дуги, следовательно, вписанные углы, опирающиеся на них, равны, то есть $\angle BEC = \angle DCE$. Тогда накрест лежащие углы, образованные прямыми CD и BE и секущей CE, равны, следовательно, $CD \parallel BE$.

Пусть M — точка пересечения диагоналей AD и BE. Тогда в четырехугольнике $BCDM$ известно, что $BC \parallel MD$ и $CD \parallel BM$, значит, $BCDM$ — параллелограмм. Следовательно, $MD = BC = 4$ и $BM = CD = 3$.

В четырехугольнике $ABCD$ мы знаем, что $BC \parallel AD$, $AD = AM + MD = AM + BC > BC$ и $AB = CD$. Значит, $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Диагонали равнобедренной трапеции равны, поэтому $AC = BD$.

В четырехугольнике $BCDE$ мы знаем, что $CD \parallel BE$, $BE = BM + ME = CD + ME > CD$ и $BC = DE$. Значит, $BCDE$ — равнобедренная трапеция. Диагонали равнобедренной трапеции равны, поэтому $BD = CE$.

Таким образом, $AC = BD = CE$.



б) В пункте а) мы узнали, что $MD = 4$, значит,

$$AM = AD - MD = 6 - 4 = 2.$$

Тогда по свойству пересекающихся хорд AD и BE в окружности:

$$AM \cdot MD = BM \cdot ME$$
$$2 \cdot 4 = 3 \cdot ME$$
$$ME = \frac{8}{3}$$

Значит,

$$BE = BM + ME = 3 + \frac{8}{3} = \frac{9+8}{3} = \frac{17}{3}.$$

№17.3 *(Татарстан)*

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 4$, $BC = DE = 6$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE, если $AD = 7$.

Ответ

б) 5,5

Решение

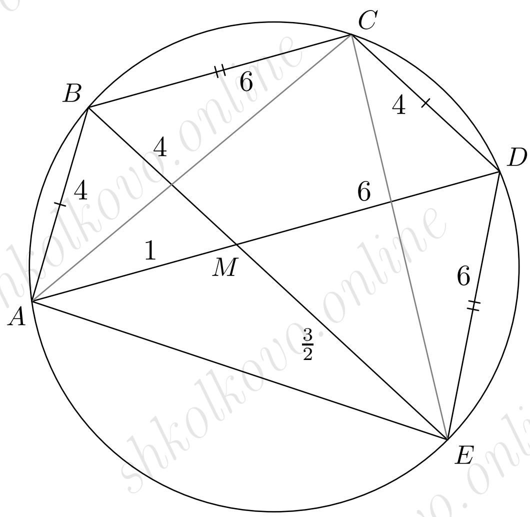
а) Равные хорды AB и CD стягивают равные дуги, следовательно, вписанные углы, опирающиеся на них, равны, то есть $\angle ACB = \angle CAD$. Тогда накрест лежащие углы, образованные прямыми BC и AD и секущей AC, равны, следовательно, $BC \parallel AD$.

Равные хорды BC и DE стягивают равные дуги, следовательно, вписанные углы, опирающиеся на них, равны, то есть $\angle BEC = \angle DCE$. Тогда накрест лежащие углы, образованные прямыми CD и BE и секущей CE, равны, следовательно, $CD \parallel BE$. Пусть M — точка пересечения диагоналей AD и BE. Тогда в четырехугольнике $BCDM$ известно, что $BC \parallel MD$ и $CD \parallel BM$, значит, $BCDM$ — параллелограмм. Следовательно, $MD = BC = 6$ и $BM = CD = 4$.

В четырехугольнике $ABCD$ мы знаем, что $BC \parallel AD$, $AD = AM + MD = AM + BC > BC$ и $AB = CD$. Значит, $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Диагонали равнобедренной трапеции равны, поэтому $AC = BD$.

В четырехугольнике $BCDE$ мы знаем, что $CD \parallel BE$, $BE = BM + ME = CD + ME > CD$ и $BC = DE$. Значит, $BCDE$ — равнобедренная трапеция. Диагонали равнобедренной трапеции равны, поэтому $BD = CE$.

Таким образом, $AC = BD = CE$.



б) В пункте а) мы узнали, что $MD = 6$, значит,

$$AM = AD - MD = 7 - 6 = 1.$$

Тогда по свойству пересекающихся хорд AD и BE в окружности:

$$AM \cdot MD = BM \cdot ME$$
$$1 \cdot 6 = 4 \cdot ME$$
$$ME = \frac{3}{2}$$

Значит,

$$BE = BM + ME = 4 + \frac{3}{2} = 4 + 1{,}5 = 5{,}5.$$

№17.4 *(Санкт-Петербург)*

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 5$, $BC = DE = 8$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE, если $AD = 10$.

Ответ

б) 8,2

Решение

а) Равные хорды AB и CD стягивают равные дуги, следовательно, вписанные углы, опирающиеся на них, равны, то есть $\angle ACB = \angle CAD$. Тогда накрест лежащие углы, образованные прямыми BC и AD и секущей AC, равны, следовательно, $BC \parallel AD$.

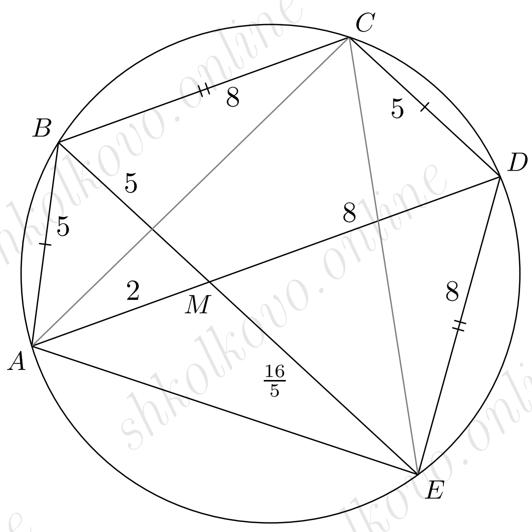
Равные хорды BC и DE стягивают равные дуги, следовательно, вписанные углы, опирающиеся на них, равны, то есть $\angle BEC = \angle DCE$. Тогда накрест лежащие углы, образованные прямыми CD и BE и секущей CE, равны, следовательно, $CD \parallel BE$.

Пусть M — точка пересечения диагоналей AD и BE. Тогда в четырехугольнике $BCDM$ известно, что $BC \parallel MD$ и $CD \parallel BM$, значит, $BCDM$ — параллелограмм. Следовательно, $MD = BC = 8$ и $BM = CD = 5$.

В четырехугольнике $ABCD$ мы знаем, что $BC \parallel AD$, $AD = AM + MD = AM + BC > BC$ и $AB = CD$. Значит, $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Диагонали равнобедренной трапеции равны, поэтому $AC = BD$.

В четырехугольнике $BCDE$ мы знаем, что $CD \parallel BE$, $BE = BM + ME = CD + ME > CD$ и $BC = DE$. Значит, $BCDE$ — равнобедренная трапеция. Диагонали равнобедренной трапеции равны, поэтому $BD = CE$.

Таким образом, $AC = BD = CE$.



б) В пункте а) мы узнали, что $MD = 8$, значит,

$$AM = AD - MD = 10 - 8 = 2.$$

Тогда по свойству пересекающихся хорд AD и BE в окружности:

$$AM \cdot MD = BM \cdot ME$$
$$2 \cdot 8 = 5 \cdot ME$$
$$ME = \frac{16}{5}$$

Значит,

$$BE = BM + ME = 5 + \frac{16}{5} = 5 + 3{,}2 = 8{,}2.$$

Тип 3

№17.5 *(Центр)*

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла $\angle ANB$.

б) Найдите NO, если $AB = 24$, $AC = 10$.

Ответ

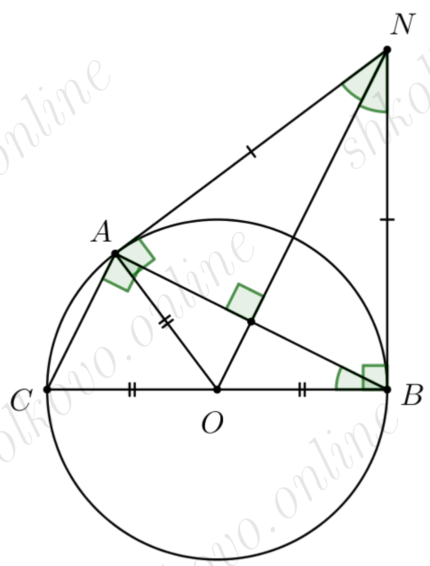
б) 33,8

Решение

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, так как он равноудален от сторон этого угла. Тогда NO — биссектриса угла ANB. Также центр O лежит на диаметре BC.

Заметим, что $NA = NB$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, а значит, треугольник ANB — равнобедренный. Поэтому его биссектриса из вершины N также является и высотой, то есть $NO \perp AB$.

При этом $\angle BAC = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр, а значит, $AB \perp AC$. Таким образом, $NO \perp AB$ и $AB \perp AC$, следовательно, $NO \parallel AC$.



б) Рассмотрим четырехугольник $ANBO$. В нем $\angle OAN = 90^\circ = \angle OBN$, так как радиусы OA и OB, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным NA и NB соответственно. Значит, сумма противоположных углов четырехугольника $ANBO$ равна 180°, следовательно, $ANBO$ — вписанный. Тогда $\angle ANO = \angle ABO$ как углы, опирающиеся на одну дугу описанной около этого четырехугольника окружности.

Рассмотрим треугольники ANO и ABC. В них $\angle NAO = 90^\circ = \angle BAC$ и $\angle ANO = \angle ABC$. Значит, $\triangle ANO \sim \triangle ABC$ по двум углам. Запишем отношение подобия:

$$\frac{NO}{BC} = \frac{AO}{AC} = \frac{AN}{AB}.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$$
$$BC = \sqrt{10^2 + 24^2}$$
$$BC = \sqrt{676}$$
$$BC = 26$$

Тогда так как O — центр окружности, то

$$AO = BO = CO = \frac{BC}{2} = 13.$$

Таким образом,

$$\frac{NO}{BC} = \frac{AO}{AC}$$
$$NO = \frac{AO \cdot BC}{AC}$$
$$NO = \frac{13 \cdot 26}{10}$$
$$NO = 33{,}8$$

№17.6 *(Центр)*

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла $\angle ANB$.

б) Найдите NO, если $AB = 48$, $AC = 14$.

Ответ

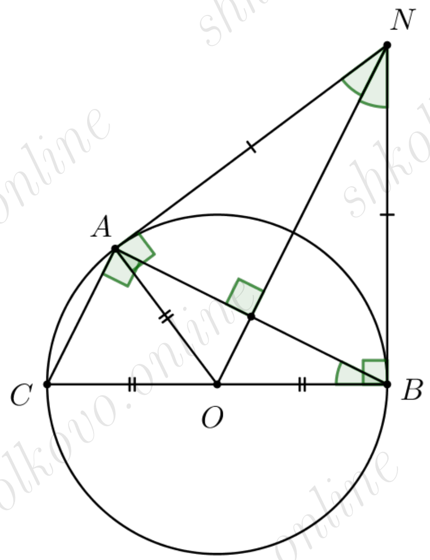
б) $\dfrac{625}{7}$

Решение

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, так как он равноудален от сторон этого угла. Тогда NO — биссектриса угла ANB. Также центр O лежит на диаметре BC.

Заметим, что $NA = NB$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, а значит, треугольник ANB — равнобедренный. Поэтому его биссектриса из вершины N также является и высотой, то есть $NO \perp AB$.

При этом $\angle BAC = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр, а значит, $AB \perp AC$. Таким образом, $NO \perp AB$ и $AB \perp AC$, следовательно, $NO \parallel AC$.



б) Рассмотрим четырехугольник $ANBO$. В нем $\angle OAN = 90^\circ = \angle OBN$, так как радиусы OA и OB, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным NA и NB соответственно. Значит, сумма противоположных углов четырехугольника $ANBO$ равна 180°, следовательно, $ANBO$ — вписанный. Тогда $\angle ANO = \angle ABO$ как углы, опирающиеся на одну дугу описанной около этого четырехугольника окружности.

Рассмотрим треугольники ANO и ABC. В них $\angle NAO = 90^\circ = \angle BAC$ и $\angle ANO = \angle ABC$. Значит, $\triangle ANO \sim \triangle ABC$ по двум углам. Запишем отношение подобия:

$$\frac{NO}{BC} = \frac{AO}{AC} = \frac{AN}{AB}.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$$
$$BC = \sqrt{14^2 + 48^2}$$
$$BC = \sqrt{2500}$$
$$BC = 50$$

Тогда так как O — центр окружности, то

$$AO = BO = CO = \frac{BC}{2} = 25.$$

Таким образом,

$$\frac{NO}{BC} = \frac{AO}{AC}$$
$$NO = \frac{AO \cdot BC}{AC}$$
$$NO = \frac{25 \cdot 50}{14}$$
$$NO = \frac{625}{7}$$

№17.7 *(Центр)*

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла $\angle ANB$.

б) Найдите NO, если $AB = 42$, $AC = 40$.

Ответ

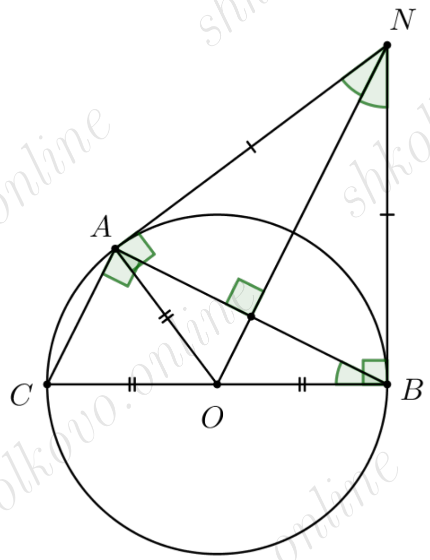
б) $\dfrac{841}{20}$

Решение

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, так как он равноудален от сторон этого угла. Тогда NO — биссектриса угла ANB. Также центр O лежит на диаметре BC.

Заметим, что $NA = NB$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, а значит, треугольник ANB — равнобедренный. Поэтому его биссектриса из вершины N также является и высотой, то есть $NO \perp AB$.

При этом $\angle BAC = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр, а значит, $AB \perp AC$. Таким образом, $NO \perp AB$ и $AB \perp AC$, следовательно, $NO \parallel AC$.



б) Рассмотрим четырехугольник $ANBO$. В нем $\angle OAN = 90^\circ = \angle OBN$, так как радиусы OA и OB, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным NA и NB соответственно. Значит, сумма противоположных углов четырехугольника $ANBO$ равна 180°, следовательно, $ANBO$ — вписанный. Тогда $\angle ANO = \angle ABO$ как углы, опирающиеся на одну дугу описанной около этого четырехугольника окружности.

