ЕГЭ по профильной математике 2025. Основная волна

Здесь можно скачать актуальную версию файла

Содержание

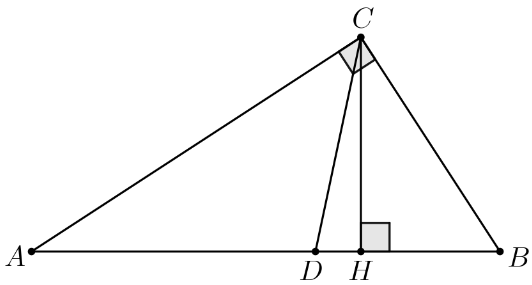
ШКОЛКОВО

Первая часть. Условия

Задачи №1. Условия

№1.1 #119208 (Дальний восток, 27.05)

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 67°. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

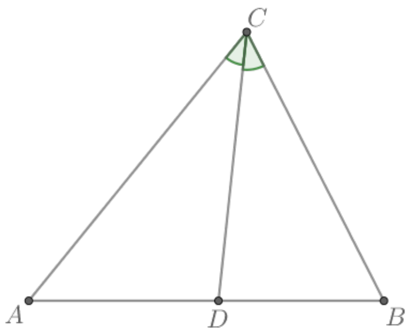


№1.2 #20857 (Сибирь, 27.05)

Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 86°. Найдите наименьший из внутренних углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

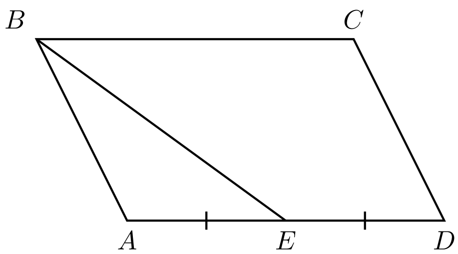
№1.3 #1394 (Центр, 27.05)

В треугольнике ABC известно, что CD — биссектриса, $\angle B = 63°$, $\angle ACD = 33°$. Найдите $\angle ADC$. Ответ дайте в градусах.



№1.4 #126352 (Центр, 26.05)

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь треугольника ABE.



Задачи №2. Условия

№2.1 #92095 (Дальний восток, 27.05)

Даны векторы $\vec{a}(5; -7)$ и $\vec{b}(14; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

№2.2 #91709 (Центр, 27.05)

Даны векторы $\vec{a}(3; 3)$, $\vec{b}(9; 8)$ и $\vec{c}(13; 29)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

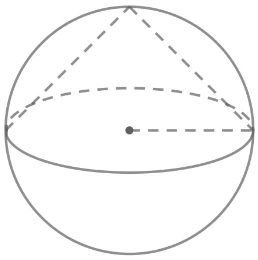
№2.3 #126353 (Центр, 26.05)

Даны векторы $\vec{a}(2; 1)$ и $\vec{b}(1; -3)$. Найдите скалярное произведение векторов $2\vec{a} + \vec{b}$ и $5\vec{a} - \vec{b}$.

Задачи №3. Условия

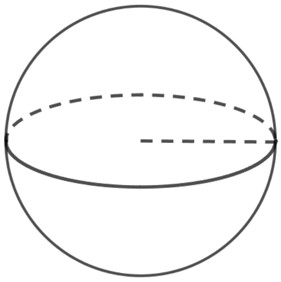
№3.1 #21444 (Дальний восток, 27.05)

Около конуса описана сфера, то есть сфера содержит окружность основания конуса и его вершину. Центр основания конуса совпадает с центром сферы, а ее радиус равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



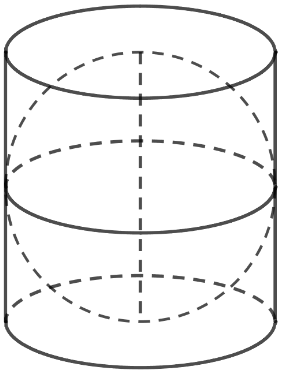
№3.2 #18609 (Дальний восток, 27.05)

Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.



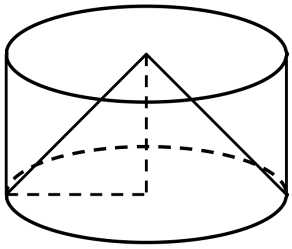
№3.3 #83432 (Сибирь, 27.05)

Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 30. Найдите площадь поверхности шара.



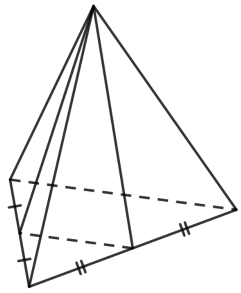
№3.4 #120547 (Центр, 27.05)

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $6\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



№3.5 #126354 (Центр, 26.05)

От треугольной пирамиды, объём которой равен 34, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.



ШКОЛКОВО

Задачи №4. Условия

№4.1 #99880 (Дальний восток, 27.05)

На олимпиаде по математике 320 участников собираются разместить в пяти аудиториях: в четырех — по 60 человек, а оставшихся — в запасной аудитории в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник будет писать олимпиаду в запасной аудитории.

№4.2 #99631 (Сибирь, 27.05)

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов: первые три дня по 11 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

№4.3 #99639 (Центр, 27.05)

На конференцию приехали учёные из трёх стран: 8 из Уругвая, 7 из Чили и 5 из Парагвая. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что вторым окажется доклад учёного из Чили.

№4.4 #126355 (Центр, 26.05)

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Мотор» по очереди играет с командами «Статор», «Стартер» и «Ротор». Найдите вероятность того, что «Мотор» будет начинать с мячом только вторую игру.

Задачи №5. Условия

№5.1 #91715 (Дальний восток, 27.05)

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,92. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

№5.2 #99856 (Сибирь, 27.05)

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

№5.3 #99868 (Центр, 27.05)

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,25. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,1. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

№5.4 #126356 (Центр, 26.05)

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,6. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Задачи №6. Условия

№6.1 #19483 (Дальний восток, 27.05)

Решите уравнение $7^{x-4} = 49$.

№6.2 #83749 (Центр, 27.05)

Решите уравнение $0{,}2^{2-5x} = 125$.

№6.3 #126357 (Центр, 26.05)

Найдите корень уравнения $\log_5(x-6) = 2$.

Задачи №7. Условия

№7.1 #41103 (Дальний восток, 27.05)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 125}{\log_9 5}$.

№7.2 #17269 (Сибирь, 27.05)

Найдите значение выражения $\log_5 0{,}2 + \log_{0,5} 4$.

№7.3 #100379 (Центр, 27.05)

Найдите значение выражения $\log_{0,2} 100 - \log_{0,2} 4$.

№7.4 #126358 (Центр, 26.05)

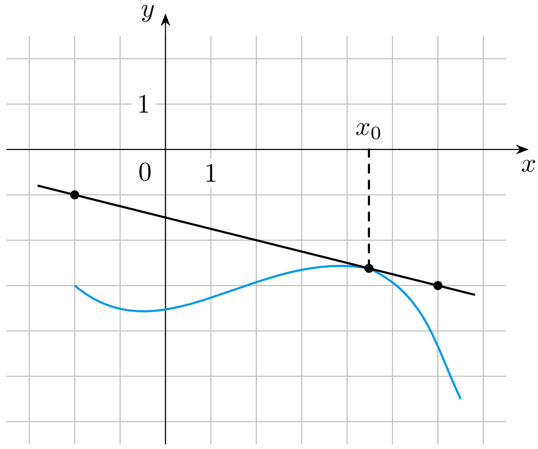
Найдите значение выражения $2\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}1$.

