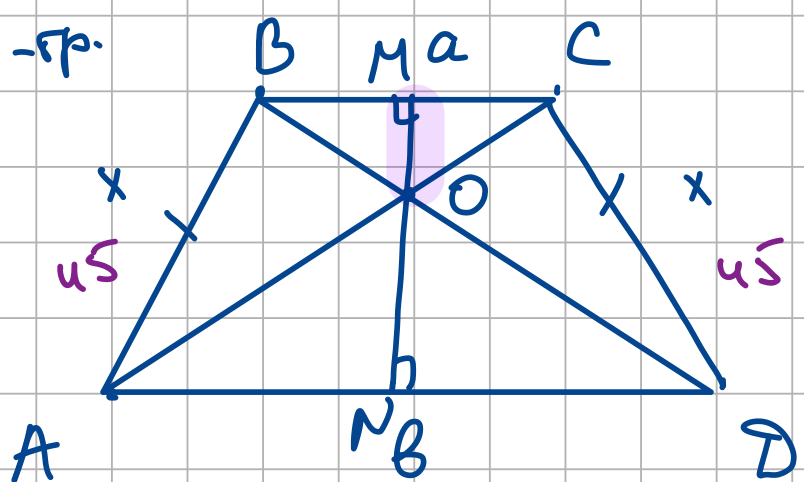
Задача №25. Веб 2. Связки в подобии

1 В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 180 , а площадь равна 1620 , можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

ABCD - тр.



$P = 180$

$S = 1620$

$\left(S = \frac{a+b}{2} \cdot h \right)$

① пусть $BC = a$; $AD = b$

$AB = CD = x$ (т.к. р/б трап)

② Т.к. в трап. можно впис окр (по усл), то

$BC + AD = AB + CD$; $a + b = 2x$

③ $P = AB + BC + CD + AD$ $(P = 180)$

$x + a + x + b = 180$

$\underbrace{a+b}_{2x} + 2x = 180$

(из п.2)

$4x = 180 \Rightarrow x = 45$

$a + b = 90$

(4) пров. вис. трап. MN $\perp$, прох. ч/з т. O

$O = AC \cap BD$

$h = MN$

$$S = \frac{BC+AD}{2} \cdot MN = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad (S = 1620)$$

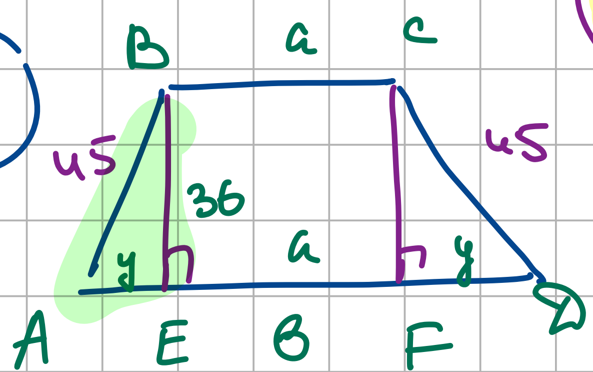
$$\frac{a+b}{2} \cdot h = 1620$$

$$\frac{90}{2} \cdot h = 1620; \quad 45h = 1620 \Rightarrow h = 36$$

!!! Самый неочевидный шаг

$$\boxed{a+b = 90}$$

(5)



пров. BE и CF – вис. трап.

EBCF – п/уг (и пр. $\angle$)

$BC = EF = a$

$\triangle ABE = \triangle DCF$ по гип. и остр. $\angle$

($\angle A = \angle D$ – как 2 при осн. р/б тр)

$AB = CD$, т.к. р/б трап

$\Downarrow$ $AE = FD = y$

$a + b = 90$

$a + \underbrace{y + a + y}_{b} = 90$

$2a + 2y = 90$

$a + y = 45$

$a + 27 = 45$

$\boxed{a = 18}$

$b = 90 - 18 = 72$

Δ ABE – п/уг

пиф.!