Рассмотрим треугольники ANO и ABC. В них $\angle NAO = 90^\circ = \angle BAC$ и $\angle ANO = \angle ABC$. Значит, $\triangle ANO \sim \triangle ABC$ по двум углам. Запишем отношение подобия:

$$\frac{NO}{BC} = \frac{AO}{AC} = \frac{AN}{AB}.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$$
$$BC = \sqrt{40^2 + 42^2}$$
$$BC = \sqrt{3364}$$
$$BC = 58$$

Тогда так как O — центр окружности, то

$$AO = BO = CO = \frac{BC}{2} = 29.$$

Таким образом,

$$\frac{NO}{BC} = \frac{AO}{AC}$$
$$NO = \frac{AO \cdot BC}{AC}$$
$$NO = \frac{29 \cdot 58}{40}$$
$$NO = \frac{841}{20}$$

Тип 4

№17.8 *(Сибирь)*

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB, если известно, что $AC = 10$ и $AB = 22$.

Ответ

б) 24,2

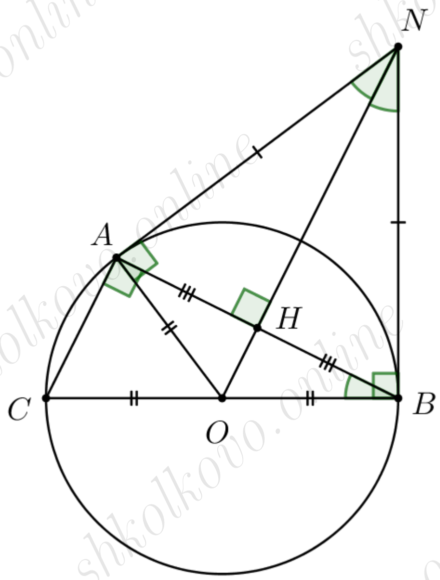
Решение

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, так как он равноудален от сторон этого угла. Тогда NO — биссектриса угла ANB. Также центр O лежит на диаметре BC.

Рассмотрим четырехугольник $ANBO$. В нем $\angle OAN = 90^\circ = \angle OBN$, так как радиусы OA и OB, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным NA и NB соответственно. Значит, сумма противоположных углов четырехугольника $ANBO$ равна 180°, следовательно, $ANBO$ — вписанный. Тогда $\angle ANO = \angle ABO$ как углы, опирающиеся на одну дугу описанной около этого четырехугольника окружности.

Таким образом,

$$\angle ANB = 2\angle ANO = 2\angle ABO = 2\angle ABC.$$



б) В прямоугольном треугольнике ABC имеем:

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.$$

Пусть H — точка пересечения AB и NO. Заметим, что $NA = NB$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, а значит, треугольник ANB — равнобедренный.

Поэтому его биссектриса из вершины N также является высотой и медианой, то есть $\angle AHN = 90^\circ$ и $AH = BH = 11$.

Тогда в прямоугольном треугольнике ANH имеем:

$$\frac{AH}{NH} = \operatorname{tg} \angle ANH = \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{5}{11}$$

$$NH = \frac{11AH}{5} = \frac{121}{5} = 24{,}2.$$

№17.9 *(Урал)*

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB, если известно, что $AC = 12$ и $AB = 52$.

Ответ

б) $\dfrac{338}{3}$

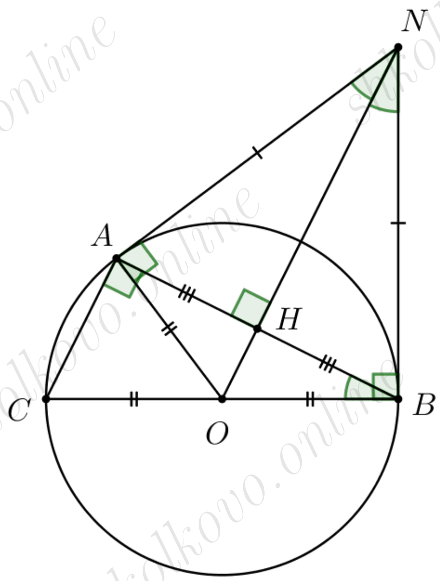
Решение

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, так как он равноудален от сторон этого угла. Тогда NO — биссектриса угла ANB. Также центр O лежит на диаметре BC.

Рассмотрим четырехугольник $ANBO$. В нем $\angle OAN = 90^\circ = \angle OBN$, так как радиусы OA и OB, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным NA и NB соответственно. Значит, сумма противоположных углов четырехугольника $ANBO$ равна 180°, следовательно, $ANBO$ — вписанный. Тогда $\angle ANO = \angle ABO$ как углы, опирающиеся на одну дугу описанной около этого четырехугольника окружности.

Таким образом,

$$\angle ANB = 2\angle ANO = 2\angle ABO = 2\angle ABC.$$



б) В прямоугольном треугольнике ABC имеем:

$$\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

Пусть H — точка пересечения AB и NO. Заметим, что $NA = NB$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, а значит, треугольник ANB — равнобедренный. Поэтому его биссектриса из вершины N также является высотой и медианой, то есть $\angle AHN = 90^\circ$ и $AH = BH = 26$.

Тогда в прямоугольном треугольнике ANH имеем:

$$\frac{AH}{NH} = \operatorname{tg}\angle ANH = \operatorname{tg}\angle ABC = \frac{3}{13}$$

$$NH = \frac{13AH}{3} = \frac{13\cdot 26}{3} = \frac{338}{3}.$$

№17.10 *(Сибирь)*

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB, если известно, что $AC = 14$ и $AB = 36$.

Ответ

б) $\dfrac{324}{7}$

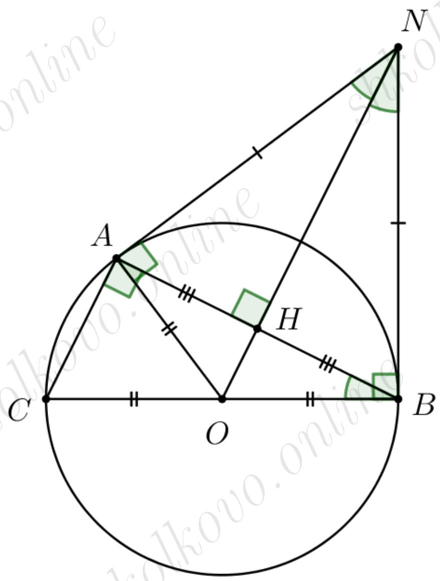
Решение

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, так как он равноудален от сторон этого угла. Тогда NO — биссектриса угла ANB. Также центр O лежит на диаметре BC.

Рассмотрим четырехугольник $ANBO$. В нем $\angle OAN = 90^\circ = \angle OBN$, так как радиусы OA и OB, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным NA и NB соответственно. Значит, сумма противоположных углов четырехугольника $ANBO$ равна 180°, следовательно, $ANBO$ — вписанный. Тогда $\angle ANO = \angle ABO$ как углы, опирающиеся на одну дугу описанной около этого четырехугольника окружности.

Таким образом,

$$\angle ANB = 2\angle ANO = 2\angle ABO = 2\angle ABC.$$



б) В прямоугольном треугольнике ABC имеем:

$$\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

Пусть H — точка пересечения AB и NO. Заметим, что $NA = NB$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, а значит, треугольник ANB — равнобедренный. Поэтому его биссектриса из вершины N также является высотой и медианой, то есть $\angle AHN = 90^\circ$ и $AH = BH = 18$.

Тогда в прямоугольном треугольнике ANH имеем:

$$\frac{AH}{NH} = \operatorname{tg}\angle ANH = \operatorname{tg}\angle ABC = \frac{7}{18}$$

$$NH = \frac{18AH}{7} = \frac{18\cdot 18}{7} = \frac{324}{7}.$$

Тип 5

№17.11 *(Дагестан)*

Периметр треугольника ABC равен 36. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $AC = 9$.

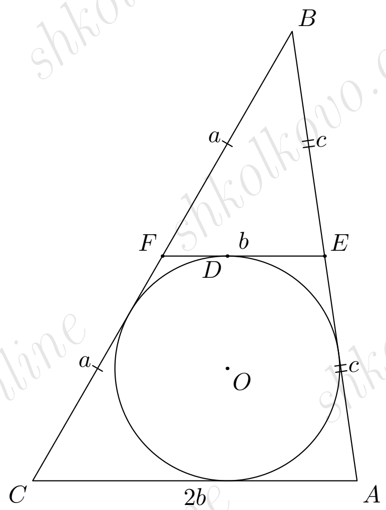
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 90^\circ$.

Ответ

б) 54

Решение

а) Пусть $AB = 2c$, $AC = 2b$ и $BC = 2a$. По условию E — середина AB, поэтому $AE = BE = c$. Также F — середина BC, поэтому $BF = CF = a$. Тогда EF — средняя линия треугольника ABC, параллельная AC, следовательно, $EF = b$.



По условию периметр треугольника ABC равен 36, значит,

$$2a + 2b + 2c = 36$$
$$a + b + c = 18$$

С другой стороны, EF касается вписанной окружности треугольника ABC, поэтому четырехугольник $AEFC$ — описанный, следовательно, суммы его противоположных сторон равны:

$$AE + FC = EF + AC$$
$$c + a = b + 2b$$
$$a + c = 3b$$

Таким образом,

$$a + b + c = 18$$
$$(a + c) + b = 18$$
$$3b + b = 18$$
$$2b = 9$$

Значит, $AC = 2b = 9$.

б) По условию $\angle ACB = 90^\circ$. Тогда запишем теорему Пифагора для $\triangle ABC$:

$$\begin{gathered} AC^2 + BC^2 = AB^2 \\ 9^2 + 4a^2 = 4c^2 \\ 81 = 4c^2 - 4a^2 \\ 81 = (2c - 2a)(2c + 2a) \end{gathered}$$

В предыдущем пункте мы доказали, что

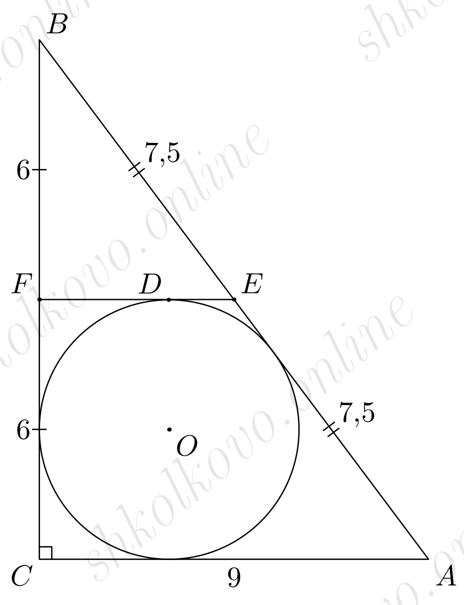
$$a + c = 3b \quad \Rightarrow \quad 2a + 2c = 6b = 27.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} 81 = (2c - 2a)(2c + 2a) \\ 81 = (2c - 2a) \cdot 27 \\ 2c - 2a = 3 \end{gathered}$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a + 2c = 27 \\ 2c - 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a = 12 \\ 2c = 15 \end{cases}$$



Тогда можем найти площадь прямоугольного треугольника ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54.$$

№17.12 *(Дагестан)*

Периметр треугольника ABC равен 24. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $AC = 6$.

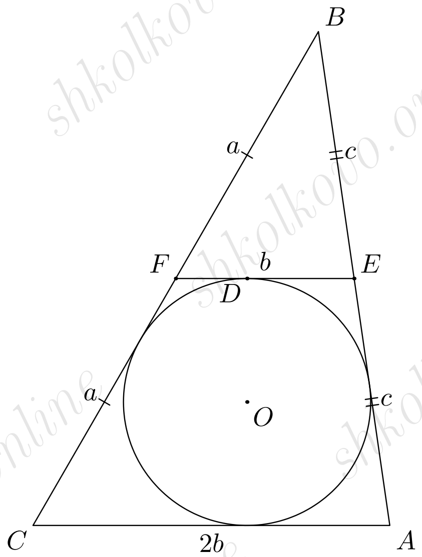
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 90°$.

Ответ

б) 24

Решение

а) Пусть $AB = 2c$, $AC = 2b$ и $BC = 2a$. По условию E — середина AB, поэтому $AE = BE = c$. Также F — середина BC, поэтому $BF = CF = a$. Тогда EF — средняя линия треугольника ABC, параллельная AC, следовательно, $EF = b$.



По условию периметр треугольника ABC равен 24, значит,

$$2a + 2b + 2c = 24$$
$$a + b + c = 12$$

С другой стороны, EF касается вписанной окружности треугольника ABC, поэтому четырехугольник $AEFC$ — описанный, следовательно, суммы его противоположных сторон равны:

$$AE + FC = EF + AC$$
$$c + a = b + 2b$$
$$a + c = 3b$$

Таким образом,

$$a + b + c = 12$$
$$(a + c) + b = 12$$
$$3b + b = 12$$
$$2b = 6$$

Значит, $AC = 2b = 6$.