ШКОЛКОВО

Задачи №8. Условия

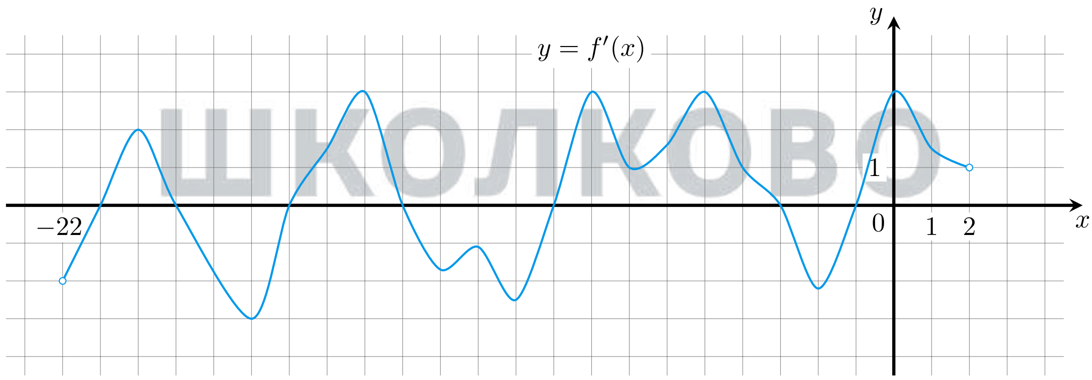
№8.1 #11715 (Дальний восток, 26.05)

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



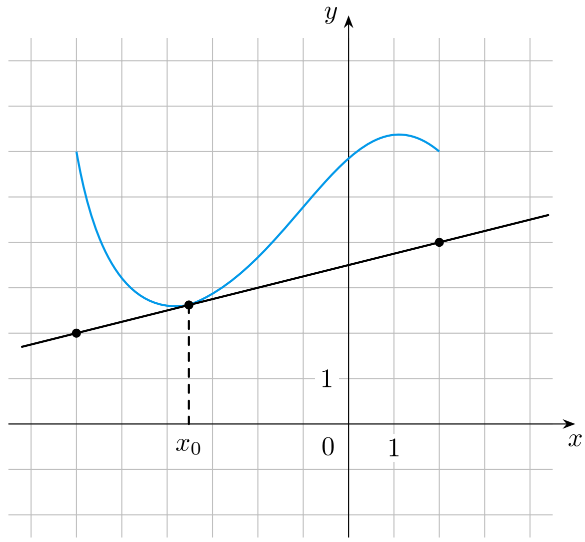
№8.2 #118820 (Сибирь, 27.05)

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-22; 2)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-18;\ 1]$.



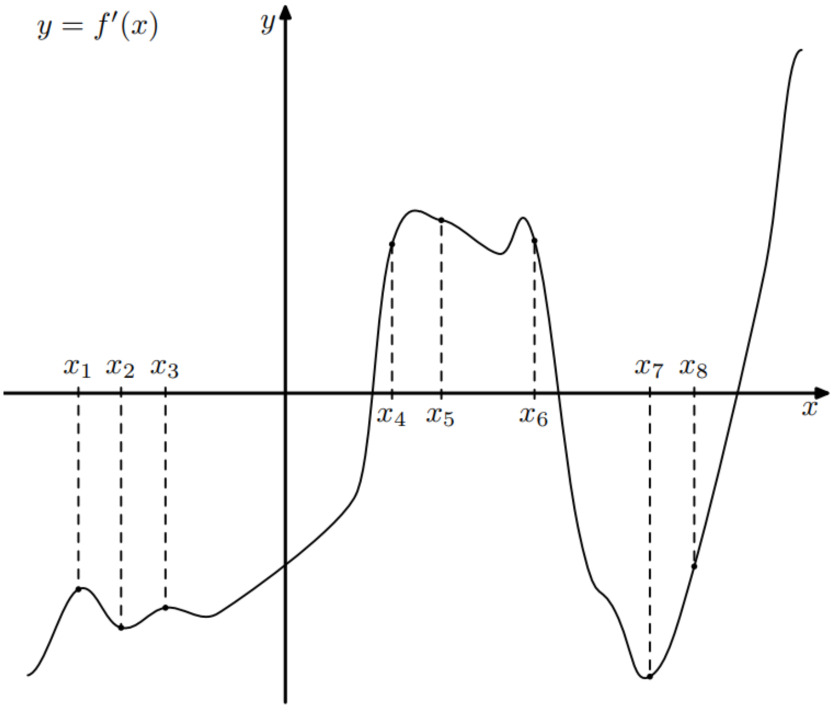
№8.3 #19488 (Центр, 27.05)

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



№8.4 #91260 (Центр, 26.05)

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



Задачи №9. Условия

№9.1 #103675 (Дальний восток, 27.05)

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость 150 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

№9.2 #103701 (Центр, 27.05)

Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 25,6 километра? Ответ дайте в метрах.

№9.3 #126359 (Центр, 26.05)

Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошел путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

Задачи №10. Условия

№10.1 #99980 (Дальний восток, 27.05)

От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 240 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним, со скоростью на 8 км/ч больше, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

№10.2 #37890 (Сибирь, 27.05)

Два автомобиля одновременно отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 24 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

№10.3 #20838 (Центр, 27.05)

Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 30 км от A. Пробыв в пункте B 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00 того же дня. Определите собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки равна 1 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

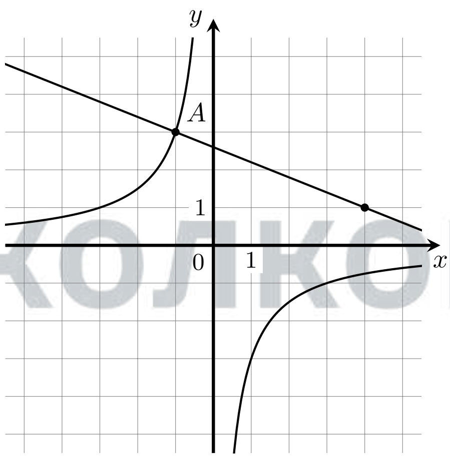
№10.4 #126361 (Центр, 26.05)

Наташа выполняет работу за 51 час, а Саша и Наташа вместе выполняют ту же работу за 34 часа. За сколько часов выполнит работу Саша?

Задачи №11. Условия

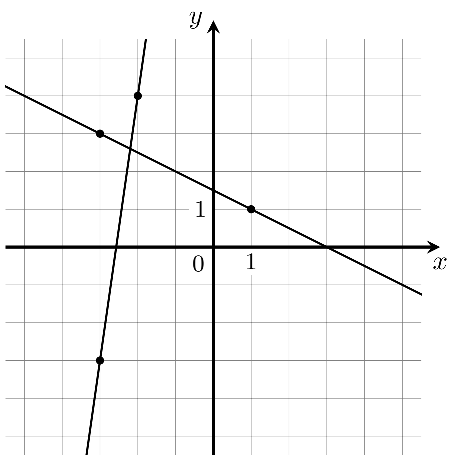
№11.1 #100214 (Дальний восток, 27.05)

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



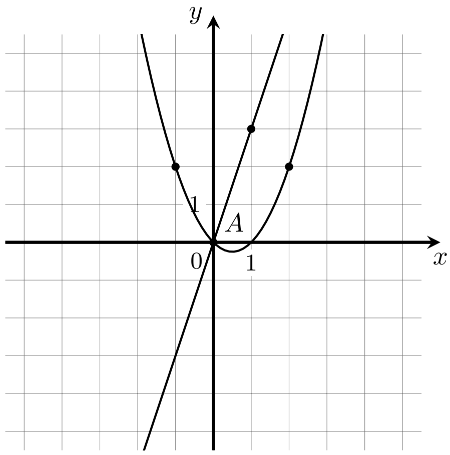
№11.2 #100207 (Сибирь, 27.05)

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



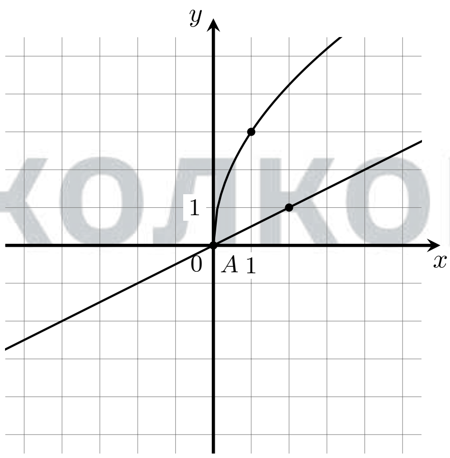
№11.3 #71607 (Центр, 27.05)

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



№11.4 #113025 (Центр, 26.05)

На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Задачи №12. Условия

№12.1 #17139 (Дальний восток, 27.05)

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 8{,}5x^2 + 10x - 13$.