$AB^2 = BE^2 + AE^2$

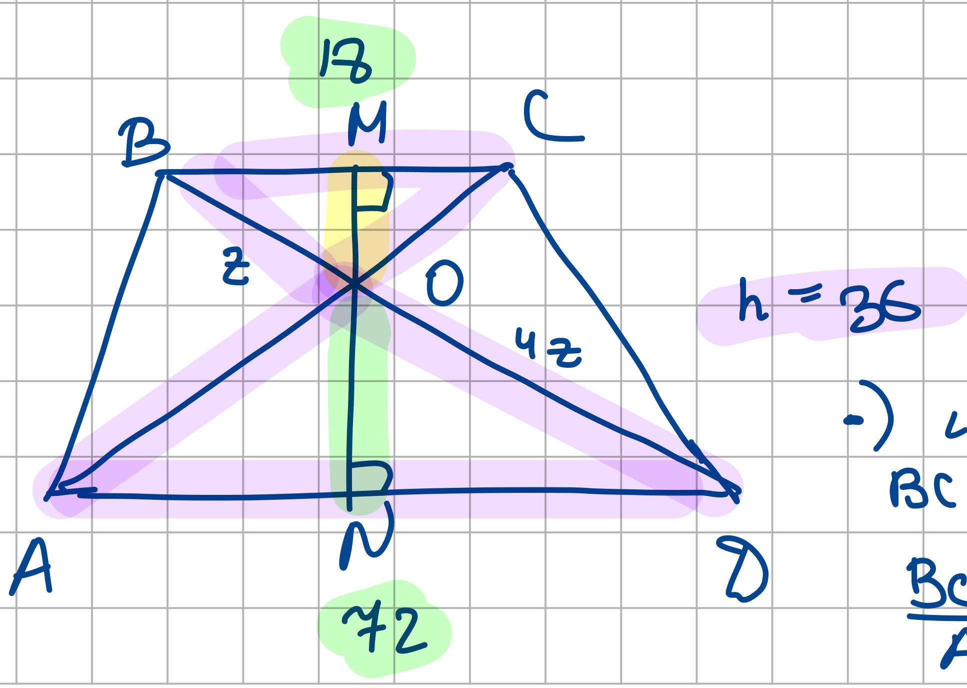
$45^2 = 36^2 + y^2$

$y^2 = 45^2 - 36^2 = 27^2$

$y = 27$

$\boxed{b = 72}$

6



Δ BOC ∼ Δ DOA

по 2ум ∠

•) ∠BOC = ∠AOD – верт

•) ∠BCA = ∠CAD – н/л при BC ∥ AD и сек. AC

⇓

$\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$

7) $\Delta BMO \sim \Delta DNO$ по 2 угл $\angle$ (премые + + верт)

$$\frac{BO}{OD} = \frac{MO}{ON} \Rightarrow \frac{MO}{ON} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{BO}{OD} = \frac{1}{4}$$