б) По условию $\angle ACB = 90^\circ$. Тогда запишем теорему Пифагора для $\triangle ABC$:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$
$$6^2 + 4a^2 = 4c^2$$
$$36 = 4c^2 - 4a^2$$
$$36 = (2c - 2a)(2c + 2a)$$

В предыдущем пункте мы доказали, что

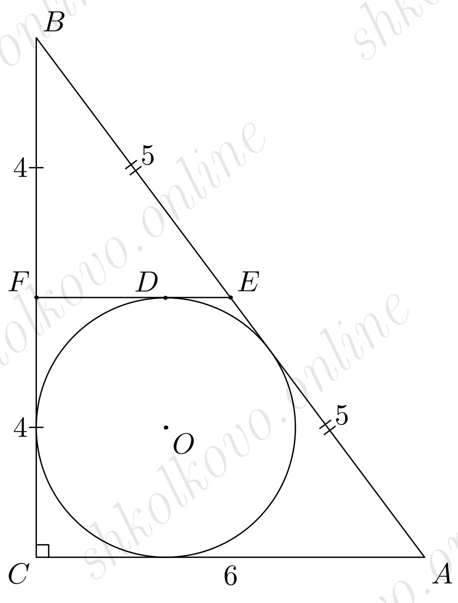
$$a + c = 3b \quad \Rightarrow \quad 2a + 2c = 6b = 18.$$

Следовательно,

$$36 = (2c - 2a)(2c + 2a)$$
$$36 = (2c - 2a) \cdot 18$$
$$2c - 2a = 2$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a + 2c = 18 \\ 2c - 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2c = 10 \end{cases}$$



Тогда можем найти площадь прямоугольного треугольника ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

Задача №18. Параметр

Тип 1

№18.1 *(Дальний восток)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2ay + a - 3 = 0 \\ x|y| + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

$a \in \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

Решение

Рассмотрим второе уравнение системы:

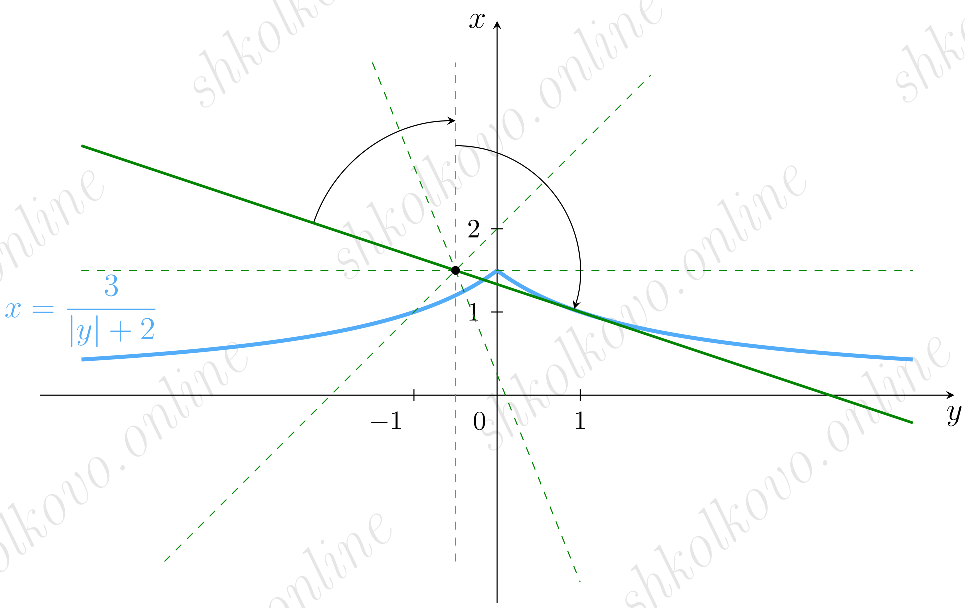
$$x|y| + 2x - 3 = 0$$
$$x\left(|y| + 2\right) = 3$$

Заметим, что $|y| + 2 \geqslant 2$. Тогда

$$x\left(|y| + 2\right) = 3$$
$$2x = \frac{6}{|y| + 2}$$

Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} 2x = -a(2y + 1) + 3 \\ 2x = \dfrac{6}{|y| + 2} \end{cases}$$



Решим задачу графически в системе координат yOx, где y — абсцисса, x — ордината. Тогда первое уравнение задает пучок прямых, проходящих через точку $(-0{,}5; 1{,}5)$. Второе уравнение при $y \geqslant 0$ задает часть гиперболы $x = \dfrac{3}{y+2}$ и при $y < 0$ задает эту же кривую, но отраженную относительно оси Ox.

Нам подходит только одно положение прямой, когда она касается гиперболы $x = \dfrac{3}{y+2}$, при этом $y > 0$. Тогда уравнение

$$\begin{gathered}
\frac{3}{y+2} = -a(y+0{,}5)+1{,}5\\
\frac{6}{y+2} = -a(2y+1)+3\\
6 = -a(2y+1)(y+2)+3y+6\\
a\left(2y^2+5y+2\right)-3y=0\\
2ay^2+y(5a-3)+2a=0
\end{gathered}$$

квадратное и имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$\begin{gathered}
D=0\\
(5a-3)^2-16a^2=0\\
25a^2-30a+9-16a^2=0\\
3a^2-10a+3=0\\
(3a-1)(a-3)=0\\
\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{3}\\ a=3 \end{array}\right.
\end{gathered}$$

При $a=3$ получаем, что

$$\begin{gathered}
6y^2+12y+6=0\\
y^2+2y+1=0\\
(y+1)^2=0\\
y=-1
\end{gathered}$$

Значит, такое значение параметра a нам не подходит.

При $a=\dfrac{1}{3}$ получаем, что

$$\begin{gathered}
\frac{2}{3}y^2-\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}=0\\
y^2-2y+1=0\\
(y-1)^2=0\\
y=1
\end{gathered}$$

Тогда

$$x=\frac{3}{y+2}=\frac{3}{1+2}=1$$

Значит, касание происходит в точке $(1;1)$.

Следовательно, нам подходит только $a \in \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

№18.2 *(Дальний восток)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + ay + a - 2 = 0 \\ x|y| + x - 2 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ

$a \in (-\infty; 0] \cup (0{,}5; +\infty)$

Решение

Рассмотрим второе уравнение системы:

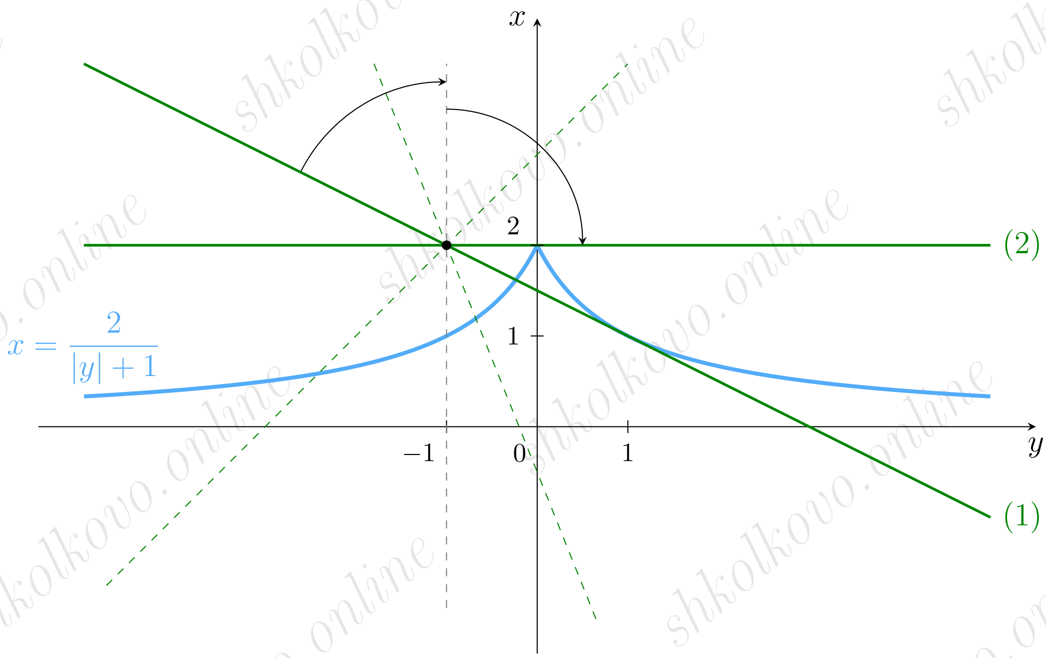
$$x|y| + x - 2 = 0$$
$$x\left(|y| + 1\right) = 2$$

Заметим, что $|y| + 1 \geqslant 1$. Тогда

$$x\left(|y| + 1\right) = 2$$
$$x = \frac{2}{|y| + 1}$$

Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} x = -a(y+1) + 2 \\ x = \dfrac{2}{|y|+1} \end{cases}$$



Решим задачу графически в системе координат yOx, где y — абсцисса, x — ордината. Тогда первое уравнение задает пучок прямых, проходящих через точку $(-1;2)$. Второе уравнение при $y\geqslant 0$ задает часть гиперболы $x=\dfrac{2}{y+1}$ и при $y<0$ задает эту же кривую, но отраженную относительно оси Ox.

Пусть a_1 и a_2 — значения параметра a, соответствующие положениям (1) и (2). Тогда нам подходят $a>a_1$ или $a\leqslant a_2$.

Положение (1): прямая $x=-a_1(y+1)+2$ касается гиперболы $x=\dfrac{2}{y+1}$. Тогда уравнение

$$\frac{2}{y+1}=-a_1(y+1)+2$$
$$2=-a_1(y+1)^2+2y+2$$
$$a_1y^2+2a_1y+a_1-2y=0$$
$$a_1y^2+2y(a_1-1)+a_1=0$$

квадратное и имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D=0$$
$$4(a_1-1)^2-4a_1^2=0$$
$$-2a_1+1=0$$
$$a_1=\frac{1}{2}$$

Положение (2): прямая $x=-a_2(y+1)+2$ горизонтальна, то есть $a_2=0$.

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a\in(-\infty;0]\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Тип 2

№18.3 *(Сибирь)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

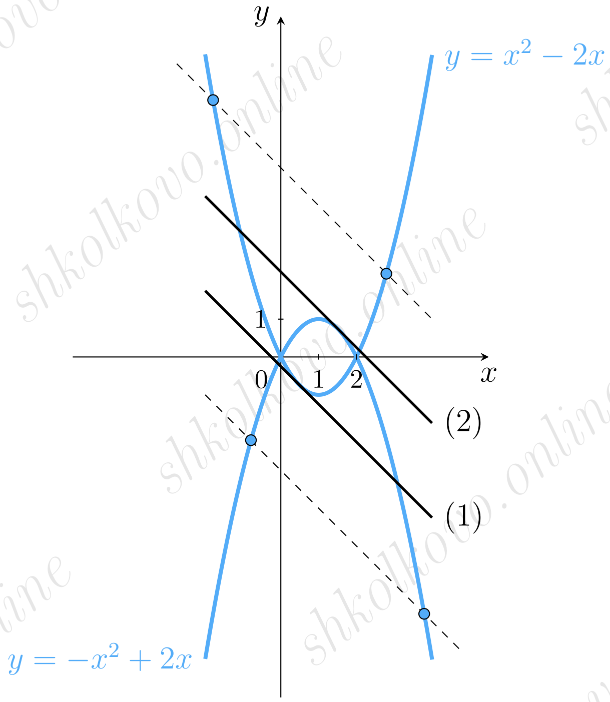
$a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$

Решение

Система из условия равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = -x + a \\ \left[\begin{aligned} & y = x^2 - 2x \\ & y = -x^2 + 2x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением совокупности. Тогда необходимо найти такие a, при которых прямая $y = -x + a$ имеет 2 общие точки со множеством S. Изобразим множество S и ключевые положения прямой $y = -x + a$.



Нам подходят положения прямой $y = -x + a$ ниже положения (1) или выше положения (2).

Положение (1): прямая $y = -x + a_1$ касается параболы $y = x^2 - 2x$. Тогда уравнение

$$x^2 - 2x = -x + a_1$$
$$x^2 - x - a_1 = 0$$

имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D_1 = 0$$
$$1 + 4a_1 = 0$$
$$a_1 = -\frac{1}{4}$$

Положение (2): прямая $y = -x + a_2$ касается параболы $y = -x^2 + 2x$. Тогда уравнение

$$-x^2 + 2x = -x + a_2$$
$$x^2 - 3x + a_2 = 0$$

имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D_2 = 0$$
$$9 - 4a_2 = 0$$
$$a_2 = \frac{9}{4}$$

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right).$$

№18.4 *(Урал)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ |y| = |x^2 - 4x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

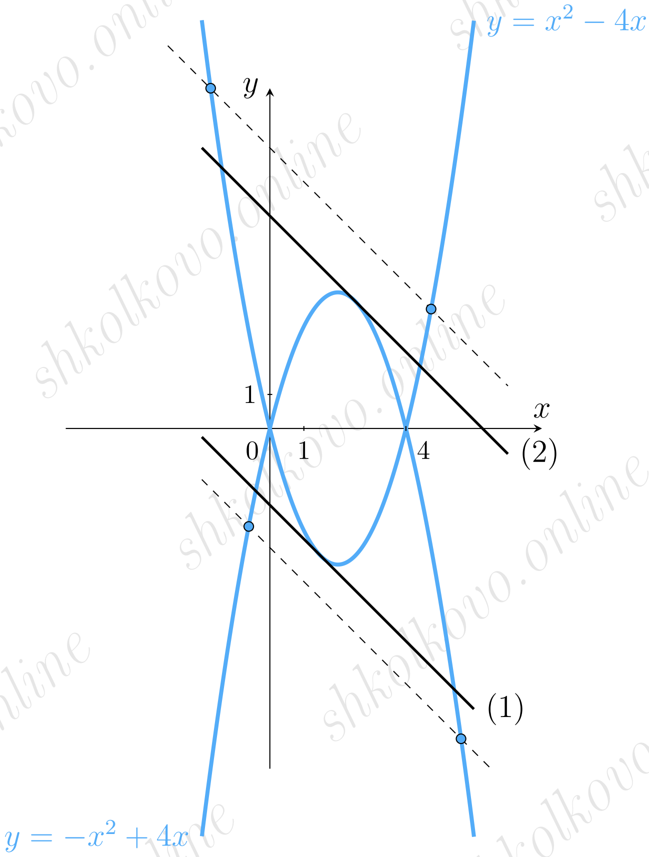
$a \in \left(-\infty; -\dfrac{9}{4}\right) \cup \left(\dfrac{25}{4}; +\infty\right)$

Решение

Система из условия равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = -x + a \\ \left[\begin{aligned} & y = x^2 - 4x \\ & y = -x^2 + 4x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением совокупности. Тогда необходимо найти такие a, при которых прямая $y = -x + a$ имеет 2 общие точки со множеством S. Изобразим множество S и ключевые положения прямой $y = -x + a$.



Нам подходят положения прямой $y = -x + a$ ниже положения (1) или выше положения (2).

Положение (1): прямая $y = -x + a_1$ касается параболы $y = x^2 - 4x$. Тогда уравнение

$$x^2 - 4x = -x + a_1$$
$$x^2 - 3x - a_1 = 0$$

имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D_1 = 0$$
$$9 + 4a_1 = 0$$
$$a_1 = -\frac{9}{4}$$

Положение (2): прямая $y = -x + a_2$ касается параболы $y = -x^2 + 4x$. Тогда уравнение

$$-x^2 + 4x = -x + a_2$$
$$x^2 - 5x + a_2 = 0$$

имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D_2 = 0$$
$$25 - 4a_2 = 0$$
$$a_2 = \frac{25}{4}$$

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{25}{4}; +\infty\right).$$

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№18.5 *(Сибирь)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ |y| = |x^2 + 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

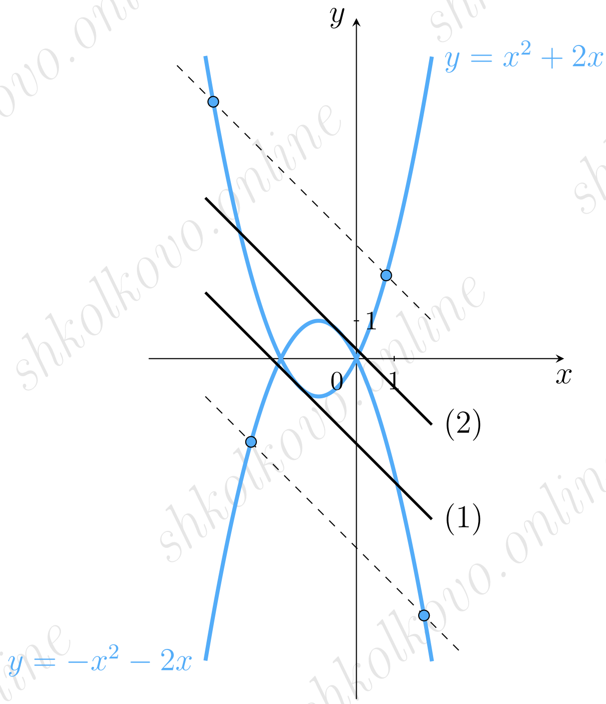
$a \in \left(-\infty; -\dfrac{9}{8}\right) \cup \left(\dfrac{1}{8}; +\infty\right)$

Решение

Система из условия равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = -x + 2a \\ \left[\begin{aligned} &y = x^2 + 2x \\ &y = -x^2 - 2x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением совокупности. Тогда необходимо найти такие a, при которых прямая $y = -x + 2a$ имеет 2 общие точки со множеством S. Изобразим множество S и ключевые положения прямой $y = -x + 2a$.