№12.2 #121851 (Центр, 27.05)

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 81x + 56$ на отрезке $[-7;\, 0]$.

№12.3 #126363 (Центр, 26.05)

Найдите точку минимума функции $y = (58 - x)e^{58-x}$.

Вторая часть. Условия

Задачи №13. Условия

№13.1 #125803 (Дальний Восток, 27.05)

а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{2}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\, \pi\right]$.

№13.2 #125804 (Дальний Восток, 27.05)

а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

№13.3 #125805 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2 + 2\cos(\pi + 2x) - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} - \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№13.4 #125806 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2 - 2\cos(\pi + 2x) - \sqrt{8}\cos x = \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№13.5 #125836 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2 + 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

№13.6 #125808 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2\cos(2\pi + 2x) - 2 + \sqrt{8}\sin x = -\sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

№13.7 #125837 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2\cos(2\pi + 2x) - 2 - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№13.8 #125816 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} - 2\sin(x + \pi)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

№13.9 #125815 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin(x + \pi) = \sqrt{3} + 2\sin x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

№13.10 #125817 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin(x + \pi) = \sqrt{3} - 2\sin x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№13.11 #125838 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{2}\sin(x - \pi) = \sqrt{2} - 2\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

№13.12 #125839 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin(x + \pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

№13.13 #125841 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} - 2\sin(x + \pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

№13.14 #125818 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}75 = \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

№13.15 #125843 (Дальний Восток, 26.05)

а) Решите уравнение $2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\cos^2 x = 2 + \sqrt{6}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

№13.16 #125844 (Сибирь, 26.05)

а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(2\pi + x) - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№13.17 #125846 (Центр, 26.05)

а) Решите уравнение $\sin\left(-2x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin(4\pi - x) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

№13.18 #126318 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin(x - \pi)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

№13.19 #127041 (Дальний Восток, 27.05)

а) Решите уравнение $2\sin(-x) + 2\sqrt{3}\sin x - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

№13.20 #127044 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2\cos(\pi + 2x) - 2 - \sqrt{8}\cos x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№13.21 #127045 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin(x + \pi) = \sqrt{3} - 2\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

№13.22 #127046 (Дальний Восток, 27.05)

а) Решите уравнение $2\cos(-x) - 2\sqrt{2}\cos x - 4\sin^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задачи №14. Условия

№14.1 #125865 (Дальний восток, 27.05)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 5MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.
а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.
б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 12.

№14.2 #125866 (Дальний восток, 27.05)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $A_1M = 2AM$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.
а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.
б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 20.

№14.3 #125869 (Сибирь, 27.05)

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.
а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.
б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

№14.4 #126161 (Сибирь, 27.05)

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 4MN$.
а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 3$.
б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

ШКОЛКОВО

№14.5 #126162 (Сибирь, 27.05)

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 3MN$.
а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 2$.
б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

№14.6 #125871 (Центр, 27.05)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро SA равно 5. На ребре AC отмечена точка M, а на продолжении ребра BC за точку C — точка N так, что $CM = CN = 1$.
а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью SNM является равнобедренным треугольником.
б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью SNM.

№14.7 #125873 (Центр, 27.05)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 2$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α.
а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D.
б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC, считая от вершины S, если площадь сечения равна $\sqrt{3}$?

№14.8 #126159 (Центр, 27.05)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α.
а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D.
б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC, считая от вершины S, если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

№14.9 #126160 (Центр, 27.05)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ известно, что $AB = 4$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D.

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC, считая от вершины S, если площадь сечения равна $2\sqrt{14}$?

№14.10 #125876 (Центр, 27.05)

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $2\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.

б) В каком отношении точка K делит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $36\sqrt{6}$?

№14.11 #126157 (Центр, 27.05)

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $4\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.

б) В каком отношении точка K делит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $18\sqrt{3}$?

№14.12 #125877 (Запад, 27.05)

На ребрах BC, AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L, M и N соответственно. Известно, что $AM : MB = BL : LC = AN : ND = 1 : 4$.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точки L, M и N, делит ребро CD в отношении $4 : 1$, считая от вершины C.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB = 10$.

ШКОЛКОВО

№14.13 #125879 (Запад, 27.05)

На ребрах BC, AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L, M и N соответственно. Известно, что $AM : MB = BL : LC = AN : ND = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точки L, M и N, делит ребро CD в отношении $2 : 1$, считая от вершины C.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB = 6$.

№14.14 #125894 (Запад, 27.05)

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении $AK : KB = 3 : 1$. Точка L — середина ребра BC. Плоскость α проходит через точки K и L и пересекает ребра B_1C_1 и A_1B_1 в точках M и N соответственно. Известно, что $B_1M : MC_1 = 3 : 1$.

а) Докажите, что $MN \perp AB$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы, если все рёбра призмы равны.

№14.15 #113002 (Центр, 26.05)

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M — середина ребра CC_1. Плоскость α проходит через точки B_1, A и M.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения призмы плоскостью α равна 18 и $AB = 4$.

№14.16 #127048 (Дальний восток, 27.05)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 3MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 12.

№14.17 #127050 (Центр, 27.05)

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $3\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.

б) В каком отношении точка K делит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $36\sqrt{6}$?

№14.18 #127057 (Запад, 27.05)

На ребрах BC, AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L, M и N соответственно. Известно, что $AM : MB = BL : LC = AN : ND = 1 : 3$.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точки L, M и N, делит ребро CD в отношении $3 : 1$, считая от вершины C.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB = 8$.

ШКОЛКОВО

Задачи №15. Условия

№15.1 #125978 (Дальний восток, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x}-2\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+2}-16}{x-1}\geqslant 0.$$

№15.2 #126195 (Дальний восток, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x}-10\cdot 2^{2x}+17\cdot 2^{x}-8}{x}\leqslant 0.$$

№15.3 #125981 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+5}-729}{50x^2+10x+0{,}5}\leqslant 0.$$

№15.4 #126194 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{3\cdot 27^{x}-9^{x+1}+3^{x+2}-3}{50x^2-30x+4{,}5}\geqslant 0.$$

№15.5 #125983 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1}{50x^2+50x+12{,}5}\geqslant 0.$$

№15.6 #125984 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1}{50x^2-50x+12{,}5}\geqslant 0.$$

№15.7 #126192 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1}-9^{x+2}+3^{x+4}-27}{50x^2+70x+24{,}5}\leqslant 0.$$

№15.8 #126152 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{9\cdot 27^{x}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+3}-9}{50x^2-90x+40{,}5}\geqslant 0.$$

№15.9 #125986 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x}-9^{x+1}+3^{x+3}-27}{50x^2-110x+60{,}5}\geqslant 0.$$

№15.10 #125991 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{9^{x^2}-18\cdot 3^{x^2}+81}\leqslant 0.$$

№15.11 #125990 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{4^{x^2}-16\cdot 2^{x^2}+64}\leqslant 0.$$

№15.12 #126193 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\geqslant 0.$$

№15.13 #125988 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27x^3+9x^2-3x-1}{64^{x^2}-4\cdot 8^{x^2}+4}\geqslant 0.$$

№15.14 #125989 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{8x^3+4x^2-2x-1}{81^{x^2}-6\cdot 9^{x^2}+9}\geqslant 0.$$