$MO = c$; $ON = 4c$

$MO + ON = h$

$c + 4c = 36$

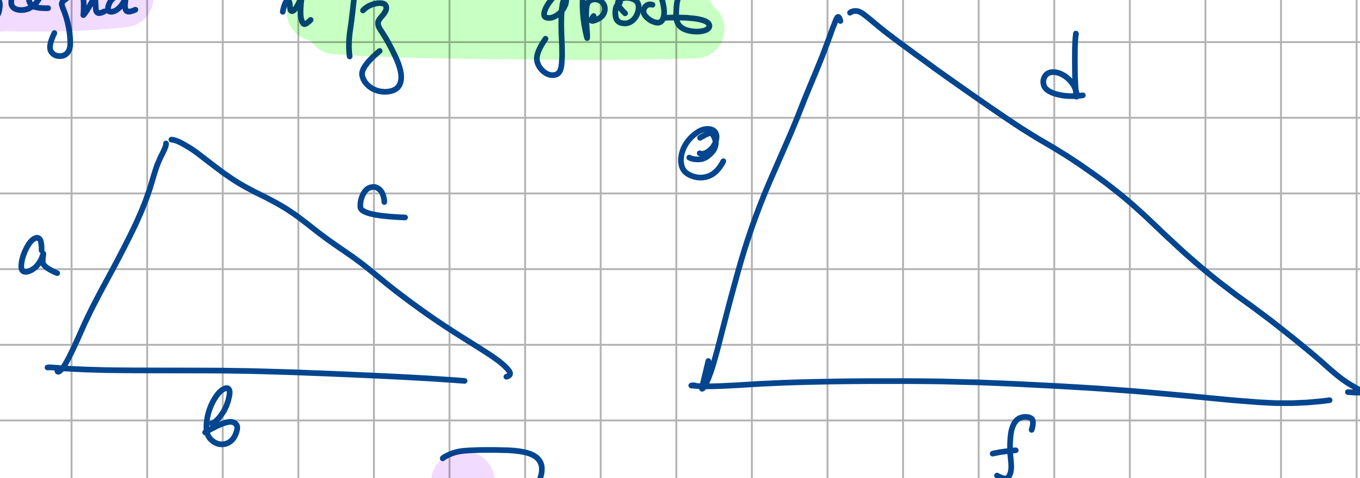
$5c = 36$

$c = \frac{36}{5} = 7{,}2$

$c = OM = 7{,}2$

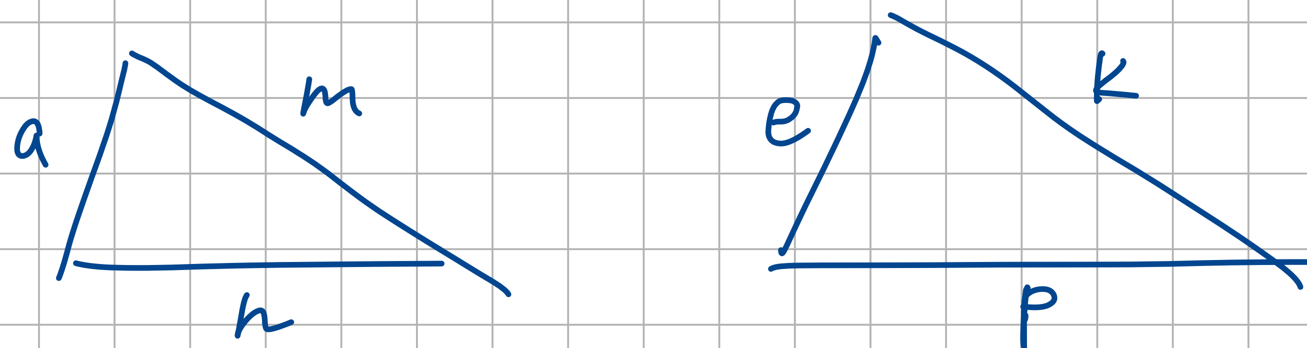
Ⅰ Свезна и/з дробь

1 пара



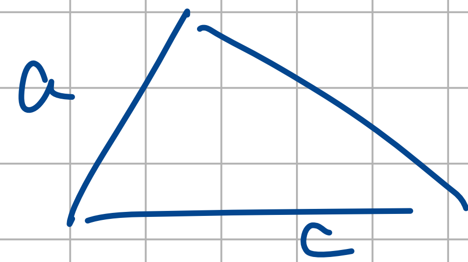
$$\frac{a}{e} = \boxed{\frac{в}{f}}$$

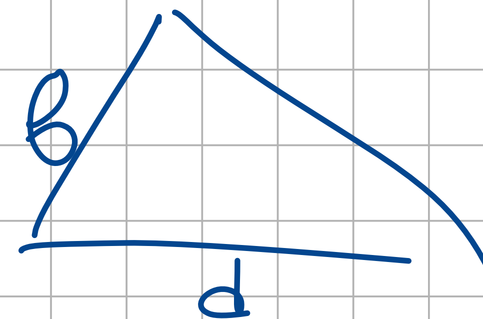
2 пара



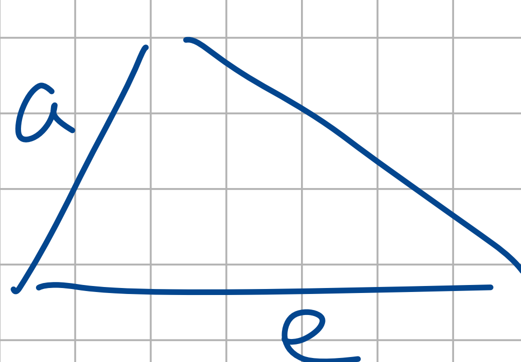
$$\frac{a}{e} = \boxed{\frac{n}{p}} \Rightarrow \boxed{\frac{в}{f} = \frac{n}{p}}$$

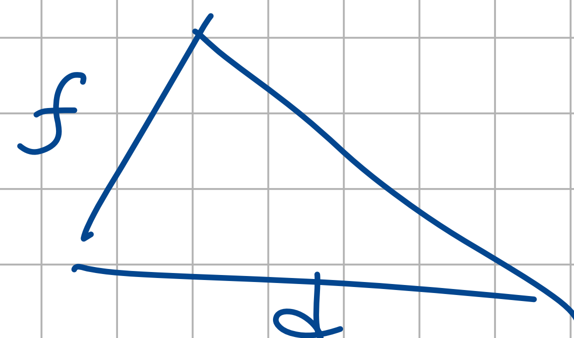
II Связка и/з произведение





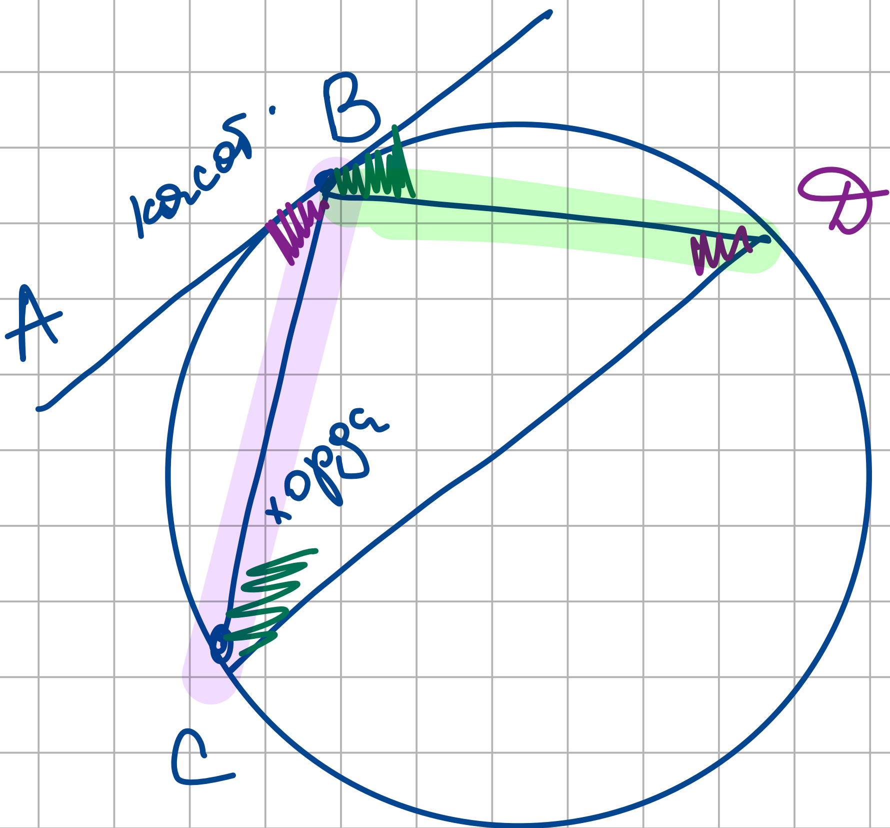
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \boxed{a\cdot d}=b\cdot c$$





$$\frac{a}{f}=\frac{e}{d} \iff \boxed{a\cdot d}=f\cdot e$$

$$\Rightarrow \boxed{b\cdot c=f\cdot e}$$



Теор. об ∠ м/ду касат. и хордой

Фор-ка, котор. удобна для реш., но писать в реш. не нужно?