Нам подходят положения прямой $y = -x + 2a$ ниже положения (1) или выше положения (2).

Положение (1): прямая $y = -x + 2a_1$ касается параболы $y = x^2 + 2x$. Тогда уравнение

$$x^2 + 2x = -x + 2a_1$$
$$x^2 + 3x - 2a_1 = 0$$

имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D_1 = 0$$
$$9 + 8a_1 = 0$$
$$a_1 = -\frac{9}{8}$$

Положение (2): прямая $y = -x + 2a_2$ касается параболы $y = -x^2 - 2x$. Тогда уравнение

$$-x^2 - 2x = -x + 2a_2$$
$$x^2 + x + 2a_2 = 0$$

имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D_2 = 0$$
$$1 - 8a_2 = 0$$
$$a_2 = \frac{1}{8}$$

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in \left(-\infty; -\frac{9}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; +\infty\right).$$

№18.6 *(Сибирь)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ |y| = |x^2 + 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

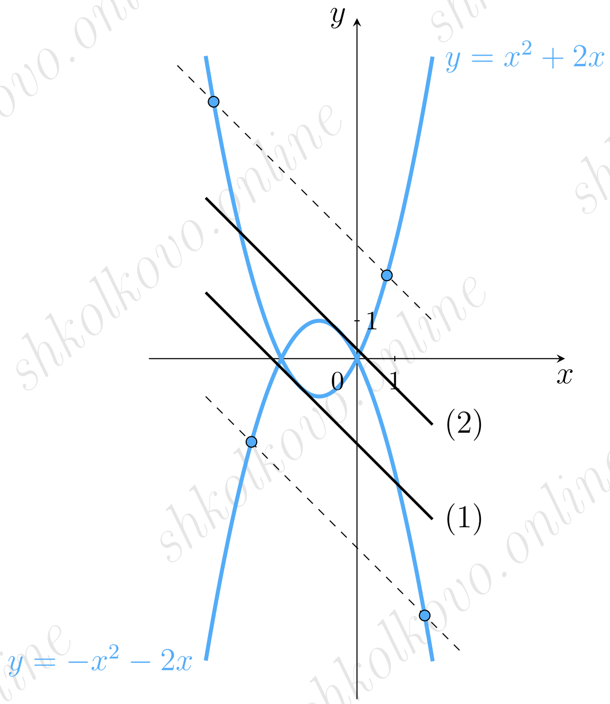
$a \in \left(-\infty; -\dfrac{9}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$

Решение

Система из условия равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = -x + a \\ \left[\begin{aligned} & y = x^2 + 2x \\ & y = -x^2 - 2x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением совокупности. Тогда необходимо найти такие a, при которых прямая $y = -x + a$ имеет 2 общие точки со множеством S. Изобразим множество S и ключевые положения прямой $y = -x + a$.



Нам подходят положения прямой $y = -x + a$ ниже положения (1) или выше положения (2).

Положение (1): прямая $y = -x + a_1$ касается параболы $y = x^2 + 2x$. Тогда уравнение

$$x^2 + 2x = -x + a_1$$
$$x^2 + 3x - a_1 = 0$$

имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D_1 = 0$$
$$9 + 4a_1 = 0$$
$$a_1 = -\frac{9}{4}$$

Положение (2): прямая $y = -x + a_2$ касается параболы $y = -x^2 - 2x$. Тогда уравнение

$$-x^2 - 2x = -x + a_2$$
$$x^2 + x + a_2 = 0$$

имеет один корень, то есть его дискриминант равен нулю:

$$D_2 = 0$$
$$1 - 4a_2 = 0$$
$$a_2 = \frac{1}{4}$$

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

Тип 3

№18.7 *(Татарстан)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a|-1 \\ |y| + x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ

$a \in \left(\dfrac{3}{4}; 1\right) \cup \left(1; \dfrac{5}{4}\right)$

Решение

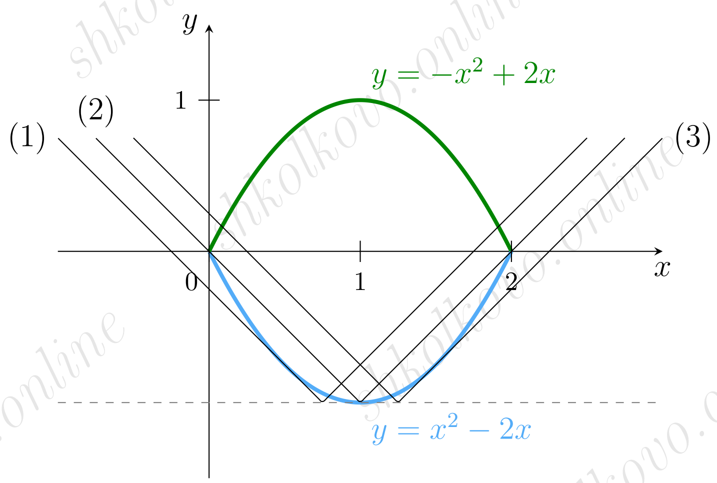
Преобразуем второе уравнение системы:

$$|y| = -x^2 + 2x$$

$$\begin{cases} -x^2+2x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = -x^2+2x \\ y = x^2-2x \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} y = -x^2+2x \\ y = x^2-2x \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением полученной системы. Графиком уравнения $y = |x-a|-1$ является уголок, ветви которого направлены вверх, а вершина имеет координаты $(a; -1)$, то есть скользит по прямой $y = -1$. Нам нужно найти такие a, при которых уголок имеет четыре общие точки со множеством S.



Если a_i — значение параметра, соответствующее положению (i) уголка, то нам подходят $a \in (a_1; a_2) \cup (a_2; a_3)$.

Положение (1): левая ветвь уголка, задаваемая уравнением $y_l = -x + a_1 - 1$, где $x \leqslant a_1$, касается параболы $y = x^2 - 2x$. Тогда уравнение

$$x^2 - 2x = -x + a_1 - 1$$
$$x^2 - x + 1 - a_1 = 0$$

имеет одно решение, следовательно,

$$D = 0$$
$$1 - 4(1 - a_1) = 0$$
$$4a_1 - 3 = 0$$
$$a_1 = \frac{3}{4}$$

Тогда решением уравнения является $x = \dfrac{1}{2}$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a_1 = \dfrac{3}{4}$, причем точка касания имеет координаты $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$. Эта точка принадлежит одновременно множеству S и левой ветви уголка.

Положение (2): вершина уголка совпадает с вершиной параболы $y = x^2 - 2x$:

$$(a_2; -1) = (1; -1)$$
$$a_2 = 1$$

Положение (3): правая ветвь уголка, задаваемая уравнением $y_r = x - a_3 - 1$, где $x \geqslant a_3$, касается параболы $y = x^2 - 2x$. Тогда уравнение

$$x^2 - 2x = x - a_3 - 1$$
$$x^2 - 3x + 1 + a_3 = 0$$

имеет одно решение, следовательно,

$$D = 0$$
$$9 - 4(1 + a_3) = 0$$
$$5 - 4a_3 = 0$$
$$a_3 = \frac{5}{4}$$

Тогда решением уравнение является $x = \dfrac{3}{2}$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a_3 = \dfrac{5}{4}$, причем точка касания имеет координаты $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$. Эта точка принадлежит одновременно множеству S и правой ветви уголка.

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in \left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right).$$

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = \frac{3}{4}$ и/или $a = \frac{5}{4}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№18.8 *(Москва)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4 \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ

$a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$

Решение

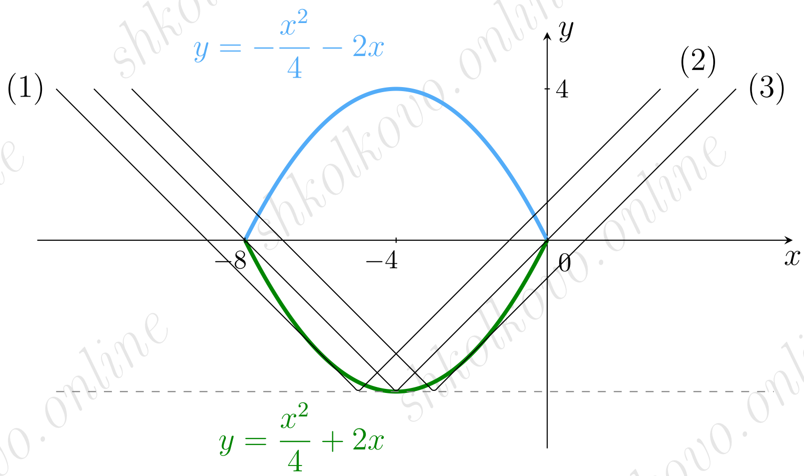
Преобразуем второе уравнение системы:

$$4|y| = -x^2 - 8x$$

$$\begin{cases} -x^2 - 8x \geqslant 0 \\ \left[\begin{aligned} y &= -\dfrac{x^2}{4} - 2x \\ y &= \dfrac{x^2}{4} + 2x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 \leqslant x \leqslant 0 \\ \left[\begin{aligned} y &= -\dfrac{x^2}{4} - 2x \\ y &= \dfrac{x^2}{4} + 2x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением полученной системы. Графиком уравнения $y = |x-a| - 4$ является уголок, ветви которого направлены вверх, а вершина имеет координаты $(a; -4)$, то есть скользит по прямой $y = -4$. Нам нужно найти такие a, при которых уголок имеет четыре общие точки со множеством S.



Если a_i — значение параметра, соответствующее положению (i) уголка, то нам подходят $a \in (a_1; a_2) \cup (a_2; a_3)$.

Положение (1): левая ветвь уголка, задаваемая уравнением $y_l = -x + a_1 - 4$, где $x \leqslant a_1$, касается параболы $y = \dfrac{x^2}{4} + 2x$. Тогда уравнение

$$\frac{x^2}{4} + 2x = -x + a_1 - 4$$
$$\frac{x^2}{4} + 3x + 4 - a_1 = 0$$

имеет одно решение, следовательно,

$$D = 0$$
$$9 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (4 - a_1)$$
$$5 + a_1 = 0$$
$$a_1 = -5$$

Тогда решением уравнения является $x = -6$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a_1 = -5$, причем точка касания имеет координаты $(-6; -3)$. Эта точка принадлежит одновременно множеству S и левой ветви уголка.

Положение (2): вершина уголка совпадает с вершиной параболы $y = \dfrac{x^2}{4} + 2x$:

$$(a_2; -4) = (-4; -4)$$
$$a_2 = -4$$

Положение (3): правая ветвь уголка, задаваемая уравнением $y_r = x - a_3 - 4$, где $x \geqslant a_3$, касается параболы $y = \dfrac{x^2}{4} + 2x$. Тогда уравнение

$$\frac{x^2}{4} + 2x = x - a_3 - 4$$
$$\frac{x^2}{4} + x + a_3 + 4 = 0$$

имеет одно решение, следовательно,

$$D = 0$$
$$1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (a_3 + 4)$$
$$-a_3 - 3 = 0$$
$$a_3 = -3$$

Тогда решением уравнение является $x = -2$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a_3 = -3$, причем точка касания имеет координаты $(-2; -3)$. Эта точка принадлежит одновременно множеству S и правой ветви уголка.

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)\,.$$

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = -5$ и/или $a = -3$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-5; -3)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№18.9 *(Санкт-Петербург)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = -|x-a|+1 \\ |y| + x^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ

$a \in \left(-\dfrac{5}{4}; -1\right) \cup \left(-1; -\dfrac{3}{4}\right)$

Решение

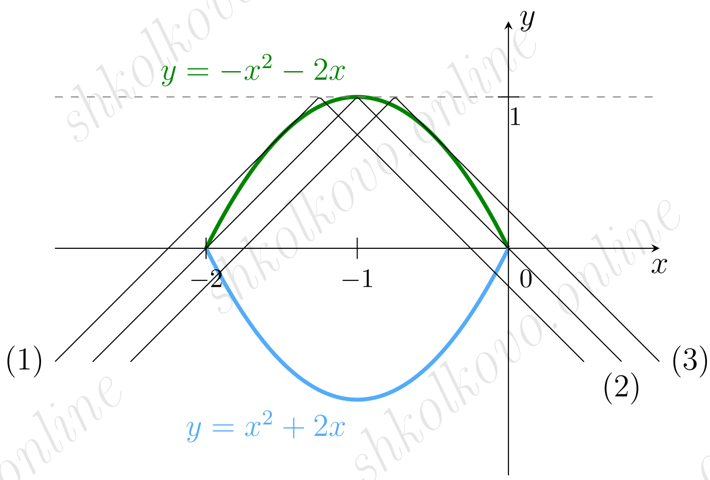
Преобразуем второе уравнение системы:

$$|y| = -x^2 - 2x$$

$$\begin{cases} -x^2 - 2x \geqslant 0 \\ \left[\begin{aligned} &y = -x^2 - 2x \\ &y = x^2 + 2x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \left[\begin{aligned} &y = -x^2 - 2x \\ &y = x^2 + 2x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением полученной системы. Графиком уравнения $y = -|x-a|+1$ является уголок, ветви которого направлены вниз, а вершина имеет координаты $(a; 1)$, то есть скользит по прямой $y = 1$. Нам нужно найти такие a, при которых уголок имеет четыре общие точки со множеством S.



Если a_i — значение параметра, соответствующее положению (i) уголка, то нам подходят $a \in (a_1; a_2) \cup (a_2; a_3)$.

Положение (1): левая ветвь уголка, задаваемая уравнением $y_l = x - a_1 + 1$, где $x \leqslant a_1$, касается параболы $y = -x^2 - 2x$. Тогда уравнение

$$-x^2 - 2x = x - a_1 + 1$$
$$x^2 + 3x + 1 - a_1 = 0$$

имеет одно решение, следовательно,

$$D = 0$$
$$9 - 4(1 - a_1) = 0$$
$$4a_1 + 5 = 0$$
$$a_1 = -\frac{5}{4}$$

Тогда решением уравнения является $x = -\dfrac{3}{2}$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a_1 = -\dfrac{5}{4}$, причем точка касания имеет координаты $\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$. Эта точка принадлежит одновременно множеству S и левой ветви уголка.