№15.15 #125992 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2}{2^x+10}\leqslant\frac{3}{2^{x+1}-1}.$$

№15.16 #125993 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{3^{3x}-29\cdot 3^{2x}+55\cdot 3^x-27}{x}\geqslant 0.$$

№15.17 #126227 (Центр, 26.05)

Решите неравенство

$$7\log_3\left(x^2-7x+12\right)\leqslant 8+\log_3\frac{(x-3)^7}{x-4}.$$

№15.18 #126229 (Центр, 26.05)

Решите неравенство

$$9\log_7\left(x^2+x-2\right)\leqslant 10+\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}.$$

№15.19 #127060 (Дальний восток, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x}-10\cdot 2^{2x}+17\cdot 2^x-8}{x}\geqslant 0.$$

№15.20 #127061 (Дальний восток, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x}-9\cdot 4^x+3\cdot 2^{x+3}-16}{x-2}\geqslant 0.$$

№15.21 #127062 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{(2x)^3-(2x)^2-2x+1}{16^{x^2}-4\cdot 4^{x^2}+4}\leqslant 0.$$

Задачи №16. Условия

№16.1 #2555 (Дальний восток, 27.05)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторое целое число лет. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 24,5 млн рублей?

№16.2 #126148 (Дальний восток, 27.05)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторое целое число лет. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 7,5 млн рублей?

№16.3 #125995 (Дальний восток, 27.05)

15 декабря 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 72 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

№16.4 #125996 (Дальний восток, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

№16.5 #126005 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:
– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– К 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно A, если общая сумма платежей в 2028 году составит 17925 тыс. рублей

ШКОЛКОВО

№16.6 #126145 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 60 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2031 году составит 1356 тыс. рублей?

№16.7 #126146 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 48 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2030 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2030 году составит 6390 тыс. рублей?

№16.8 #126147 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2027 году составит 2610 тыс. рублей?

№16.9 #125998 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 7830 тыс. рублей?

№16.10 #126150 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 4830 тыс. рублей?

№16.11 #125997 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равно r, если общая сумма платежей в 2031 году составила 3951 тыс. рублей?

№16.12 #126151 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на 48 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2030 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равно r, если общая сумма платежей в 2030 году составила 3195 тыс. рублей?

№16.13 #126149 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 6165 тыс. рублей?

№16.14 #126000 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга одним платежом;
– 15-го числа каждого месяца (с января 2027 года по март 2028 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15 марта 2028 года долг составит 200 тыс. рублей;
– 15 апреля 2028 года кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма платежей после полного погашения составит 612 тыс. рублей?

№16.15 #126001 (Запад, 27.05)

В июле 2025 планируется взять кредит в банке сроком на четыре года на сумму 2 млн рублей. Условия его возврата таковы:
– в январе 2026 и 2027 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2028 и 2029 годов долг возрастает на $2r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем;
– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Найдите r, если общая переплата по кредиту после полного его погашения составит 650 тыс. рублей.

№16.16 #113006 (Центр, 26.05)

Строительство нового завода стоит 100 млн рублей. Затраты на производство x тысяч единиц продукции на таком заводе равны $Z = 0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене q тысяч рублей за единицу, то прибыль в млн рублей за один год составит $qx - Z$. Когда завод будет построен, планируется выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении q строительство завода окупится не более чем за 4 года?

№16.17 #12946 (Центр, 26.05)

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы в млн рублей за один год составит $px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

№16.18 #127064 (Дальний восток, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 36 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

№16.19 #127065 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 60 месяцев. Условия возврата кредита таковы:
– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно A, если общая сумма платежей в 2027 году составит 2508 тыс. рублей?

№16.20 #127066 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 48 месяцев. Условия возврата кредита таковы:
– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2030 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно A, если общая сумма платежей в 2027 году составит 8550 тыс. рублей?

Задачи №17. Условия

№17.1 #125941 (Дальний восток, 27.05)

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.
а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.
б) Найдите AB, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

№17.2 #125944 (Дальний восток, 27.05)

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.
а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.
б) Найдите AB, если $BC = \sqrt{21}$ и $AC = 3$.

№17.3 #125947 (Сибирь, 27.05)

В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.
а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 10$.

№17.4 #126139 (Сибирь, 27.05)

В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 8$.

№17.5 #126140 (Сибирь, 27.05)

В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.
а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 12$.

№17.6 #126141 (Сибирь, 27.05)

В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.
а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 6$.

№17.7 #125949 (Центр, 27.05)

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла, AM и CN — биссектрисы треугольников ACH и BCH соответственно,
а) Докажите, что прямые AM и CN перпендикулярны.
б) Найдите длину отрезка MN, если $BC = 21$ и $\sin\angle ABC = \dfrac{2}{5}$.

№17.8 #125952 (Центр, 27.05)

В четырёхугольник $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle LMN = \angle KLM = 60°$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 9$.

№17.9 #126137 (Центр, 27.05)
В четырёхугольник $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 3\sqrt{3}$.

№17.10 #126138 (Центр, 27.05)
В четырёхугольник $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 3$.

№17.11 #125955 (Центр, 27.05)
В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = \sqrt{3}$.

№17.12 #126144 (Центр, 27.05)
В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 3$.

№17.13 #125957 (Запад, 27.05)
Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.
а) Докажите, что $BM = PQ$.
б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 12$, $AB = BQ = 15$.

№17.14 #126142 (Запад, 27.05)
Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.
а) Докажите, что $BM = PQ$.
б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 8$, $AB = BQ = 10$.

№17.15 #126143 (Запад, 27.05)
Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.
а) Докажите, что $BM = PQ$.
б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 21$, $AB = BQ = 29$.

№17.16 #125958 (Запад, 27.05)
Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M. Диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABM, касается прямых BC и OM.
а) Докажите, что $AB \perp BD$.
б) Отрезки AC и BM пересекаются в точке K. Найдите площадь четырехугольника $KODM$, если $OM = 2$.

№17.17 #11446 (Центр, 26.05)
В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.
а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

№17.18 #127068 (Центр, 27.05)

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle NKL = \angle KLM = 120°$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.

б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 1$.

ШКОЛКОВО

Задачи №18. Условия

№18.1 #125921 (Дальний Восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x-\frac{9}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{9}{x}\right)-49a+18=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.2 #125898 (Дальний Восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-9a+15=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.3 #125900 (Дальний восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-25a+10=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.4 #125903 (Дальний восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.5 #125970 (Дальний восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{9}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{9}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.6 #126232 (Дальний восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{9}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{9}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.7 #125938 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2\right)^2-(a+1)\left(4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2\right)+4=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.8 #125963 (Сибирь, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(4x+|x+a|+|3x-a+2|)^2+a\,(4x+|x+a|+|3x-a+2|)+a^2-64=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.9 #125971 (Сибирь, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(4x+|x-a|-|3x+1|)^2-(a+1)\,(4x+|x-a|-|3x+1|)+1=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.10 #125929 (Сибирь, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(7x+|x+a-1|-6|x+a+1|+7a)^2-a(7x+|x+a-1|-6|x+a+1|+7a)+1=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.11 #125967 (Сибирь, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(7x+|x+a|-|6x|)^2+(a+1)\,(7x+|x+a|-|6x|)-a-1=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.12 #125925 (Сибирь, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2\right)^2+(a+2)\left(5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2\right)+1=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.13 #126317 (Сибирь, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(5x+2|x-a|-|3x|)^2+(a-1)\,(5x+2|x-a|-|3x|)+1=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.14 #125966 (Сибирь, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(5x+|2x-a|-|3x|)^2-(a+2)\,(5x+|2x-a|-|3x|)+1=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.15 #125962 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a^2|+|x+2|)^2-11\cdot(|x-a^2|+|x+2|)+2a^2+24=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.16 #125961 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)^2-7\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)+4a^2+4=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.17 #125959 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)^2-8\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)-a^2+17=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.18 #126315 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)^2-8\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)-a^2+17=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.19 #126316 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)^2-8\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)+a^2-17=0$$

имеет ровно два различных решения.