Угол м/ду кас. и хордой = впис. ∠, опир. на эту хорду

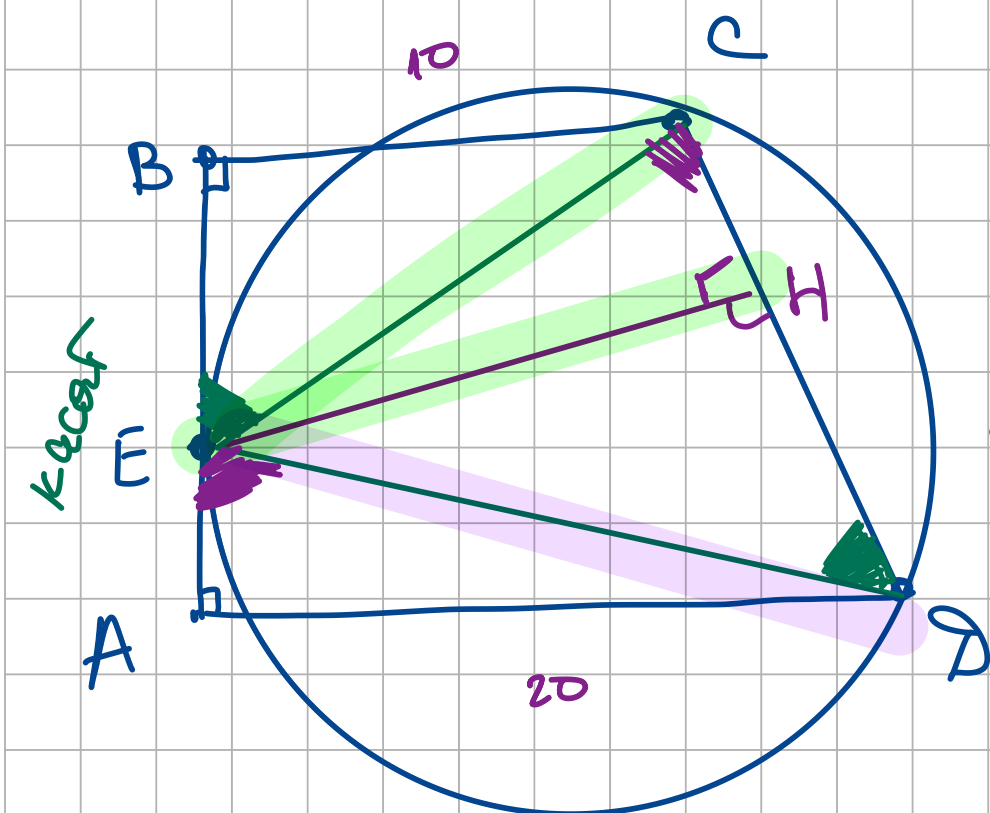
Офиц. фор-ка (бесполезная)

Угол м/ду кас. и хордой = $\frac{1}{2}$ дуги, заключ. м/ду кас. и хордой

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BC = \angle BDC$

↙ ∠ м/ду кас AB и хор BC

2 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 20$, $BC = 10$.



$\angle$ м/ду кас и хорд + + связка подоб.

1) $EH \perp CD$; пров. EC и ED

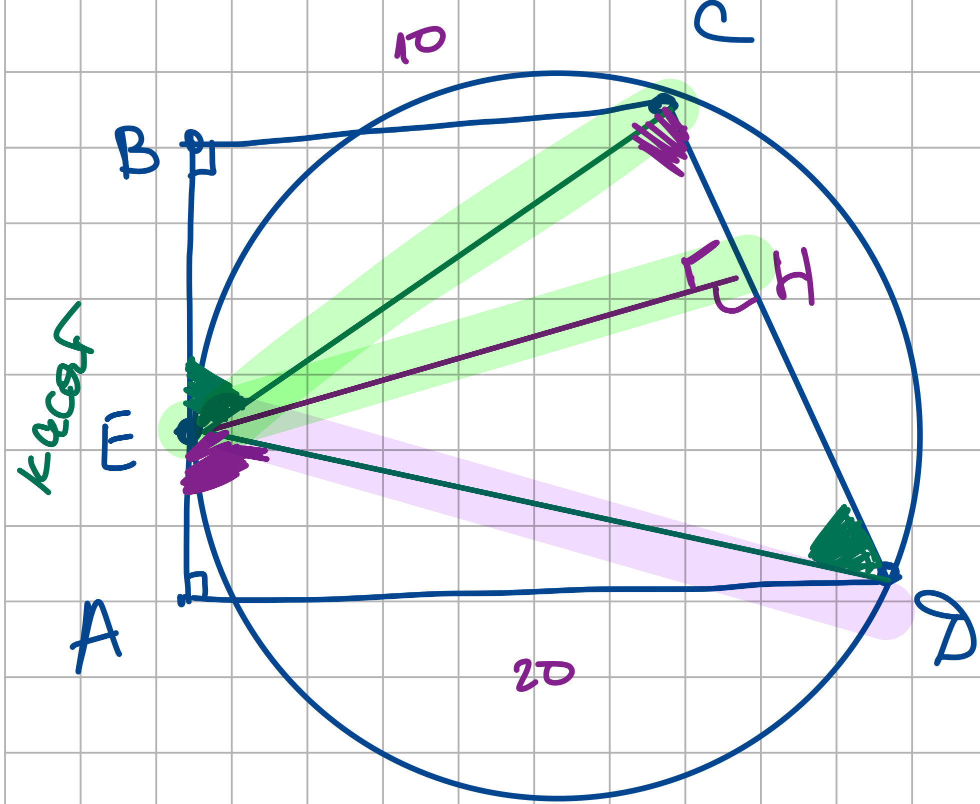
2) $\triangle EBC \sim \triangle DHE$ по 2ум $\angle$

• $\underbrace{\angle BEC}_{\angle \text{ м/ду кас. и хордой}} = \frac{1}{2} \cup EC = \underbrace{\angle EDC}_{\text{как впис, опир на } \cup BC}$

• $\angle EBC = \angle EHD = 90°$
(т.к трап. п/уг) ($EH \perp CD$)

$\Downarrow$

$$\frac{EB}{DH} = \boxed{\frac{BC}{HE}} = \frac{EC}{DE}$$



3) $\triangle ECH \sim \triangle DEA$ по 2-м $\angle$

•) $\underbrace{\angle AED}_{\angle \text{ м/ду кас. } AE \text{ и } ED} = \frac{1}{2} \smile ED = \underbrace{\angle ECD}_{\text{т.к. } \angle ECD \text{ - впис, опир на } \smile ED}$