Положение (2): вершина уголка совпадает с вершиной параболы $y = -x^2 - 2x$:

$$(a_2; 1) = (-1; 1)$$
$$a_2 = -1$$

Положение (3): правая ветвь уголка, задаваемая уравнением $y_r = -x + a_3 + 1$, где $x \geqslant a_3$, касается параболы $y = -x^2 - 2x$. Тогда уравнение

$$-x^2 - 2x = -x + a_3 + 1$$
$$x^2 + x + 1 + a_3 = 0$$

имеет одно решение, следовательно,

$$D = 0$$
$$1 - 4(1 + a_3) = 0$$
$$3 + 4a_3 = 0$$
$$a_3 = -\frac{3}{4}$$

Тогда решением уравнение является $x = -\dfrac{1}{2}$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a_3 = -\dfrac{3}{4}$, причем точка касания имеет координаты $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$. Эта точка принадлежит одновременно множеству S и правой ветви уголка.

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{3}{4}\right).$$

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = -\frac{5}{4}$ и/или $a = -\frac{3}{4}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Тип 4

№18.10 *(Сибирь)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = 4x + a \\ |y| = x^2 - 2x \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

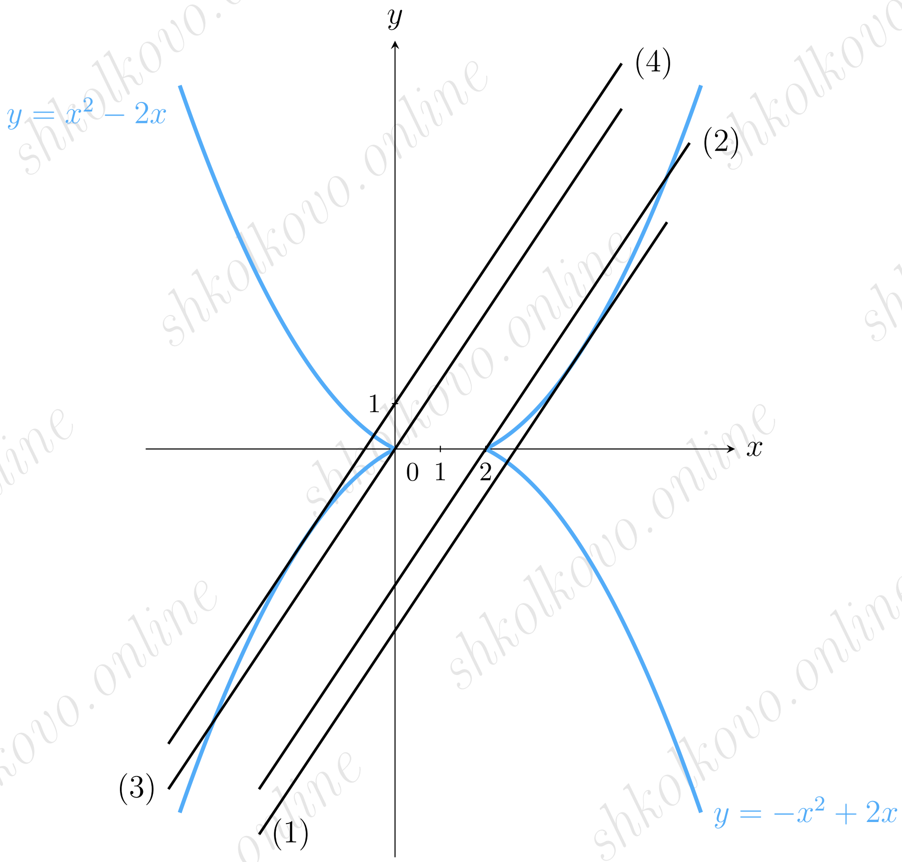
$a \in (-\infty; -9) \cup (-8; 0) \cup (1; +\infty)$

Решение

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} y = 4x + a \\ x^2 - 2x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 2x \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением совокупности при условии $x^2 - 2x \geqslant 0$. Тогда необходимо найти такие a, при которых прямая $y = 4x + a$ имеет 2 общие точки со множеством S. Изобразим множество S и ключевые положения прямой $y = 4x + a$ (обозначим ее за l).



Если a_i — значение параметра, соответствующее положению (i), то нам подходят

$$a \in (-\infty; a_1) \cup (a_2; a_3) \cup (a_4; +\infty).$$

Положение (1): прямая l касается параболы $y = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой больше 2. Тогда уравнение

$$x^2 - 2x = 4x + a_1$$
$$x^2 - 6x + 9 = a_1 + 9$$
$$(x-3)^2 = a_1 + 9$$

имеет единственное решение, если $a_1 + 9 = 0$, то есть $a_1 = -9$. При этом значении параметра получаем, что точкой касания является точка $(3; 3)$.

Положение (2): точка $(2; 0) \in l$, значит,

$$0 = 4 \cdot 2 + a_2$$
$$a_2 = -8$$

Положение (3): точка $(0; 0) \in l$, значит,

$$0 = 4 \cdot 0 + a_3$$
$$a_3 = 0$$

Положение (4): прямая l касается параболы $y = -x^2 + 2x$ в точке с абсциссой меньше 0. Тогда уравнение

$$-x^2 + 2x = 4x + a_4$$
$$x^2 + 2x + 1 = -a_4 + 1$$
$$(x+1)^2 = 1 - a_4$$

имеет единственное решение, если $1 - a_4 = 0$, то есть $a_4 = 1$. При этом значении параметра получаем, что точкой касания является точка $(-1; -3)$.

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in (-\infty; -9) \cup (-8; 0) \cup (1; +\infty).$$

№18.11 *(Урал)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = 4x + a \\ 2|y| = x^2 - 4x \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

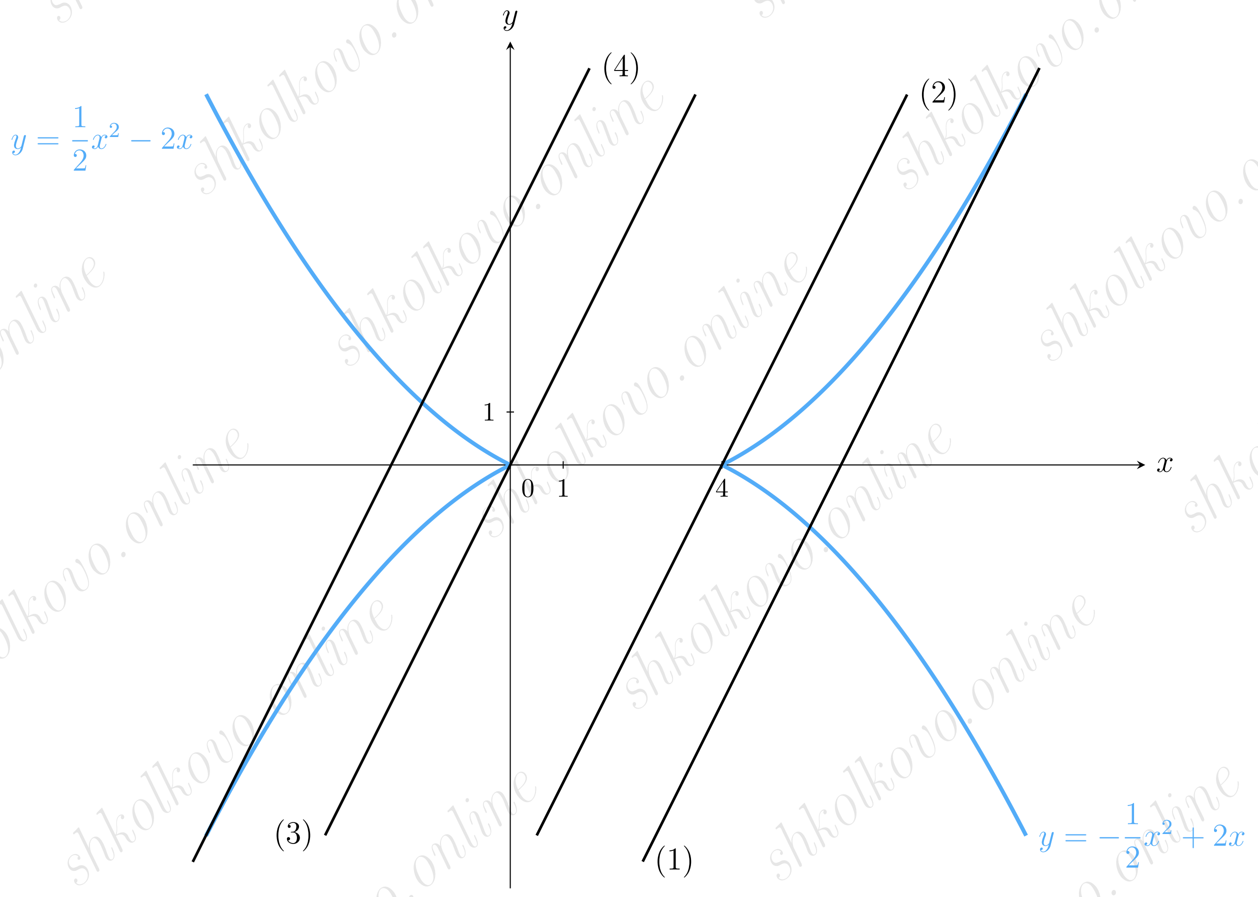
$a \in (-\infty; -18) \cup (-16; 0) \cup (2; +\infty)$

Решение

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} y = 4x + a \\ x^2 - 4x \geqslant 0 \\ \left[\begin{aligned} & y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x \\ & y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Пусть S — множество точек плоскости xOy, являющихся решением совокупности при условии $x^2 - 4x \geqslant 0$. Тогда необходимо найти такие a, при которых прямая $y = 4x + a$ имеет 2 общие точки со множеством S. Изобразим множество S и ключевые положения прямой $y = 4x + a$ (обозначим ее за l).



Если a_i — значение параметра, соответствующее положению (i), то нам подходят

$$a \in (-\infty; a_1) \cup (a_2; a_3) \cup (a_4; +\infty).$$

Положение (1): прямая l касается параболы $y = 0{,}5x^2 - 2x$ в точке с абсциссой больше 4. Тогда уравнение

$$\begin{gathered}
0{,}5x^2 - 2x = 4x + a_1\\
x^2 - 12x = 2a_1\\
x^2 - 12x + 36 = 2a_1 + 36\\
(x-6)^2 = 2a_1 + 36
\end{gathered}$$

имеет единственное решение, если $2a_1 + 36 = 0$, то есть $a_1 = -18$. При этом значении параметра получаем, что точкой касания является точка $(6; 6)$.

Положение (2): точка $(4; 0) \in l$, значит,

$$\begin{gathered}
0 = 4 \cdot 4 + a_2\\
a_2 = -16
\end{gathered}$$

Положение (3): точка $(0; 0) \in l$, значит,

$$\begin{gathered}
0 = 4 \cdot 0 + a_3\\
a_3 = 0
\end{gathered}$$

Положение (4): прямая l касается параболы $y = -0{,}5x^2 + 2x$ в точке с абсциссой меньше 0. Тогда уравнение

$$\begin{gathered}
-0{,}5x^2 + 2x = 4x + a_4\\
x^2 - 4x = -8x - 2a_4\\
x^2 + 4x = -2a_4\\
x^2 + 4x + 4 = 4 - 2a_4\\
(x+2)^2 = 4 - 2a_4
\end{gathered}$$

имеет единственное решение, если $4 - 2a_4 = 0$, то есть $a_4 = 2$. При этом значении параметра получаем, что точкой касания является точка $(-2; -6)$.

Следовательно, нам подходят значения параметра

$$a \in (-\infty; -18) \cup (-16; 0) \cup (2; +\infty).$$

Тип 5

№18.12 *(Центр)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| - 4x - a = 0 \\ x^2 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

$a \in (-9; +\infty)$

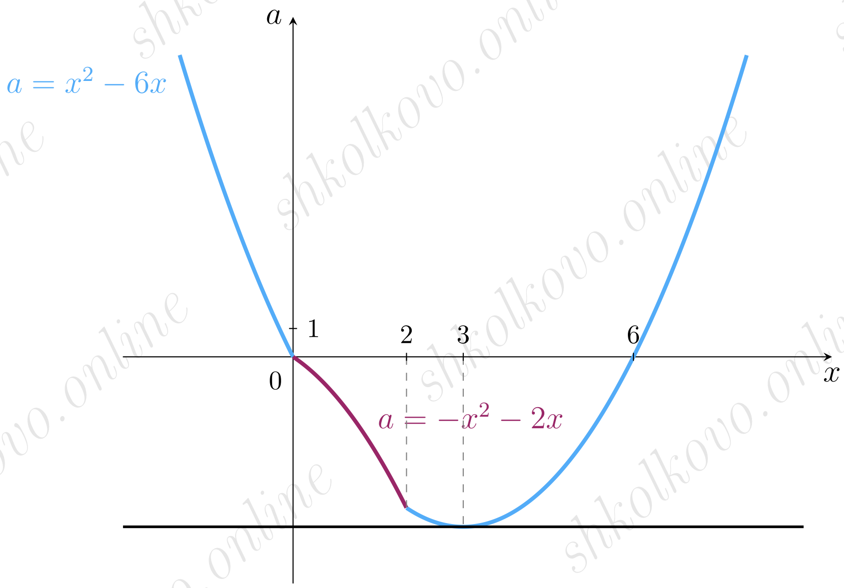
Решение

Исключив y из системы, получим уравнение

$$\left|x^2 - 2x\right| - 4x - a = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 - 2x \geqslant 0 \\ a = x^2 - 6x \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ a = -x^2 - 2x \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений совокупности. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из решений совокупности. Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых ровно две из точек вида $(x_0; a_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, принадлежат множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет ровно две точки пересечения с множеством S.



Видим, что нам подходят все положения горизонтальной прямой $a = a_0$ выше положения, когда горизонтальная прямая проходит через вершину параболы $a = x^2 - 6x$, то есть через точку $(3; -9)$. Следовательно, нам подходят значения параметра $a > -9$.