ШКОЛКОВО

№18.20 #125968 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-2a-1|+|x-2a+1|)^2+a\left(|x-2a-1|+|x-2a+1|\right)+a^2-48=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.21 #125960 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-2|+|x-a+2|)^2-a\cdot(|x-a-2|+|x-a+2|)+a^2-48=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.22 #125956 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-2|+|x-a+2|)^2-a\cdot(|x-a-2|+|x-a+2|)+a^2-64=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.23 #125946 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-2|+|x-a+2|)^2-a(|x-a-2|+|x-a+2|)+a-64=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.24 #125942 (Центр, 27.05)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-8|-|x-a|)^2-7a(|x-8|-|x-a|)+10a^2+6a-4=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.25 #126231 (Центр, 26.05)
При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt[4]{a^4+x^4}=\cos\frac{x}{2}+a^2-2a+1$$

имеет единственное решение?

№18.26 #2645 (Центр, 26.05)
При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2+a\mathrm{tg}\,(\cos x)+a^2=0$$

имеет единственное решение?

№18.27 #126321 (Центр, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-1|+|x-a+1|)^2+a(|x-a-1|+|x-a+1|)+a^2-16=0$$

имеет ровно два различных решения.

ШКОЛКОВО

№18.28 #127069 (Сибирь, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(3x+|x-a|+|2x+a+1|)^2+a\,(3x+|x-a|+|2x+a+1|)+a^2-16=0$$

имеет ровно одно решение.

Задачи №19. Условия

№19.1 #125976 (Дальний восток, 27.05)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

№19.2 #125977 (Дальний восток, 27.05)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 25, меньше, чем чисел, делящихся на 29.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 25?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 25?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

№19.3 #126260 (Дальний восток, 27.05)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 15, меньше, чем чисел, делящихся на 17.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 15?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 15?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

№19.4 #125979 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырех или семи чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 563 и 1417?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 563?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

№19.5 #125980 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых пяти или шести чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 602 и 1512?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 602?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

№19.6 #126261 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 431 и 2031?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 431?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

№19.7 #126262 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырёх или семи чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 567 и 1414?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 567?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

№19.8 #126263 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трёх или пяти чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 305 и 1511?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 305?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

№19.9 #126264 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 403 и 2013?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 403?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

№19.10 #125982 (Центр, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30035.

а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 325?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел быть равным 7?

в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

№19.11 #125985 (Центр, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30032.

а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 312?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел быть равным 6?

в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

№19.12 #126265 (Центр, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30033.

а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 303?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел быть равным 31?

в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

№19.13 #126272 (Центр, 27.05)

На доске записано некоторое количество последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять делятся на 15.

а) Могло ли среди записанных чисел быть больше 5 чисел, делящихся на 16?

б) Могло ли среди записанных чисел быть меньше пяти чисел, делящихся на 11?

в) Найдите наибольшее возможное число k такое, что среди записанных чисел больше пяти чисел делятся на k.

№19.14 #125987 (Центр, 27.05)

а) Приведите пример семизначного числа, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 206, 835, 930.

б) Существует ли восьмизначное число, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 247, 345, 586, 812?

в) Найдите наименьшее натуральное число, из которого можно получить все натуральные числа от 1 до 50, вычеркивая цифры.

№19.15 #125163 (Центр, 26.05)

В парке n аттракционов. С 11 до 12 часов дня парк посетило только n детей. Стоимость посещения каждого аттракциона составляет 10 рублей. Каждый ребёнок потратил или 30, или 140 рублей, причём не все дети потратили поровну денег. Один аттракцион можно посетить много раз.

а) Может ли выручка каждого аттракциона составить ровно 80 рублей?

б) Какое наименьшее количество детей могло быть, если известно, что все аттракционы получили одинаковую выручку?

в) Любые два аттракциона имеют разную выручку (возможно, нулевую). Каково наибольшее возможное количество посетивших парк детей?

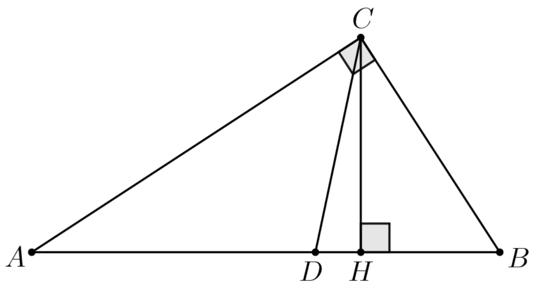
ШКОЛКОВО

Первая часть. Решения

Задачи №1. Решения

№1.1 #119208 (Дальний восток, 27.05)

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $67°$. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

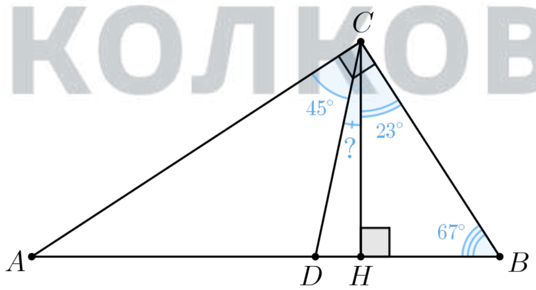


Ответ: 22

Решение. В прямоугольном треугольнике ABC высота CH, проведенная из прямого угла $\angle C$, перпендикулярна гипотенузе AB. Из этого следует, что $\angle CHB = 90°$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH. Сумма его острых углов равна $90°$, значит,

$$\angle CBH + \angle BCH = 90°$$
$$\angle BCH = 90° - \angle CBH = 90° - 67° = 23°$$



В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса CD делит прямой угол $\angle C$ пополам, следовательно,

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle C = 45°.$$

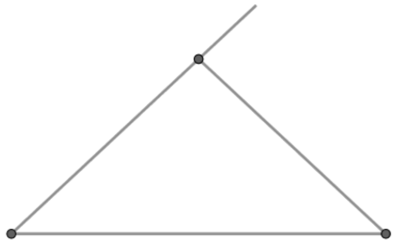
Угол DCH — угол между высотой CH и биссектрисой CD. Получаем:

$$\angle ACD + \angle DCH + \angle BCH = 90°$$
$$\angle DCH = 90° - (\angle ACD + \angle BCH) =$$
$$= 90° - (45° + 23°) = 22°$$

Таким образом, угол между высотой CH и биссектрисой CD равен $22°$.

№1.2 #20857 (Сибирь, 27.05)

Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 86°. Найдите наименьший из внутренних углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

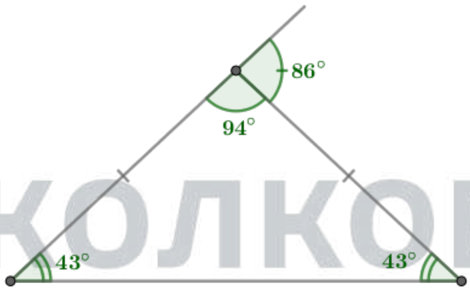


Ответ: 43

Решение. Углы при основании равнобедренного треугольника всегда меньше 90°. Значит, смежные им углы всегда больше 90° градусов. Тогда внешний угол, данный в условии, смежен углу при противоположной основанию вершине равнобедренного треугольника.

Следовательно, угол при противоположной основанию вершине равнобедренного треугольника равен

$$180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$



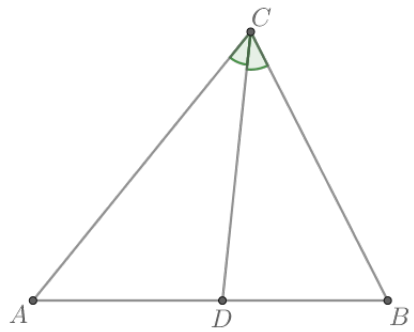
Углы при основании равнобедренного треугольника одинаковые, тогда по сумме углов треугольника они равны

$$\frac{180^\circ - 94^\circ}{2} = \frac{86^\circ}{2} = 43^\circ$$

Так как $43 < 94$, то меньший из углов треугольника равен 43°.