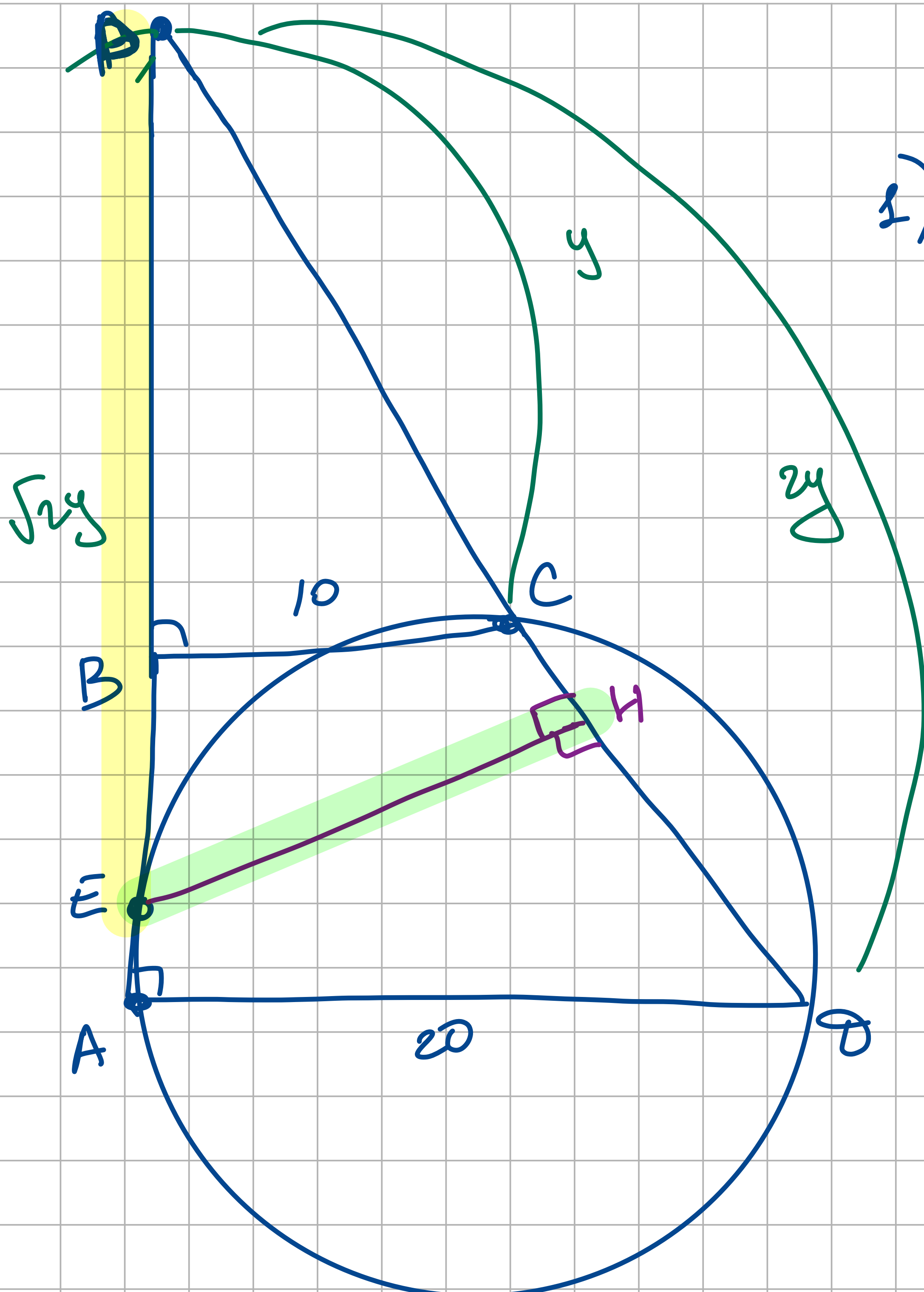
•) $\angle EAD = \angle EHC = 90^\circ$ (Трап. п/уг) $EH \perp CD$

$$\frac{EC}{DE} = \frac{CH}{EA} = \boxed{\frac{EH}{DA}}$$

Из п. 2 и 3 $\Rightarrow$

$$\frac{BC}{HE} = \frac{EH}{DA}$$ (связано с 3) $\frac{EC}{DE}$)

$$\frac{10}{EH} = \frac{EH}{20} \Leftrightarrow EH^2 = 200 \; ; \; EH = 10\sqrt{2}$$



1) $\Delta BPC \sim \Delta APD$

2) теор. о кас. и сек.