Тип 6

№18.13 *(Дагестан)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + |x| = a \\ y = \sqrt{x+4} \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Ответ

$a \in (2; 4) \cup \left\{\dfrac{17}{4}\right\}$

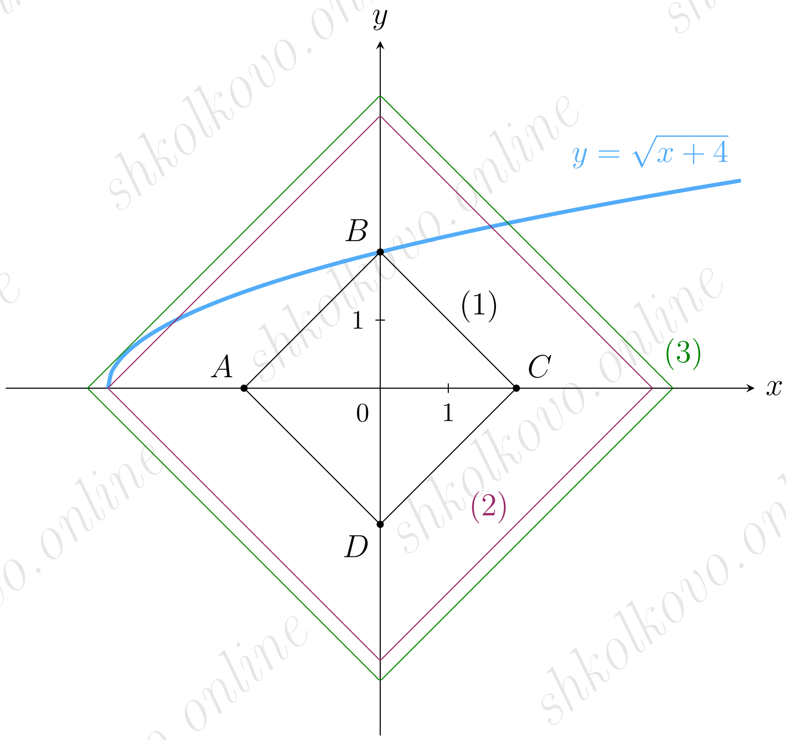
Решение

При $a \leqslant 0$ первое уравнение системы имеет не более одного решения, значит, и вся система тоже имеет не более одного решения. Тогда решим задачу графически при $a > 0$. Исследуем первое уравнение:

$$|y| + |x| = a$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -|x| + a \\ y \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = |x| - a \\ y < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, графиком этого уравнения является квадрат $ABCD$ с вершинами в точках $A(-a; 0)$, $B(0; a)$, $C(a; 0)$, $D(0; -a)$.



Действительно, все стороны четырехугольника равны, значит, это ромб. Сторона AB лежит на прямой $y = x + a$, сторона BC лежит на прямой $y = -x + a$, угол между этими прямыми равен 90°, следовательно, $ABCD$ — квадрат.

Нужно найти такие a, при которых квадрат имеет две общие точки с графиком корня $y = \sqrt{x+4}$.

Пусть a_i — значение параметра, соответствующее положению (i). Тогда нам подходят

$$a \in (a_1; a_2) \cup \{a_3\}.$$

Положение (1): вершина $B(0; a_1)$ находится в точке пересечения графика $y = \sqrt{x+4}$ с осью ординат. Значит,

$$a_1 = \sqrt{0+4}$$
$$a_1 = 2$$

Положение (2): вершина $A(-a; 0)$ находится в точке пересечения графика $y = \sqrt{x+4}$ с осью абсцисс. Значит,

$$0 = \sqrt{-a_2+4}$$
$$a_2 = 4$$

Положение (3): сторона AB касается графика $y = \sqrt{x+4}$. Сторона AB задается уравнением $y = x + a$ при $-a \leqslant x \leqslant 0$. Прямая касается графика корня, если система

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} = x + a_3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} = 1 \end{cases}$$

имеет решения. Значит,

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} = x + a_3 \\ \sqrt{x+4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + a_3 = \dfrac{1}{2} \\ x + 4 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + a_3 = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{15}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{17}{4} \\ x = -\dfrac{15}{4} \end{cases}$$

Тогда
$$y = x + a_3 = -\frac{15}{4} + \frac{17}{4} = \frac{1}{2}.$$

Точка $\left(-\dfrac{15}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$ действительно лежит на отрезке AB, так как её координаты обращают уравнение $y = x + a_3$ в верное равенство и $-a_3 \leqslant x \leqslant 0$. Также она лежит на графике функции $y = \sqrt{x+4}$, так как её координаты обращают это уравнение в верное равенство.

Следовательно, нам подходят значения параметра
$$a \in (2; 4) \cup \left\{\frac{17}{4}\right\}$$

№18.14 *(Дагестан)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + |x| = a \\ y = \sqrt{x+9} \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Ответ

$a \in (3; 9) \cup \left\{\dfrac{37}{4}\right\}$

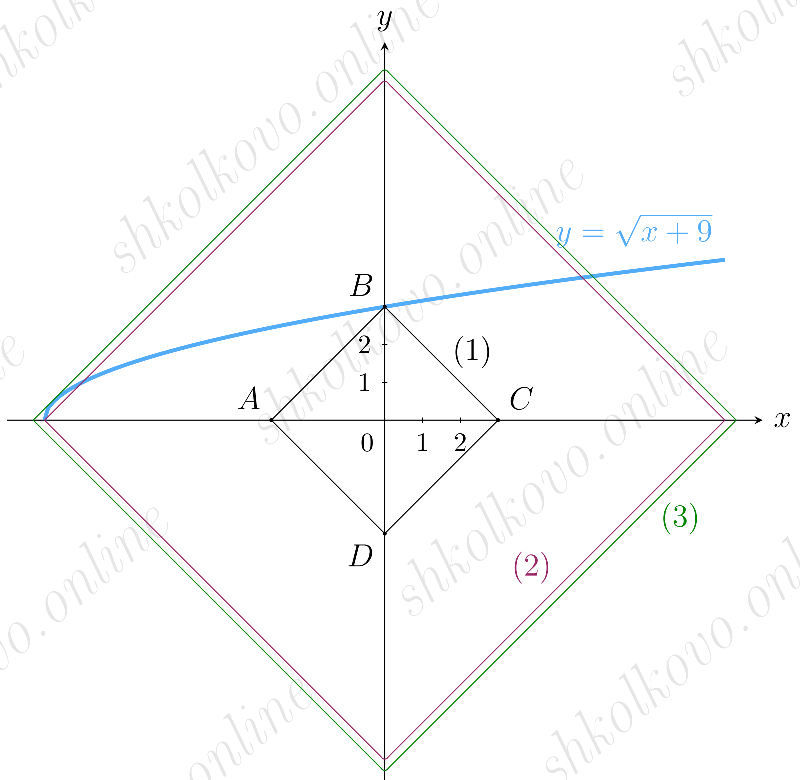
Решение

При $a \leqslant 0$ первое уравнение системы имеет не более одного решения, значит, и вся система тоже имеет не более одного решения. Тогда решим задачу графически при $a > 0$. Исследуем первое уравнение:

$$|y| + |x| = a$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -|x| + a \\ y \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = |x| - a \\ y < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, графиком этого уравнения является квадрат $ABCD$ с вершинами в точках $A(-a; 0)$, $B(0; a)$, $C(a; 0)$, $D(0; -a)$.



Действительно, все стороны четырехугольника равны, значит, это ромб. Сторона AB лежит на прямой $y = x + a$, сторона BC лежит на прямой $y = -x + a$, угол между этими прямыми равен 90°, следовательно, $ABCD$ — квадрат.

Нужно найти такие a, при которых квадрат имеет две общие точки с графиком корня $y = \sqrt{x+9}$.

Пусть a_i — значение параметра, соответствующее положению (i). Тогда нам подходят

$$a \in (a_1; a_2) \cup \{a_3\}.$$

Положение (1): вершина $B(0; a_1)$ находится в точке пересечения графика $y = \sqrt{x+9}$ с осью ординат. Значит,

$$a_1 = \sqrt{0+9}$$
$$a_1 = 3$$

Положение (2): вершина $A(-a_2; 0)$ находится в точке пересечения графика $y = \sqrt{x+9}$ с осью абсцисс. Значит,

$$0 = \sqrt{-a_2+9}$$
$$a_2 = 9$$

Положение (3): сторона AB касается графика $y = \sqrt{x+9}$. Сторона AB задается уравнением $y = x + a$ при $-a \leqslant x \leqslant 0$. Прямая касается графика корня, если система

$$\begin{cases} \sqrt{x+9} = x + a_3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+9}} = 1 \end{cases}$$

имеет решения. Значит,

$$\begin{cases} \sqrt{x+9} = x + a_3 \\ \sqrt{x+9} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + a_3 = \dfrac{1}{2} \\ x + 9 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + a_3 = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{35}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{37}{4} \\ x = -\dfrac{35}{4} \end{cases}$$

Тогда
$$y = x + a_3 = -\frac{35}{4} + \frac{37}{4} = \frac{1}{2}.$$

Точка $\left(-\frac{35}{4}; \frac{1}{2}\right)$ действительно лежит на отрезке AB, так как её координаты обращают уравнение $y = x + a_3$ в верное равенство и $-a_3 \leqslant x \leqslant 0$. Также она лежит на графике функции $y = \sqrt{x+9}$, так как её координаты обращают это уравнение в верное равенство.

Следовательно, нам подходят значения параметра
$$a \in (3; 9) \cup \left\{\frac{37}{4}\right\}$$

Задача №19. Олимпиадная задача

Тип 1

№19.1 *(Дальний восток)*

Есть 4 камня по 5 тонн и 13 камней по 14 тонн.

а) Можно ли разложить камни на 2 группы так, чтобы разность сумм масс камней обеих групп была равна 6 тоннам?

б) Можно ли разложить камни на 2 группы так, чтобы сумма масс камней обеих групп была одинаковой?

в) Какую минимальную разность сумм масс камней можно достичь при разложении камней на 2 группы?

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 4 тонны

Решение

а) Пусть в первой группе 4 камня по 5 тонн и 6 камней по 14 тонн. Тогда масса группы равна

$$4 \cdot 5 + 6 \cdot 14 = 20 + 84 = 104 \text{ тонн}$$

Значит, во второй группе остались только 7 камней по 14 тонн, то есть её масса равна $7 \cdot 14 = 98$ тонн. Тогда разность масс групп равна $104 - 98 = 6$ тонн.

б) Суммарная масса всех камней равна

$$4 \cdot 5 + 13 \cdot 14 = 20 + 182 = 202 \text{ тонны}$$

Значит, если массы групп равны, то они равны 101 тонне.

Пусть в первой группе a камней по 5 тонн и b камней по 14 тонн.

Следовательно, масса первой группы равна $5a+14b = 101$ тонна. Тогда a — нечетное. Значит, в одной из групп 1 камень в 5 тонн, а в другой — 3 камня по 5 тонн. Не умаляя общности, пусть $a = 1$. Тогда $14b = 101 - 5 = 96$. Но 96 не делится нацело на 14.

Значит, массы двух этих групп камней не могут быть равны.

в) Вычислим разность групп, если в первой группе a камней по 5 тонн и b камней по 14 тонн; во второй группе $4 - a$ камней по 5 тонн и $13 - b$ камней по 14 тонн:

$$\begin{aligned} &5a + 14b - ((4-a)\cdot 5 + (13-b)\cdot 14) = \\ &= 5a + 14b - (20 - 5a + 182 - 14b) = \\ &= 10a + 28b - 202 = 2\,(5a + 14b - 101) \end{aligned}$$

Тогда надо найти минимум выражения $2|5a + 14b - 101|$ при $0 \leqslant a \leqslant 4$, $0 \leqslant b \leqslant 13$. Будем перебирать значения a.

- Если $a = 0$, то минимум выражения $2|14b - 101|$ достигается при $b = 7$ и равен 6.
- Если $a = 1$, то минимум выражения $2|14b - 96|$ достигается при $b = 7$ и равен 4.
- Если $a = 2$, то минимум выражения $2|14b - 91|$ достигается при $b = 6$ и равен 14.
- Если $a = 3$, то минимум выражения $2|14b - 86|$ достигается при $b = 6$ и равен 4.
- Если $a = 4$, то минимум выражения $2|14b - 81|$ достигается при $b = 6$ и равен 6.

Таким образом, минимальная разность равна 4 тоннам. Достигается она в случае, если в первой группе 1 камень в 5 тонн и 7 камней по 14 тонн, тогда масса первой группы будет равна 103 тонны. Во второй группе 3 камня по 5 тонн и 6 камней по 14 тонн, а ее масса равна 99 тонн. Тогда их разность равна $103 - 99 = 4$ тонны.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№19.2 *(Забайкалье)*

Есть 4 камня по 3 тонны и 11 камней по 20 тонн.

а) Можно ли разложить камни на 2 группы так, чтобы разность сумм масс камней обеих групп была равна 14 тоннам?

б) Можно ли разложить камни на 2 группы так, чтобы сумма масс камней обеих групп была одинаковой?

в) Какую минимальную разность сумм масс камней можно достичь при разложении камней на 2 группы?

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 8 тонн

Решение

а) Обозначим массу камней в первой группе за x тонн. Тогда масса камней во второй группе равна $x + 14$ тонн. Получаем уравнение на суммарную массу всех камней

$$x + (x + 14) = 4 \cdot 3 + 11 \cdot 20$$
$$2x + 14 = 12 + 220$$
$$2x = 218$$
$$x = 109$$

Массу 109 тонн можно набрать 5 камнями по 20 тонн и 3 камнями по 3 тонны. Тогда остальные камни в сумме дадут $3 + 6 \cdot 20 = 123$ тонны. Тогда разность масс действительно равна $123 - 109 = 14$ тонн.

б) Суммарная масса камней равна

$$4 \cdot 3 + 11 \cdot 20 = 12 + 220 = 232 \text{ тонны}$$

Значит, если массы групп равны, то они равны 116 тоннам.

Пусть в первой группе a камней по 3 тонны и b камней по 20 тонн.

Следовательно, масса первой группы равна $3a + 20b = 116$ тонн. Тогда a — четное. Значит, либо $a = 0$, либо $a = 2$, либо $a = 4$.

- Если $a = 0$, то тогда $20b = 116$. Такое невозможно, так как 116 не делится на 20.
- Если $a = 2$, то тогда $20b = 110$. Такое невозможно, так как 110 не делится на 20.
- Если $a = 4$, то тогда $20b = 104$. Такое невозможно, так как 104 не делится на 20.

Значит, набрать группу, которая весит 116 тонн, нельзя.

в) Всего есть 11 камней по 20 тонн. Значит, в одной из групп точно есть хотя бы 6 таких камней, поэтому ее масса хотя бы 120 тонн. Тогда масса второй группы не более $232 - 120 = 112$ тонн. Значит, разность сумм масс групп будет не менее $120 - 112 = 8$ тонн.

Разность в 8 тонн достигается, если в первой группе 6 камней по 20 тонн, а во второй группе — 4 камня по 3 тонны и 5 камней по 20 тонн. Тогда масса первой группы равна 120 тоннам, а масса второй — 112 тоннам. Разность масс равна $120 - 112 = 8$ тонн.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№19.3 *(Сибирь)*

Есть 4 камня по 7 тонн и 9 камней по 22 тонны.

а) Можно ли разложить камни на 2 группы так, чтобы разность сумм масс камней обеих групп была равна 8 тоннам?

б) Можно ли разложить камни на 2 группы так, чтобы сумма масс камней обеих групп была одинаковой?