№1.3 **#1394** (Центр, 27.05)

В треугольнике ABC известно, что CD — биссектриса, $\angle B = 63^\circ$, $\angle ACD = 33^\circ$. Найдите $\angle ADC$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 96

Решение. Так как CD — биссектриса, то $\angle ACD = \angle DCB$.
Тогда имеем:

$$\angle ACB = 2 \cdot 33^\circ = 66^\circ$$

Сумма углов треугольника равна 180°, тогда для треугольника ABC получаем

$$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle ACB = 180^\circ - 63^\circ - 66^\circ = 51^\circ$$

Окончательно для треугольника ACD имеем:

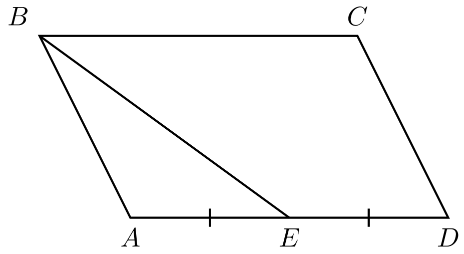
$$\angle A + \angle ACD + \angle ADC = 180^\circ$$

$$51^\circ + 33^\circ + \angle ADC = 180^\circ$$

$$\angle ADC = 96^\circ$$

№1.4 #126352 (Центр, 26.05)

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь треугольника ABE.



Ответ: 3

Решение. Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$ из точки B к стороне AD. Тогда

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = 2AE \cdot h$$

Но также, заметим, что

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} AE \cdot h$$

Тогда получаем, что

$$S_{ABE} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{12}{4} = 3$$

ШКОЛКОВО

Задачи №2. Решения

№2.1 (Дальний восток, 27.05)

Даны векторы $\vec{a}(5;-7)$ и $\vec{b}(14;1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: 63

Решение. Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(x_1;y_1)$ и $\vec{b}\,(x_2;y_2)$ равно

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

Следовательно,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot 14+(-7)\cdot 1=70-7=63.$$

№2.2 (Центр, 27.05)

Даны векторы $\vec{a}(3;3)$, $\vec{b}(9;8)$ и $\vec{c}(13;29)$. Найдите длину вектора $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Ответ: 25

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}:$

$$\vec{r}(3-9+13;3-8+29)=\vec{r}(7;24).$$

Тогда длина вектора $\vec{r}$ равна

$$|\vec{r}|=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$$

№2.3 (Центр, 26.05)

Даны векторы $\vec{a}(2;1)$ и $\vec{b}(1;-3)$. Найдите скалярное произведение векторов $2\vec{a}+\vec{b}$ и $5\vec{a}-\vec{b}$.

Ответ: 37

Решение. Для того чтобы найти скалярное произведение данных векторов, необходимо вычислить их координаты:

$$2\vec{a}+\vec{b}=(2\cdot 2+1;2\cdot 1+(-3))=(5;-1)$$
$$5\vec{a}-\vec{b}=(5\cdot 2-1;5\cdot 1-(-3))=(9;8)$$

Тогда скалярное произведение равно

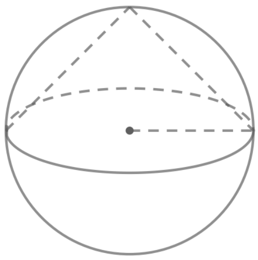
$$\left(2\vec{a}+\vec{b};5\vec{a}-\vec{b}\right)=5\cdot 9+(-1)\cdot 8=37.$$

ШКОЛКОВО

Задачи №3. Решения

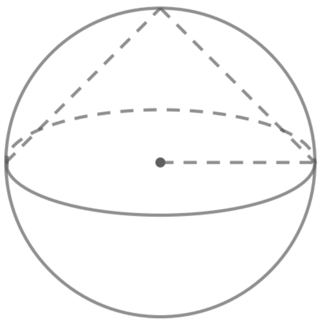
№3.1 **#21444** (Дальний восток, 27.05)

Около конуса описана сфера, то есть сфера содержит окружность основания конуса и его вершину. Центр основания конуса совпадает с центром сферы, а ее радиус равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



Ответ: 20

Решение. Рассмотрим треугольник AOB, где точка O — центр сферы, точка A принадлежит окружности основания конуса, точка B — вершина конуса. Тогда AB — это образующая конуса.



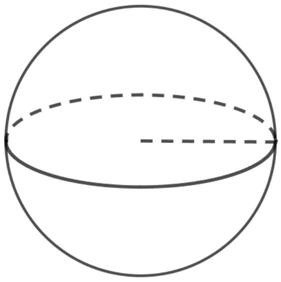
Так как центр сферы совпадает с центром основания конуса, то BO — высота конуса и $BO \perp AO$. Кроме того, AO и BO — радиусы сферы. Тогда для треугольника AOB по теореме Пифагора имеем:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

$$AB = \sqrt{200 + 200} = 20$$

№3.2 **#18609** (Дальний восток, 27.05)

Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.



Ответ: 6

Решение. Площадь поверхности шара вычисляется по площади

$$S = 4\pi R^2$$

Здесь R — радиус шара.

Площадь большого круга шара вычисляется по формуле

$$S_k = \pi R^2$$

Здесь R — радиус шара.

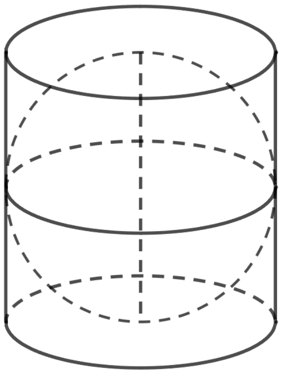
Тогда искомая площадь равна

$$S_k = \pi R^2 = \frac{1}{4} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$

ШКОЛКОВО

№3.3 #83432 (Сибирь, 27.05)

Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 30. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: 20

Решение. Так как шар вписан в цилиндр, то радиус шара равен радиусу цилиндра, а высота цилиндра равна двум радиусам шара.

Пусть радиус шара равен R. Тогда радиус цилиндра равен R, высота цилиндра равна $2R$.

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле

$$S = 4\pi r^2,$$

где r — радиус шара.

Тогда площадь поверхности шара равна

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$$

Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh,$$

где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок.}}$ — площадь боковой поверхности, r — радиус цилиндра, h — высота цилиндра.

Тогда площадь полной повехрности цилиндра равна

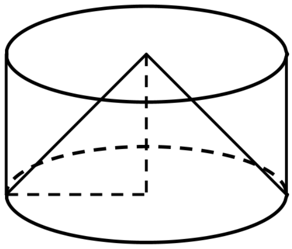
$$S_{\text{цил.}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$$

Найдем отношение площади поверхности шара к площади полной поверхности цилиндра:

$$\frac{S_{\text{шара.}}}{S_{\text{цил.}}} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_{\text{шара}} = \frac{2}{3}S_{\text{цил.}} = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20$$

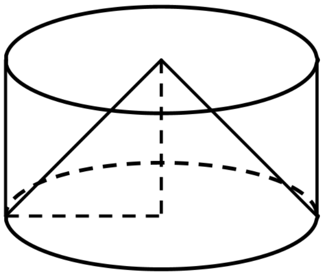
№3.4 #120547 (Центр, 27.05)

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $6\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Ответ: 6

Решение.



Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок ц.}} = 2\pi Rh,$$

где R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Площадь же боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок к.}} = \pi Rl,$$

где R — радиус основания, l — образующая конуса.