$PE^2 = PC \cdot PD$

$PE^2 = y \cdot 2y = 2y^2$

$PE = \sqrt{2}y$

3) $\Delta PHE \sim \Delta PAD$

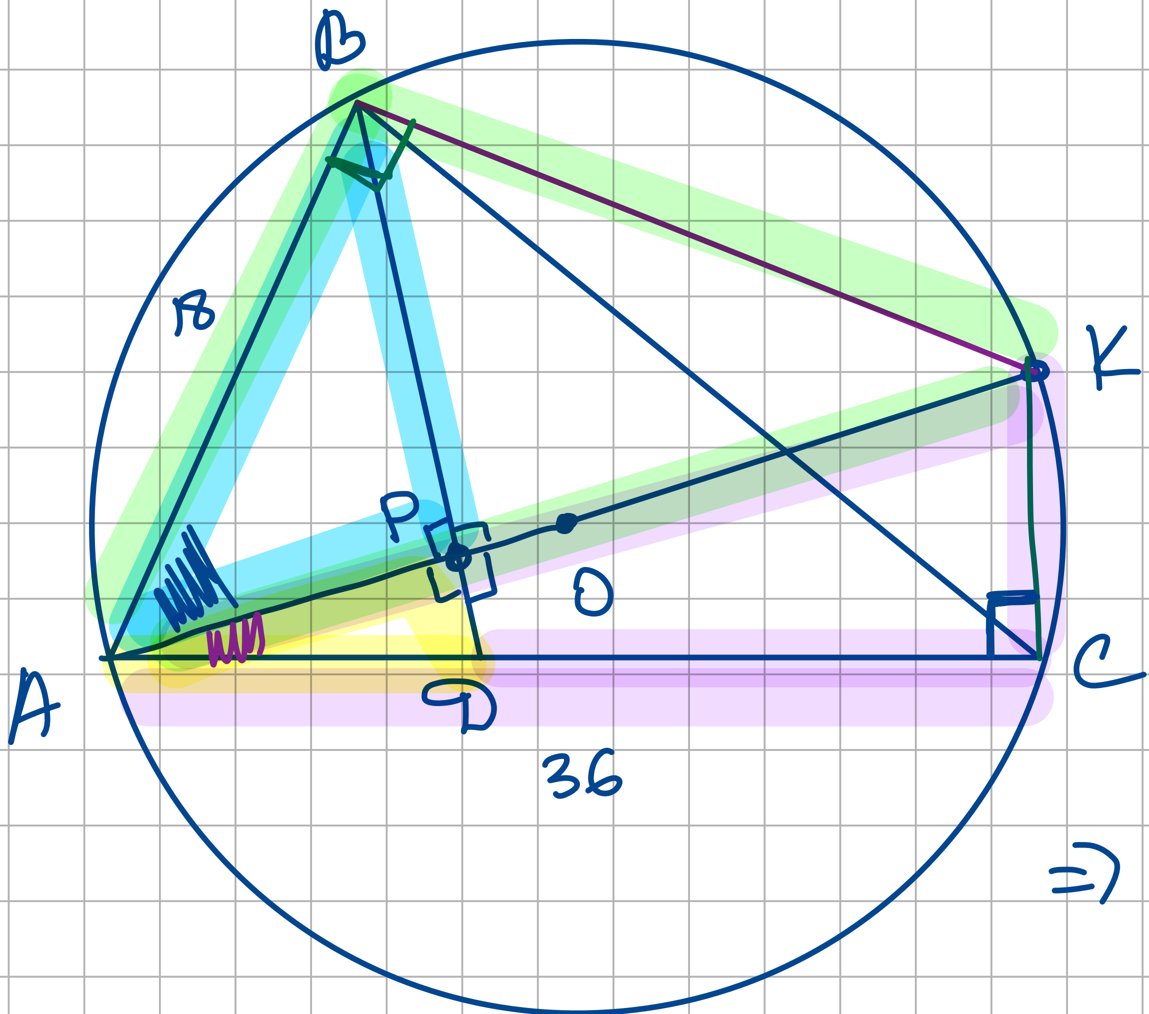
($\angle P$ – общ + 90°)

$$\frac{PH}{PA} = \frac{HE}{AD} = \frac{PE}{PD}$$

$$\frac{HE}{20} = \frac{\sqrt{2}\cancel{y}}{2\cancel{y}}$$

$$HE = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

3 В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 18$, $AC = 36$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.



$AB = 18$
$AC = 36$
$CD = ?$

связки подобие

(1) $P = AO \cap BD$

продлим AO до пер. с окр. в т. K

пров. BK и CK

AK – диаметр (т.к. $O \in AK$) $\Rightarrow$

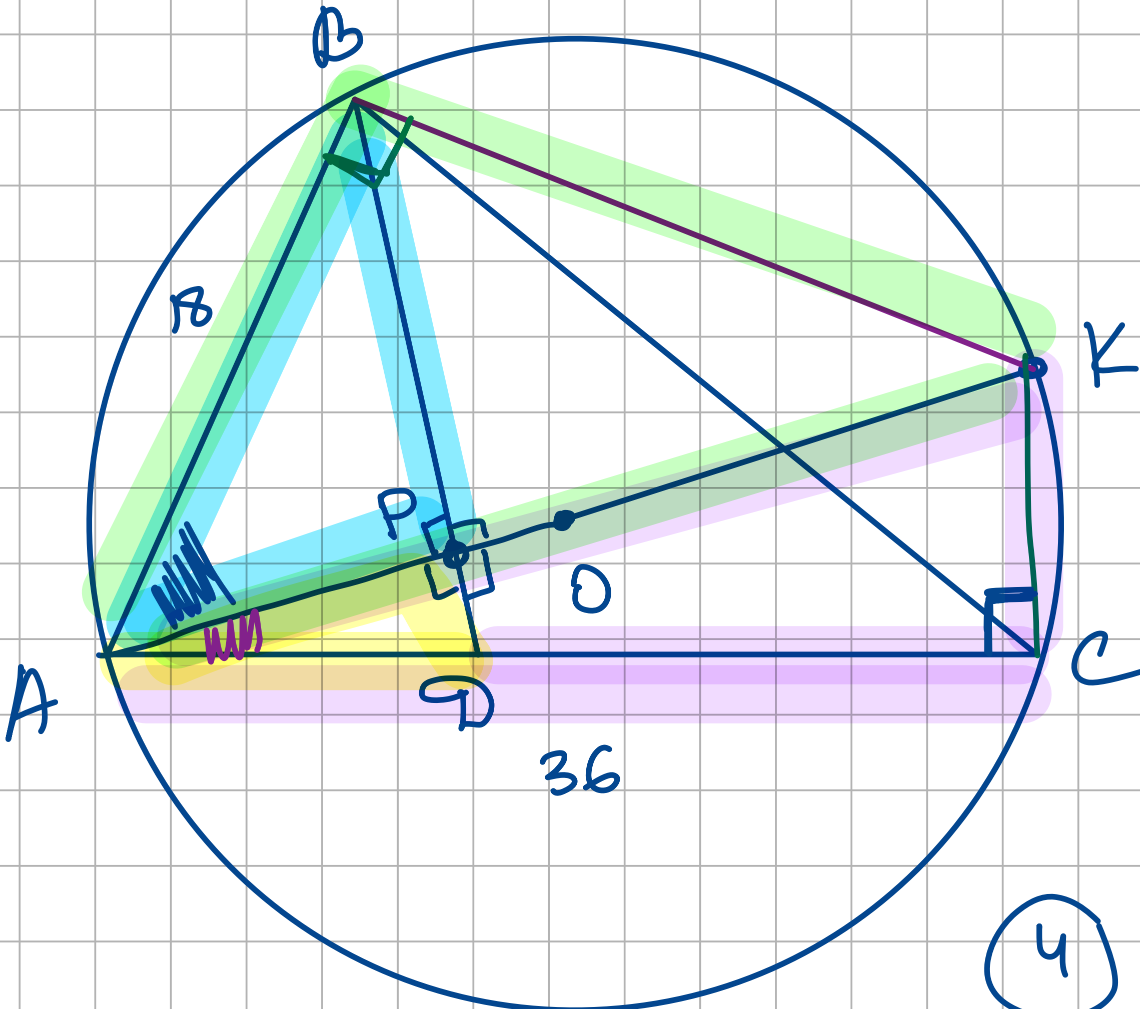
$\Rightarrow \angle ABK = 90°$ (впис. $\angle$, опир. на диам)