в) Какую минимальную разность сумм масс камней можно достичь при разложении камней на 2 группы?

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 6 тонн

Решение

а) Если в первой группе 3 камня по 7 тонн и 4 камня по 22 тонны, то масса группы будет равна $3 \cdot 7 + 4 \cdot 22 = 109$ тонн. Тогда во второй группе 1 камень весом в 7 тонн и 5 камней по 22 тонн, то есть ее масса равна $7 + 5 \cdot 22 = 117$ тонн. Тогда их разность равна $117 - 109 = 8$ тонн.

б) Суммарная масса камней равна

$$4 \cdot 7 + 9 \cdot 22 = 28 + 198 = 226 \text{ тонн}$$

Значит, если массы групп равны, то они равны 113 тоннам.

Пусть в первой группе a камней по 7 тонн и b камней по 22 тонны.

Следовательно, масса первой группы равна $7a + 22b = 113$ тонн. Тогда a — нечетное. Значит, либо $a = 1$, либо $a = 3$.

- Если $a = 1$, то тогда $22b = 106$. Такое невозможно, так как 106 не делится на 22.
- Если $a = 3$, то тогда $20b = 92$. Такое невозможно, так как 92 не делится на 22.

Значит, набрать группу, которая весит 113 тонн, нельзя.

в) Всего есть 9 камней по 22 тонны. Значит, в одной из групп точно есть хотя бы 5 таких камней.

Если в ней ровно 5 камней по 22 тонны, а других камней нет, то масса это группы равна 110 тоннам, а масс второй группы — 116 тоннам. Тогда разность сумм масс групп равна $116 - 110 = 6$ тонн.

Если в ней есть хотя бы 6 камней по 22 тонны, то ее масса не менее 132 тонн, а масс второй группы — не более $4 \cdot 7 + 3 \cdot 22 = 94$ тонн. Тогда разность между ними не менее $132 - 94 = 38$ тонн.

Значит, если разность минимальная, то в одной группе 5 камней по 22 тонны, а во второй — 4 камня по 22 тонны.

Если в группе, где 5 камней по 22 тонны, будут хотя бы 2 камня по 7 тонн, то масса этой группы будет не менее 124 тонн. Тогда масса второй группы не более 102 тонн. Значит, разность между ними не менее $124 - 102 = 22$ тонн.

Случай, когда в группе только 5 камней по 22 тонны, мы разобрали выше, значит, остался случай, когда в этой группе 5 камней по 22 тонны и 1 камень в 7 тонн. Он разобран в пункте а), в нем разность равна 8 тоннам.

Таким образом, минимальная разность равна 6 тоннам. Достигается она в случае, если в первой группе 4 камня по 7 тонн и 4 камня по 22 тонн, тогда масса группы будет равна 116 тонн. Тогда во второй группе 5 камней по 22 тонн, а ее масса равна 110 тонн. Тогда их разность равна $116 - 110 = 6$ тонн.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Тип 2

№19.4 *(Москва)*

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 80 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 20% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40% от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80% от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 50%

Решение

а) Если в порту всего 10 контейнеров массой 20 тонн и 5 контейнеров массой 80 тонн, причём только 3 контейнера массой 80 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет $3 : (10 + 5) \cdot 100\% = 20\%$ от общего количества контейнеров.

Масса контейнеров с сахарным песком равна $3 \cdot 80 = 240$ тонн, масса всех контейнеров равна $10 \cdot 20 + 5 \cdot 80 = 600$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет $240 : 600 \cdot 100\% = 40\%$ от общей массы всех контейнеров.

б) Предположим, что в порту было x контейнеров массой 20 тонн и y контейнеров массой 80 тонн, среди которых с сахарным песком было a контейнеров массой 20 тонн и b контейнеров массой 80 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 80% от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0{,}2(x + y) \\ 20a + 80b = 0{,}8(20x + 80y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = x + y \\ 20a + 80b = 16x + 64y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = x + y \\ 20a + 80b - (80a + 80b) = 16x + 64y - (16x + 16y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = x + y \\ -60a = 48y \end{cases}$$

Поскольку $a \geqslant 0$ и $y \geqslant b \geqslant 0$, то равенство $-60a = 48y$ выполняется только при $a = y = b = 0$.

Из первого уравнения системы следует, что $x = 0$. Получили: $a = b = y = x = 0$, что невозможно.

Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 80% от общей массы контейнеров.

в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наибольшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 80 тонн. Тогда $a = 0$, значит, $5b = x + y$. Нам нужно найти наибольшее значение величины

$$n = \frac{20a + 80b}{20x + 80y} = \frac{4b}{x + 4y} = \frac{4b}{5b + 3y}$$

Наибольшее значение дроби достигается при наименьшей величине знаменателя. Мы знаем, что $y \geqslant b$, поэтому

$$n_{\max} = \frac{4b}{5b + 3b} = \frac{4b}{8b} = 0{,}5$$

Значит, масса контейнеров с сахарным песком может составлять не более 50% от общей массы контейнеров.

Пусть в порту $b = 1$ контейнер массой в 80 тонн, который заполнен сахарным песком и $x = 5b - y = 5b - b = 4$ контейнера массой в 20 тонн, которые заполнены не сахарным песком. Тогда масса контейнеров с сахарным песком составляет

$$\frac{80}{80 + 4 \cdot 20} \cdot 100\% = \frac{80}{160} \cdot 100\% = 50\%$$

от общей массы всех контейнеров.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№19.5 *(Татарстан)*

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 40 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 60% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 50% от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40% от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 75%

Решение

а) Если в порту всего 4 контейнера массой 20 тонн и 1 контейнер массой 40 тонн, причём только 3 контейнера массой 20 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет $3 : (4 + 1) \cdot 100\% = 60\%$ от общего количества контейнеров.

Масса контейнеров с сахарным песком равна $3 \cdot 20 = 60$ тонн, масса всех контейнеров равна $4 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 120$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет $60 : 120 \cdot 100\% = 50\%$ от общей массы всех контейнеров.

б) Предположим, что в порту было x контейнеров массой 20 тонн и y контейнеров массой 40 тонн, среди которых с сахарным песком было a контейнеров массой 20 тонн и b контейнеров массой 40 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 40% от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0{,}6(x + y) \\ 20a + 40b = 0{,}4(20x + 40y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 3x + 3y \\ 20a + 40b = 8x + 16y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 3x + 3y \\ 20a + 40b - (30a + 30b) = 8x + 16y - (18x + 18y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 3x + 3y \\ -10a + 10b = -10x - 2y \end{cases}$$

Из равенства $-10a+10b = -10x-2y$ получаем $10(x-a)+2y+10b = 0$. Поскольку $x \geqslant a \geqslant 0$ и $y \geqslant b \geqslant 0$, то это равенство выполняется только при $x = a$, $y = b = 0$.

Тогда из первого уравнения системы следует, что $5a = 3x$, но тогда $a = b = y = x = 0$, что невозможно.

Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 40% от общей массы контейнеров.

в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наибольшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 40 тонн. Тогда $a = 0$, значит, $5b = 3x + 3y$. Нам нужно найти наибольшее значение величины

$$n = \frac{20a + 40b}{20x + 40y} = \frac{6b}{3x + 6y} = \frac{6b}{5b + 3y}$$

Наибольшее значение дроби достигается при наименьшей величине знаменателя. Мы знаем, что $y \geqslant b$, поэтому

$$n_{\max} = \frac{6b}{5b + 3b} = \frac{6b}{8b} = 0{,}75$$

Значит, масса контейнеров с сахарным песком может составлять не более 75% от общей массы контейнеров.

Пусть в порту $b = 3$ контейнера массой в 40 тонн, которые заполнены сахарным песком, и

$$x = \frac{5b - 3y}{3} = \frac{5b - 3b}{3} = 2$$

контейнера массой в 20 тонн, которые заполнены не сахарным песком. Тогда масса контейнеров с сахарным песком составляет

$$\frac{3 \cdot 40}{3 \cdot 40 + 2 \cdot 20} \cdot 100\% = \frac{120}{160} \cdot 100\% = 75\%$$

от общей массы всех контейнеров.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№19.6 *(Москва)*

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80% от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40% от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 90%

Решение

а) Если в порту всего 2 контейнера массой 20 тонн и 6 контейнеров массой 60 тонн, причём только 1 контейнер массой 20 тонн и 5 контейнеров массой 60 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет $(1+5):(2+6)\cdot 100\% = 75\%$ от общего количества контейнеров.

Масса контейнеров с сахарным песком равна $1\cdot 20+5\cdot 60 = 320$ тонн, масса всех контейнеров равна $2\cdot 20+6\cdot 60 = 400$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет $320:400\cdot 100\% = 80\%$ от общей массы всех контейнеров.

б) Предположим, что в порту было x контейнеров массой 20 тонн и y контейнеров массой 60 тонн, среди которых с сахарным песком было a контейнеров массой 20 тонн и b контейнеров массой 60 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 40% от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a+b = 0{,}75(x+y) \\ 20a+60b = 0{,}4(20x+60y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+4b = 3x+3y \\ 20a+60b = 8x+24y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+4b = 3x+3y \\ 20a+60b-(32a+32b) = 8x+24y-(24x+24y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+4b = 3x+3y \\ -12a+28b = -16x \end{cases}$$

Из равенства $-12a+28b = -16x$ получаем $x+3(x-a)+7b = 0$. Поскольку $x \geqslant a \geqslant 0$ и $y \geqslant b \geqslant 0$, то это равенство выполняется только при $a = x = 0 = b$.

Тогда из первого уравнения системы следует, что и $y = 0$, что невозможно.

Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 40% от общей массы контейнеров.

в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наибольшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 60 тонн. Тогда $a = 0$, значит, $4b = 3x + 3y$. Нам нужно найти наибольшее значение величины

$$n = \frac{20a + 60b}{20x + 60y} = \frac{9b}{3x + 9y} = \frac{9b}{4b + 6y}$$

Наибольшее значение дроби достигается при наименьшей величине знаменателя. Мы знаем, что $y \geqslant b$, поэтому

$$n_{\max} = \frac{9b}{4b + 6b} = \frac{9b}{10b} = 0{,}9$$

Значит, масса контейнеров с сахарным песком может составлять не более 90% от общей массы контейнеров.

Пусть в порту $b = 3$ контейнера массой в 60 тонн, которые заполнены сахарным песком, и

$$x = \frac{4b - 3y}{3} = \frac{4b - 3b}{3} = 1$$

контейнер массой в 20 тонн, который заполнен не сахарным песком. Тогда масса контейнеров с сахарным песком составляет

$$\frac{3 \cdot 60}{3 \cdot 60 + 1 \cdot 20} \cdot 100\% = \frac{180}{200} \cdot 100\% = 90\%$$

от общей массы всех контейнеров.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№19.7 *(Санкт-Петербург)*

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 40 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 40% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 36% от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 60% от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 50%

Решение

а) Если в порту всего 5 контейнеров массой 40 тонн и 5 контейнеров массой 60 тонн, причём только 3 контейнера массой 40 тонн и 1 контейнер массой 60 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет $(1+3) : (5+5) \cdot 100\% = 40\%$ от общего количества контейнеров.

Масса контейнеров с сахарным песком равна $3 \cdot 40 + 1 \cdot 60 = 180$ тонн, масса всех контейнеров равна $5 \cdot 40 + 5 \cdot 60 = 500$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет $180 : 500 \cdot 100\% = 36\%$ от общей массы всех контейнеров.

б) Предположим, что в порту было x контейнеров массой 40 тонн и y контейнеров массой 60 тонн, среди которых с сахарным песком было a контейнеров массой 40 тонн и b контейнеров массой 60 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 60% от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0{,}4(x + y) \\ 40a + 60b = 0{,}6(40x + 60y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 2x + 2y \\ 40a + 60b = 24x + 36y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 2x + 2y \\ 40a + 60b - (60a + 60b) = 24x + 36y - (24x + 24y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 2x + 2y \\ -20a = 12y \end{cases}$$

Поскольку $a \geqslant 0$ и $y \geqslant b \geqslant 0$, то равенство $-20a = 12y$ выполняется только при $a = y = b = 0$. Из первого уравнения системы следует, что $x = 0$. Получили: $a = b = y = x = 0$, что невозможно.

Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 60% от общей массы контейнеров.

в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наибольшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 60 тонн. Тогда $a = 0$, значит, $5b = 2x + 2y$. Нам нужно найти наибольшее значение величины

$$n = \frac{40a + 60b}{40x + 60y} = \frac{3b}{2x + 3y} = \frac{3b}{5b + y}$$

Наибольшее значение дроби достигается при наименьшей величине знаменателя. Мы знаем, что $y \geqslant b$, поэтому

$$n_{\max} = \frac{3b}{5b + b} = \frac{3b}{6b} = 0{,}5$$

Значит, масса контейнеров с сахарным песком может составлять не более 50% от общей массы контейнеров.

Пусть в порту $b = 2$ контейнера массой в 60 тонн, которые заполнены сахарным песком, и

$$x = \frac{5b - 2y}{2} = \frac{5b - 2b}{2} = 3$$

контейнера массой в 40 тонн, которые заполнены не сахарным песком. Тогда масса контейнеров с сахарным песком составляет

$$\frac{2 \cdot 60}{3 \cdot 40 + 2 \cdot 60} \cdot 100\% = \frac{120}{240} \cdot 100\% = 50\%$$

от общей массы всех контейнеров.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Тип 3

№19.8 *(Санкт-Петербург)*

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 25% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 20% от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 60% от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наименьшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 10%

Решение

а) Если в порту всего 7 контейнеров массой 20 тонн и 1 контейнер массой 60 тонн, причём только 2 контейнера массой 20 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет $2 : (7+1) \cdot 100\% = 25\%$ от общего количества контейнеров.

Масса контейнеров с сахарным песком равна $2 \cdot 20 = 40$ тонн, масса всех контейнеров равна $7 \cdot 20 + 1 \cdot 60 = 200$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет $40 : 200 \cdot 100\% = 20\%$ от общей массы всех контейнеров.

б) Предположим, что в порту было x контейнеров массой 20 тонн и y контейнеров массой 60 тонн, среди которых с сахарным песком было a контейнеров массой 20 тонн и b контейнеров массой 60 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 60% от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0{,}25(x+y) \\ 20a + 60b = 0{,}6(20x + 60y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 4b = x + y \\ 20a + 60b = 12x + 36y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 4b = x + y \\ 5a + 15b = 3x + 9y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 4b = x + y \\ -3a + 7b = x + 7y \end{cases}$$

Из равенства $-3a + 7b = x + 7y$ получаем $7(y-b) + x + 3a = 0$. Поскольку $x \geqslant a \geqslant 0$ и $y \geqslant b \geqslant 0$, то это равенство выполняется только при $y = b$, $x = a = 0$.

Тогда из первого уравнения системы следует, что $4b = y$, но тогда $a = b = y = x = 0$, что невозможно.

Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 60% от общей массы контейнеров.

в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наименьшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 20 тонн. Тогда $b = 0$, значит, $4a = x + y$. Нам нужно найти наименьшее значение величины

$$n = \frac{20a + 60b}{20x + 60y} = \frac{a}{x + 3y} = \frac{a}{12a - 2x}$$

Наименьшее значение дроби достигается при наибольшей величине знаменателя, то есть когда x — наименьшее. Мы знаем, что $x \geqslant a$, поэтому

$$n_{\min} = \frac{a}{12a - 2a} = \frac{a}{10a} = 0{,}1$$

Значит, масса контейнеров с сахарным песком может составлять не менее 10% от общей массы контейнеров.

Пусть в порту $a = 1$ контейнер массой в 20 тонн, который заполнен сахарным песком, и $y = 4a - x = 4a - a = 3$ контейнера массой в 60 тонн, которые заполнены не сахарным песком. Тогда масса контейнеров с сахарным песком составляет

$$\frac{20}{20 + 3 \cdot 60} \cdot 100\% = \frac{20}{200} \cdot 100\% = 10\%$$

от общей массы всех контейнеров.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№19.9 *(Сибирь)*

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 40 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 40% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 50% от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 60% от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наименьшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 25%

Решение

а) Если в порту всего 4 контейнера массой 20 тонн и 1 контейнер массой 40 тонн, причём только 1 контейнер массой 20 тонн и 1 контейнер массой 40 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет $2 : (4+1) \cdot 100\% = 40\%$ от общего количества контейнеров.

Масса контейнеров с сахарным песком равна $20 + 40 = 60$ тонн, масса всех контейнеров равна $4 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 120$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет $60 : 120 \cdot 100\% = 50\%$ от общей массы всех контейнеров.

б) Предположим, что в порту было x контейнеров массой 20 тонн и y контейнеров массой 40 тонн, среди которых с сахарным песком было a контейнеров массой 20 тонн и b контейнеров массой 40 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 60% от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0{,}4(x+y) \\ 20a + 40b = 0{,}6(20x + 40y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 2x + 2y \\ 20a + 40b = 12x + 24y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 2x + 2y \\ 20a + 40b - (30a + 30b) = 12x + 24y - (12x + 12y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 5b = 2x + 2y \\ -10a + 10b = 12y \end{cases}$$

Из равенства $-10a + 10b = 12y$ получаем $2y + 10(y - b) + 10a = 0$. Поскольку $x \geqslant a \geqslant 0$ и $y \geqslant b \geqslant 0$, то это равенство выполняется только при $b = y = 0$, $a = 0$.

Тогда из первого уравнения системы следует, что и $x = 0$, что невозможно.

Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 60% от общей массы контейнеров.

в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наименьшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 20 тонн. Тогда $b = 0$, значит, $5a = 2x + 2y$. Нам нужно найти наименьшее значение величины

$$n = \frac{20a + 40b}{20x + 40y} = \frac{a}{x + 2y} = \frac{a}{5a - x}$$

Наименьшее значение дроби достигается при наибольшей величине знаменателя, то есть когда x — наименьшее. Мы знаем, что $x \geqslant a$, поэтому

$$n_{\min} = \frac{a}{5a - a} = \frac{a}{4a} = 0{,}25$$

Значит, масса контейнеров с сахарным песком может составлять не менее 25% от общей массы контейнеров.

Пусть в порту $a = 2$ контейнера массой в 20 тонн, которые заполнены сахарным песком, и

$$y = \frac{5a - 2x}{2} = \frac{5a - 2a}{2} = 3$$

контейнера массой в 40 тонн, которые заполнены не сахарным песком. Тогда масса контейнеров с сахарным песком составляет

$$\frac{2 \cdot 20}{2 \cdot 20 + 3 \cdot 40} \cdot 100\% = \frac{40}{160} \cdot 100\% = 25\%$$

от общей массы всех контейнеров.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Тип 4

№19.10 *(Саратов)*

Есть 16 монеток по 2 рубля и 29 монеток по 5 рублей.

а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 175 рублям?

б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 176 рублям?

в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 180 включительно?

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 3

Решение

а) Возьмём 15 монеток по 2 рубля и 29 монеток по 5 рублей. Тогда сумма взятых монет равна

$$15 \cdot 2 + 29 \cdot 5 = 30 + 145 = 175 \text{ рублей.}$$

б) Так как нам нужна чётная сумма монет, то мы можем взять только чётное число монеток по 5 рублей, то есть не более 28 таких монеток. Тогда оценим максимальную сумму, которую можно взять:

$$28 \cdot 5 + 16 \cdot 2 = 140 + 32 = 172 < 176.$$

Значит, 176 рублей набрать нельзя.

в) Сумма монеток в изначальном наборе равна

$$29 \cdot 5 + 16 \cdot 2 = 145 + 32 = 177 \text{ руб.}$$

Значит, чтобы получить 180 рублей, необходимо добавить хотя бы 3 монетки по 1 рублю.

Покажем, что 3 монеток по 1 рублю достаточно. Сначала научимся собирать любую сумму от 1 до 35 рублей монетками по 1 и 2 рубля:

- Если нужно набрать четное число до 32 включительно, то можно получить его монетками по 2 рубля.
- Если нужно набрать 34, то его можно получить из 16 монеток по 2 рубля и двух монеток по 1 рублю.
- Если нужно набрать нечетное число, то сначала возьмём монетку в 1 рубль. Тогда останется добрать четную сумму от 0 до 34 включительно. Её мы умеем собирать, используя не более двух монеток по 1 рублю.

Теперь научимся собирать любое число от 36 до 180.

Для любого числа из этого промежутка будем сначала брать монетки по 5 рублей, пока не останется необходимая сумма в пределах от 0 до 35 рублей, которую мы умеем собирать из монеток по 1 и 2 рубля.

Заметим, что монетами по 5 рублей мы можем собрать любое кратное 5 число от 5 до $5 \cdot 29 = 145$. Тогда любую сумму от 36 до 180 можно уменьшить хотя бы до 35 рублей, так как $180 - 145 = 35$.

Таким образом, мы сможем собрать любую целую сумму от 1 до 180 рублей включительно.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№19.11 *(Астрахань)*

Есть 24 монетки по 2 рубля и 30 монеток по 5 рублей.

а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 196 рублей?

б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 197 рублей?

в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 200 включительно?

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 2

Решение

а) Возьмём 23 монетки по 2 рубля и 30 монеток по 5 рублей. Тогда сумма взятых монет равна

$$23 \cdot 2 + 30 \cdot 5 = 46 + 150 = 196 \text{ рублей.}$$

б) Так как нам нужна нечётная сумма монет, то мы можем взять только нечётное число монеток по 5 рублей, то есть не более 29 таких монеток. Тогда оценим максимальную сумму, которую можно взять:

$$29 \cdot 5 + 24 \cdot 2 = 145 + 48 = 193 < 197.$$

Значит, 197 рублей набрать нельзя.

в) Сумма монеток в изначальном наборе равна

$$30 \cdot 5 + 24 \cdot 2 = 150 + 48 = 198 \text{ руб.}$$

Значит, чтобы получить 200 рублей, необходимо добавить хотя бы 2 монетки по 1 рублю.

Покажем, что 2 монеток по 1 рублю достаточно. Сначала научимся собирать любую сумму от 1 до 50 рублей монетками по 1 и 2 рубля:

- Если нужно набрать четное число до 48 включительно, то можно получить его монетками по 2 рубля.
- Если нужно набрать 50, то его можно получить из 24 монеток по 2 рубля и двух монеток по 1 рублю.
- Если нужно набрать нечетное число, то сначала возьмём монетку в 1 рубль. Тогда останется добрать четную сумму от 0 до 48 включительно. Её мы умеем собирать, используя только монетки по 2 рубля.

Теперь научимся собирать любое число от 51 до 200.

Для любого числа из этого промежутка будем сначала брать монетки по 5 рублей, пока не останется необходимая сумма в пределах от 0 до 50 рублей, которую мы умеем собирать из монеток по 1 и 2 рубля.

Заметим, что монетами по 5 рублей мы можем собрать любое кратное 5 число от 5 до $5 \cdot 30 = 150$. Тогда любую сумму от 51 до 200 можно уменьшить хотя бы до 50 рублей, так как $200 - 150 = 50$.

Таким образом, мы сможем собрать любую целую сумму от 1 до 200 рублей включительно.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№19.12 *(Центр)*

Есть 28 монеток по 2 рубля и 20 монеток по 5 рублей.

а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 154 рубля?

б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 155 рублей?

в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 160 включительно?

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 4

Решение

а) Возьмём 27 монеток по 2 рубля и 20 монеток по 5 рублей. Тогда сумма взятых монет равна

$$27 \cdot 2 + 20 \cdot 5 = 54 + 100 = 154 \text{ рубля.}$$

б) Так как нам нужна нечётная сумма монет, то мы можем взять только нечётное число монеток по 5 рублей, то есть не более 19 таких монеток. Тогда оценим максимальную сумму, которую можно взять:

$$19 \cdot 5 + 28 \cdot 2 = 95 + 56 = 151 < 155.$$

Значит, 155 рублей набрать нельзя.

в) Сумма монеток в изначальном наборе равна

$$20 \cdot 5 + 28 \cdot 2 = 100 + 56 = 156 \text{ руб.}$$

Значит, чтобы получить 160 рублей, необходимо добавить хотя бы 4 монетки по 1 рублю.

Покажем, что 4 монеток по 1 рублю достаточно. Сначала научимся собирать любую сумму от 1 до 60 рублей монетками по 1 и 2 рубля:

- Если нужно набрать четное число до 56 включительно, то можно получить его монетками по 2 рубля.
- Если нужно набрать 58, то его можно получить из 28 монеток по 2 рубля и двух монеток по 1 рублю.
- Если нужно набрать 60, то его можно получить из 28 монеток по 2 рубля и четырех монеток по 1 рублю.
- Если нужно набрать нечетное число, то сначала возьмём монетку в 1 рубль. Тогда останется добрать четную сумму от 0 до 58 включительно. Её мы умеем собирать, используя только монетки по 2 рубля и не более 2 монеток по 1 рублю.

Теперь научимся собирать любое число от 61 до 160.

Для любого числа из этого промежутка будем сначала брать монетки по 5 рублей, пока не останется необходимая сумма в пределах от 0 до 60 рублей, которую мы умеем собирать из монеток по 1 и 2 рубля.

Заметим, что монетами по 5 рублей мы можем собрать любое кратное 5 число от 5 до $5 \cdot 20 = 100$. Тогда любую сумму от 61 до 160 можно уменьшить хотя бы до 60 рублей, так как $160 - 100 = 60$.

Таким образом, мы сможем собрать любую целую сумму от 1 до 160 рублей включительно.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Тип 5

№19.13 *(Дагестан)*

Над парами целых чисел проводится операция: из пары $(a;b)$ получается пара $(3a+b;3b-a)$.

а) Можно ли из какой-то пары получить пару $(5;5)$?

б) Верно ли, что если пара $(c;d)$ может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции, то и пара $(-d;c)$ тоже может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции?

в) Зададим расстояние между парами целых чисел $(a;b)$ и $(c;d)$ выражением $|a-c|+|b-d|$. Найдите наименьшее расстояние от пары $(9;2)$ до пары, полученной из какой-то пары с помощью данной операции.

Ответ

а) Да, можно

б) Да, верно

в) 3

Решение

а) Пусть пара $(5;5)$ получена из пары $(a;b)$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} 5=3a+b \\ 5=3b-a \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

Поэтому пару $(5;5)$ можно получить из пары $(1;2)$ за одну операцию.

б) Пусть пара $(c;d)$ получена из некоторой пары $(a;b)$. Тогда

$$\begin{cases} c=3a+b \\ d=3b-a \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} -d=a-3b \\ c=3a+b \end{cases}$$

В случае, если предполагается, что эта пара $(-d;c)$ может получиться из некоторой пары целых чисел $(m;n)$, то верна следующая система:

$$\begin{cases} a-3b=3m+n \\ 3a+b=3n-m \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} m=-b \\ n=a \end{cases}$$

Тогда пара $(c;d)$ получена следующим образом:

$$(a;b) \longrightarrow \big(3a+b;3b-a\big)=(c;d)$$

При этом пара $(-d;c)$ получена следующим образом:

$$(-b;a) \longrightarrow \big(3(-b)+a;3a-(-b)\big)=\big(-(3b-a);3a+b\big)=(-d;c)$$

в) Пусть пара, расстояние до которой нужно минимизировать, получена из пары $(m;n)$.

Тогда нужно найти наименьшее из расстояний между парами $(9;2)$ и $(3m+n;3n-m)$, которые будут иметь вид:

$$|9-3m-n|+|2-3n+m|.$$

Заметим, что числа $3m+n$ и $3n-m$ имеют одну четность:

m	n	$3m+n$	$3n-m$
чёт	чёт	чёт	чёт
чёт	неч	неч	неч
неч	чёт	неч	неч
неч	неч	чёт	чёт

Значит, числа $|9-3m-n|$ и $|2-3n+m|$ имеют разную чётность, поэтому расстояние между $(9;2)$ и $(3m+n;3n-m)$ нечётно, то есть не меньше 1.

Предположим, что минимальное расстояние равно 1, тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|9-3m-n|=0\\|2-3n+m|=1\end{cases}\\ \begin{cases}|9-3m-n|=1\\|2-3n+m|=0\end{cases}\end{array}\right.$$

- Решим первую систему:

$$\begin{cases}|9-3m-n|=0\\|2-3n+m|=1\end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что

$$|9-3m-n|=0$$
$$9-3m-n=0$$
$$n=9-3m$$

Тогда

$$|2-3n+m|=1$$
$$|2-3(9-3m)+m|=1$$
$$|2-27+9m+m|=1$$
$$|10m-25|=1$$

Заметим, что $|10m-25|$ делится на 5, а 1 — нет. Значит, первая система уравнений не имеет решений.

- Решим вторую систему:

$$\begin{cases} |9-3m-n|=1 \\ |2-3n+m|=0 \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем, что

$$|2-3n+m|=0$$
$$2-3n+m=0$$
$$m=3n-2$$

Тогда

$$|9-3m-n|=1$$
$$|9-3(3n-2)-n|=1$$
$$|9-9n+6-n|=1$$
$$|15-10n|=1$$

Заметим, что $|15-10n|$ делится на 5, а 1 — нет. Значит, вторая система уравнений тоже не имеет решений.

Таким образом, расстояние 1 между парами $(9;2)$ и $(3m+n;3n-m)$ недостижимо.

Для следующего нечётного числа в качестве расстояния есть пример. Если $m=3$, $n=1$, то $(3m+n;3n-m)=(10;0)$. Тогда расстояние между парой $(9;2)$ и парой $(10;0)$, полученной из пары $(3;1)$, будет равно

$$|9-10|+|2-0|=3.$$