В данной нам задаче $h = R$. Выразим теперь l через R. На картинке это образующая OA, которую можно вычислить по теореме Пифагора для треугольника AOH :

$$OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}.$$

Получим, что площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$S_{\text{бок ц.}} = 2\pi Rh = 2\pi R^2,$$

а площадь боковой поверхности конуса равна

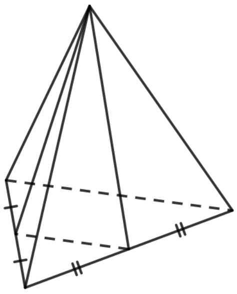
$$S_{\text{бок к.}} = \pi Rl = \sqrt{2}\pi R^2,$$

то есть площадь боковой поверхности конуса в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем площадь боковой поверхности цилиндра, то есть равна

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6.$$

№3.5 **#126354** (Центр, 26.05)

От треугольной пирамиды, объём которой равен 34, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.



Ответ: 8,5

Решение. Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{2}$.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, следовательно, площадь отсекаемого треугольника в 4 раза меньше площади исходного треугольника.

Высоты исходной пирамиды и отсеченной, проведенные к плоскости этого треугольника, одинаковы. Следовательно, объем отсеченной пирамиды в 4 раза меньше объема исходной пирамиды:

$$V = \frac{1}{4}\cdot 34 = 8{,}5$$

ШКОЛКОВО

Задачи №4. Решения

№4.1 (Дальний восток, 27.05)

На олимпиаде по математике 320 участников собираются разместить в пяти аудиториях: в четырех — по 60 человек, а оставшихся — в запасной аудитории в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник будет писать олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: 0,25

Решение. Найдем, сколько учеников будут писать олимпиаду в запасной аудитории:

$$320 - 4 \cdot 60 = 320 - 240 = 80.$$

Тогда вероятность того, что случайно выбранный ученик будет писать олимпиаду в запасной аудитории, равна:

$$p = \frac{80}{320} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

№4.2 (Сибирь, 27.05)

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов: первые три дня по 11 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: 0,28

Решение. В четвертый и пятый дни количество докладов будет равно

$$\frac{75 - 11 \cdot 3}{2} = 21.$$

Пронумеруем все 75 докладов номерами от 1 до 75. Если порядок докладов определяется жеребьевкой, то профессор М. с равной вероятностью получит один из номеров от 1 до 75. Из них 21 номер соответствует последнему дню конференции. Следовательно, искомая вероятность равна

$$p = \frac{21}{75} = \frac{7}{25} = 0{,}28.$$

№4.3 (Центр, 27.05)

На конференцию приехали учёные из трёх стран: 8 из Уругвая, 7 из Чили и 5 из Парагвая. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что вторым окажется доклад учёного из Чили.

Ответ: 0,35

Решение. Всего в конференции принимает участие $8+7+5 = 20$ учёных. Каждый ученый с одинаковой вероятностью может выступать вторым, поэтому вероятность того, что вторым будет выступать учёный из Чили, равна

$$\frac{7}{20} = 0{,}35.$$

№4.4 (Центр, 26.05)

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Мотор» по очереди играет с командами «Статор», «Стартер» и «Ротор». Найдите вероятность того, что «Мотор» будет начинать с мячом только вторую игру.

Ответ: 0,125

Решение. По условию команда «Мотор» должна начинать первую игру без мяча, вторую игру — с мячом, а третью — вновь без мяча. Вероятность каждого из перечисленных событий равна 0,5.

Тогда искомая вероятность равна произведению вероятностей этих трех событий:

$$p = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$$

ШКОЛКОВО

Задачи №5. Решения

№5.1 (Дальний восток, 27.05)

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,92. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: 0,029

Решение. Батарейка будет забракована в двух случаях: либо когда она исправна, либо когда не исправна. Вероятность того, что перед нами забракованная системой исправная батарейка, равна

$$(1-0{,}01)\cdot 0{,}02$$

Вероятность того, что перед нами забракованная системой неисправная батарейка, равна

$$0{,}01\cdot 0{,}92$$

Тогда вероятность того, что батарейка будет забракована, равна

$$p=(1-0{,}01)\cdot 0{,}02+0{,}01\cdot 0{,}92=0{,}029.$$

№5.2 (Сибирь, 27.05)

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Ответ: 0,89

Решение. Так как вероятность того, что масса буханки окажется меньше 810 г, равна 0,96, то вероятность того, что масса буханки окажется не меньше 810 г, равна

$$p_1=1-0{,}96=0{,}04.$$

Так как вероятность того, что масса буханки больше 790 г, равна 0,93, то вероятность того, что масса буханки не больше 790 г, равна

$$p_2=1-0{,}93=0{,}07.$$

Тогда вероятность того, что масса буханки больше 790 г и меньше 810 г, равна

$$1-p_1-p_2=1-0{,}04-0{,}07=0{,}89.$$

№5.3 (Центр, 27.05)

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,25. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,1. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ: 0,6

Решение. Пусть событие A — это событие «кофе закончился в первом автомате», событие B — «кофе закончился во втором автомате», событие AB — «кофе закончился в двух автоматах».
По условию мы знаем вероятности этих событий:

$$P(A)=P(B)=0{,}25,\quad P(AB)=0{,}1.$$

Найдем вероятность того, что кофе закончился хотя бы в одном автомате:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-P(AB)=2\cdot 0{,}25-0{,}1=0{,}5-0{,}1=0{,}4.$$

Вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах:

$$1 - P(A + B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

№5.4 (Центр, 26.05)

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,6. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: 0,784

Решение. Найдём вероятность противоположного события, то есть того, что все лампы перегорят:

$$0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216.$$

Тогда искомая вероятность равна:

$$p = 1 - 0{,}216 = 0{,}784.$$

ШКОЛКОВО

Задачи №6. Решения

№6.1 (Дальний восток, 27.05)

Решите уравнение $7^{x-4} = 49$.

Ответ: 6

Решение. По свойствам степени имеем:

$$7^{x-4} = 49$$
$$7^{x-4} = 7^2$$
$$x - 4 = 2$$
$$x = 6$$

№6.2 (Центр, 27.05)

Решите уравнение $0{,}2^{2-5x} = 125$.

Ответ: 1

Решение. По свойству степеней $a^{-1} = \frac{1}{a}$ имеем:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2-5x} = 125$$
$$5^{-(2-5x)} = 5^3$$

Переходим от равенства степеней к равенству показателей:

$$-(2-5x) = 3$$
$$-2 + 5x = 3$$
$$5x = 5$$
$$x = 1$$

№6.3 (Центр, 26.05)

Найдите корень уравнения $\log_5(x-6) = 2$.

Ответ: 31

Решение. По свойствам логарифма имеем:

$$\log_5(x-6) = 2$$
$$\log_5(x-6) = \log_5 5^2$$
$$x - 6 = 25$$
$$x = 31$$

Задачи №7. Решения

№7.1 (Дальний восток, 27.05)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 125}{\log_9 5}$.

Ответ: 3

Решение. По формуле перехода к новому основанию $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ исходное выражение равно

$$\log_5 125 = 3.$$

№7.2 (Сибирь, 27.05)

Найдите значение выражения $\log_5 0{,}2 + \log_{0{,}5} 4$.

Ответ: -3

Решение.

$$\log_5 0{,}2 + \log_{0{,}5} 4 = \log_5 \frac{1}{5} + 2\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1 - 2 = -3.$$

№7.3 (Центр, 27.05)

Найдите значение выражения $\log_{0{,}2} 100 - \log_{0{,}2} 4$.

Ответ: -2

Решение.

$$\log_{0{,}2} 100 - \log_{0{,}2} 4 = \log_{0{,}2} \frac{100}{4} =$$
$$= \log_{\frac{1}{5}} 25 = \log_{5^{-1}} 5^2 =$$
$$= -2\log_5 5 = -2.$$

№7.4 (Центр, 26.05)

Найдите значение выражения $2\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}1$.