$\angle ACK = 90°$

(2) $\triangle ABP \sim \triangle AKB$ по двум $\angle$

($\angle A$ – общ; $\angle ABK = \angle BPA = 90°$)

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BP}{KB} = \frac{AP}{AB} \Leftrightarrow \boxed{AP \cdot AK = AB^2}$$



3) $\triangle APD \sim \triangle ACK$

по 2ум ∠.

(∠ PAD – общ;
∠ APD = ∠ ACK = 90°)

$\frac{AP}{AC} = \frac{PD}{CK} = \frac{AD}{AK}$

$\boxed{AP \cdot AK = AC \cdot AD}$

4) Из п. 2 и 3
(связка по $AP \cdot AK$)

$AB^2 = AC \cdot AD$

$18^2 = 36 \cdot AD$,

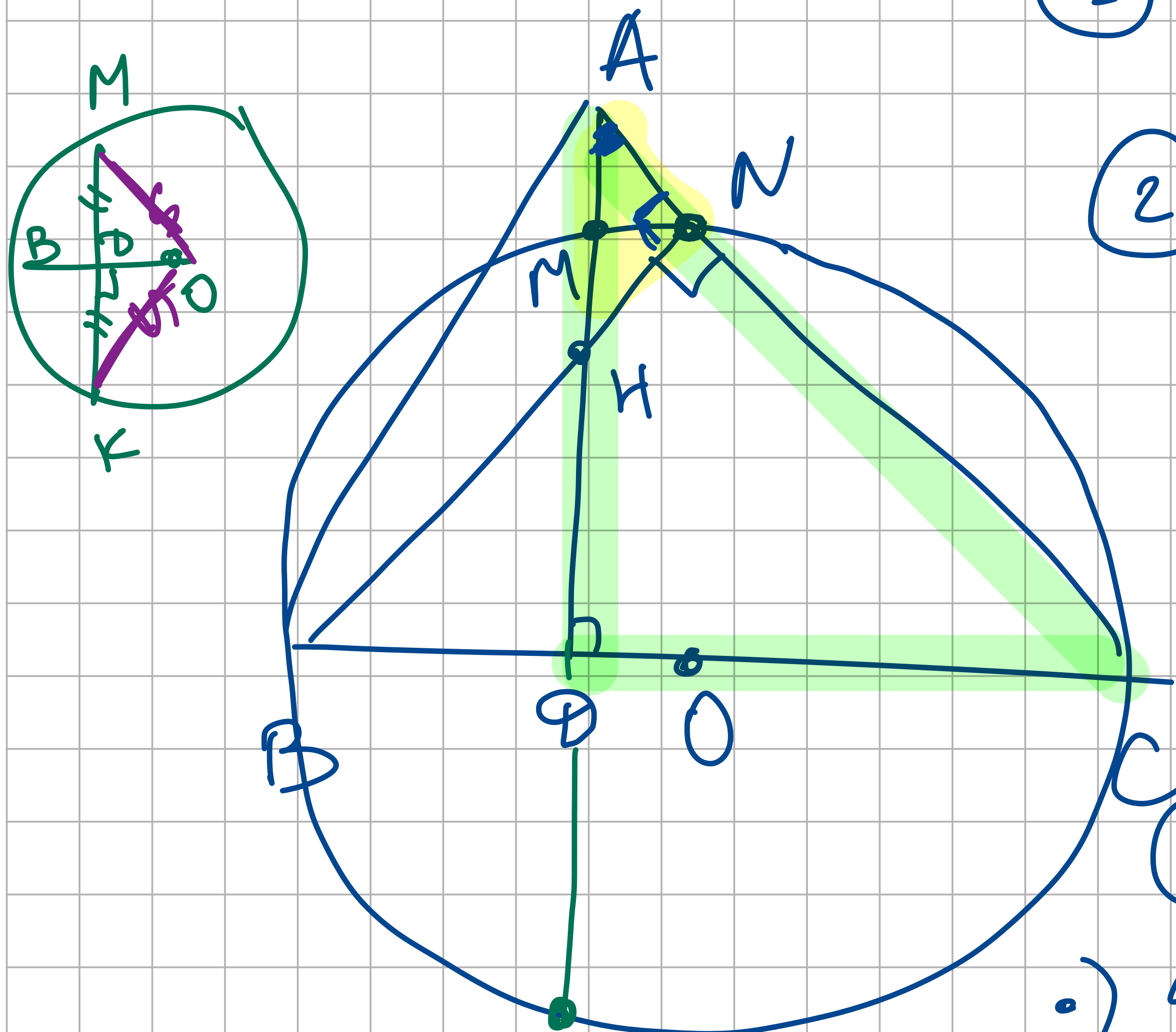
$AD = \frac{18^2}{36} = \frac{\cancel{18} \cdot 18}{\cancel{36}_2} = 9$

$DC = AC - AD =$

$= 36 - 9 = 27$

4 На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

ТОП-3 по сложности



1) $AD=49$, $MD=42$ $\Rightarrow$ $AM = 49 - 42 = 7$

2) Пусть N – т. пересеч. окр-ти с AC и пров. BN, тогда ∠BNC – впис., опир. на диам; $\Rightarrow$ $\angle BNC = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $BN \perp AC$ $\Rightarrow$ BN – выс

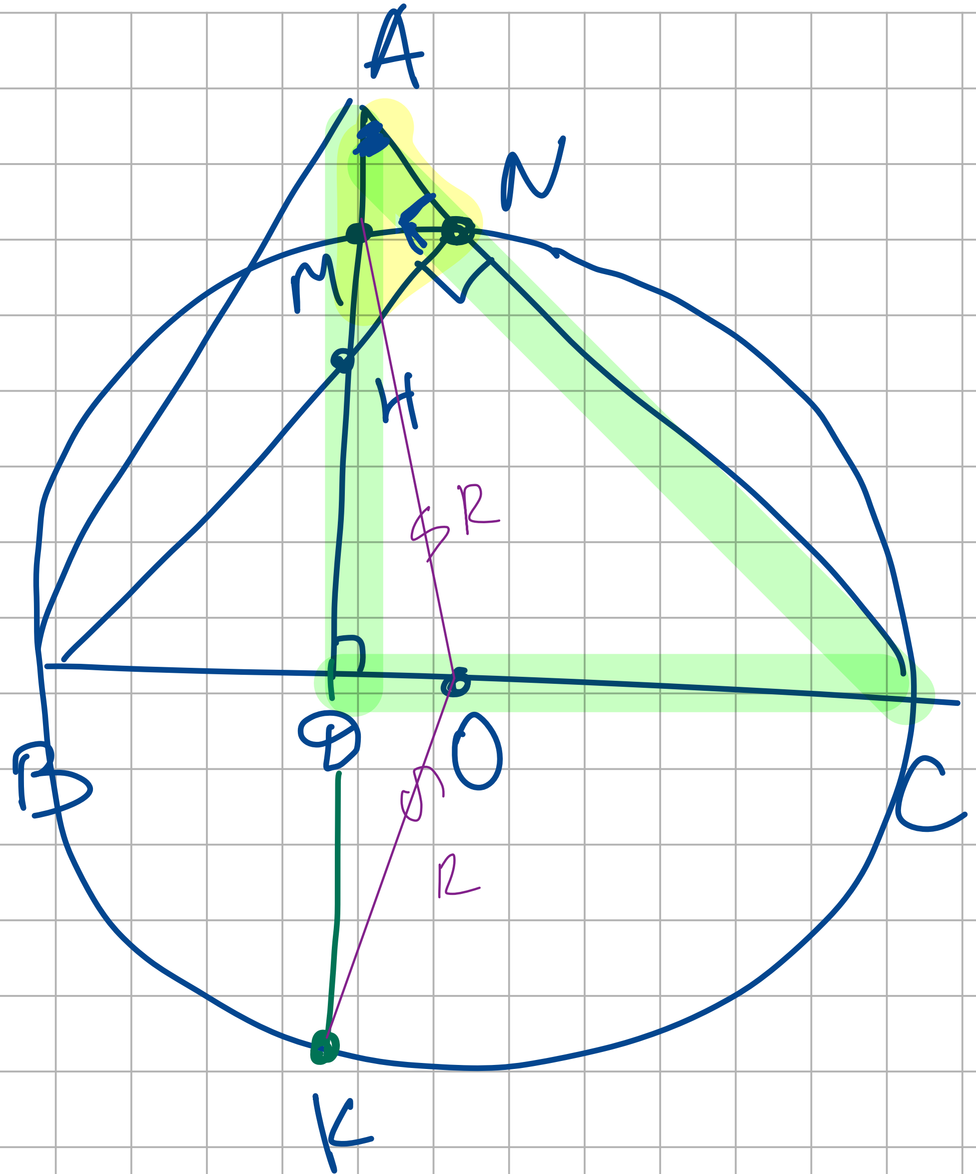
$BN \cap AD = H$

Готовимся к связке

3) $\triangle HAN \sim \triangle CAD$ по двум ∠

- ∠A – общ;
- $\angle ANH = \angle ADC = 90^\circ$ (выс)

$$\frac{AN}{AD} = \frac{NH}{DC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \boxed{AN \cdot AC = AD \cdot AH}$$



④ продлим AD до пересеч с окр в т. K

по теор. о 2-ух сек.

$$\boxed{AN \cdot AC = AM \cdot AK}$$

⑤ Из п. 3 и 4 (связка по $AN \cdot AC$)

$$AD \cdot AH = AM \cdot AK$$

$$49 \cdot AH = 7 \cdot AK$$

?

⑥ пров. $OM = OK = R \Rightarrow$
$\triangle MOK$ – р/б; OD – выс $\Rightarrow$ OD – мед $\Rightarrow$
$MD = DK = 42 \Rightarrow AK = AD + DK = 49 + 42 = 91$

⑦ В рав-во из п. 5 подставим данные
$49 \cdot AH = 7 \cdot 91 \Rightarrow AH = \frac{\cancel{7} \cdot 91}{\cancel{49}\ 7} = \frac{91}{7} = 13$