Ответ: $-1{,}96$

Решение. Вспомним формулу косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

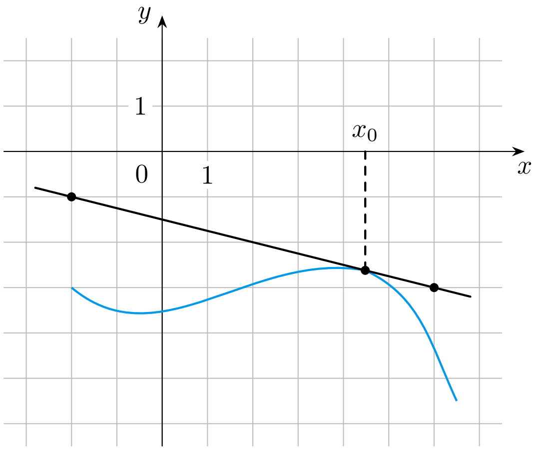
Тогда имеем:

$$2\cos 2\alpha = 2\left(2\cos^2\alpha - 1\right) =$$
$$= 2\left(2\cdot 0{,}1^2 - 1\right) = 2\left(2\cdot 0{,}01 - 1\right) =$$
$$= 2\cdot(0{,}02 - 1) = 2\cdot(-0{,}98) = -1{,}96.$$

Задачи №8. Решения

№8.1 **#11715** (Дальний восток, 26.05)

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: $-0{,}25$

Решение. Производная функции в точке с абциссой x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Если прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то тангенс угла наклона этой прямой равен

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ШКОЛКОВО

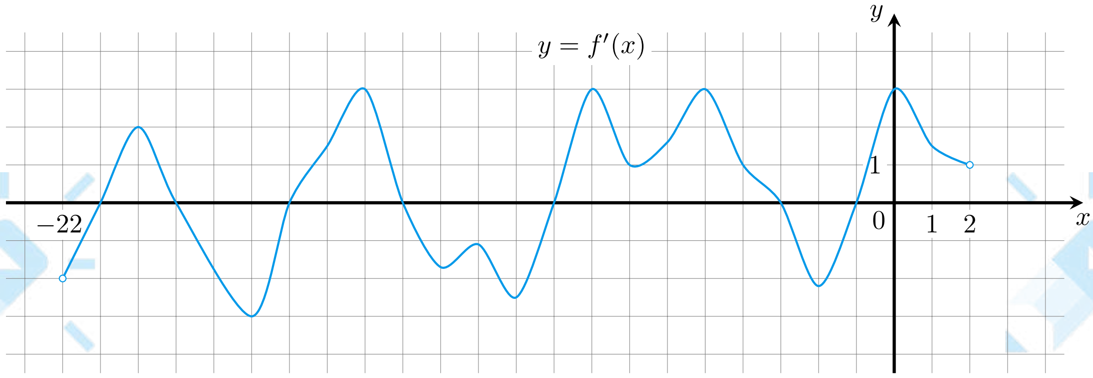
По картинке видно, что касательная проходит через точки $(-2; -1)$ и $(6; -3)$.

Тогда имеем:

$$f'(x_0) = \frac{(-1) - (-3)}{(-2) - 6} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

№8.2 **#118820** (Сибирь, 27.05)

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-22; 2)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-18;\ 1]$.



Ответ: 3

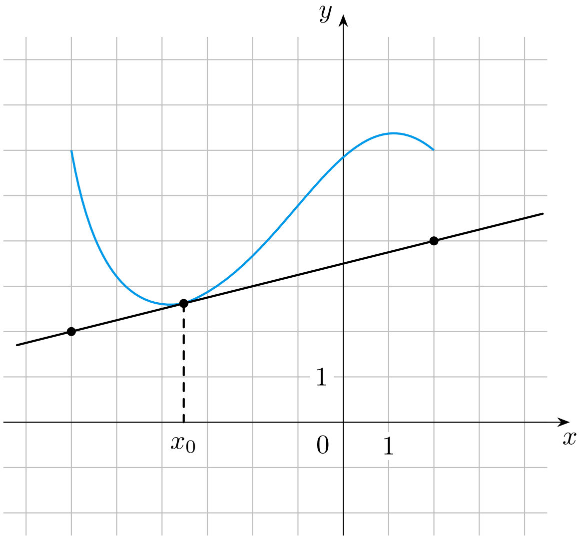
Решение. В точке минимума функции её производная обнуляется и меняет знак с «–» на «+» при движении слева направо, так как до точки минимума функция убывала, а после — начала возрастать.
На отрезке $[-18; 1]$ производная обнуляется пять раз — в точках

$$x_1 = -16,\ x_2 = -13,\ x_3 = -9,\ x_4 = -3,\ x_5 = -1$$

В точке $x_1 = -16$ производная поменяла знак с «–» на «+».
В точке $x_2 = -13$ производная поменяла знак с «+» на «–».
В точке $x_3 = -9$ производная поменяла знак с «–» на «+».
В точке $x_4 = -3$ производная поменяла знак с «+» на «–».
В точке $x_5 = -1$ производная поменяла знак с «–» на «+».
Значит, $x_1 = -16$, $x_3 = -9$, $x_5 = -1$ — точки минимума на отрезке $[-18; 1]$.
Таким образом, функция $f(x)$ имеет 3 точки минимума, принадлежащих отрезку $[-18;\ 1]$.

№8.3 **#19488** (Центр, 27.05)

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: 0,25

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке. Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона данной прямой.

По условию касательная проходит через точки $(2; 4)$ и $(-6; 2)$. Если прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то тангенс угла её наклона равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ШКОЛКОВО

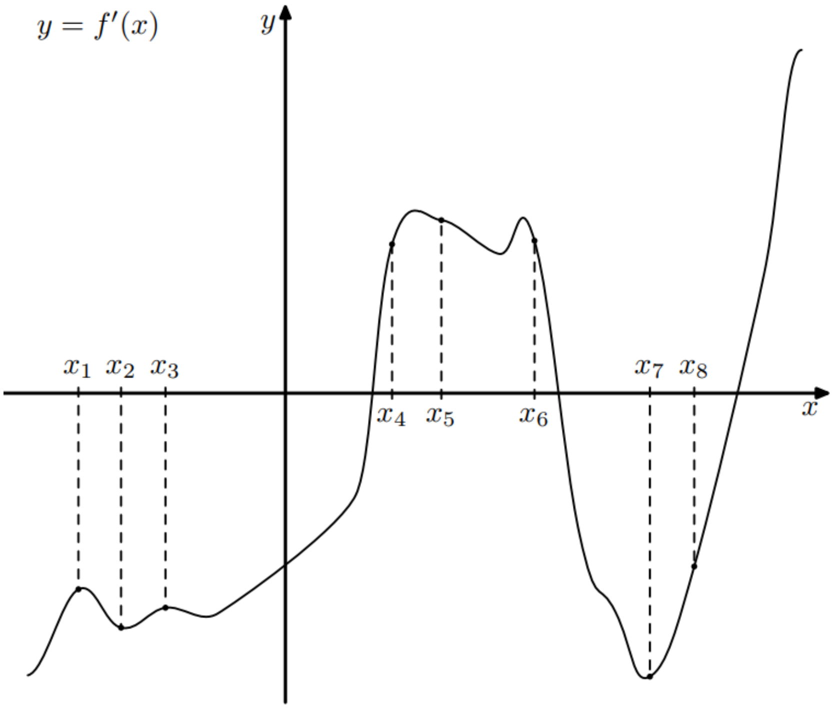
Тогда мы можем вычислить производную функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{4 - 2}{2 - (-6)} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

№8.4 #91260 (Центр, 26.05)

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



Ответ: 3

Решение. Если производная положительна на промежутке, то функция на этом промежутке возрастает. Среди указанных точек производная положительна в точках x_4, x_5, x_6. Таких точек всего три.

Задачи №9. Решения

№9.1 (Дальний восток, 27.05)

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость v вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость 150 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Ответ: 12500

Решение. Подставим данные в формулу:

$$150=\sqrt{2\cdot 0{,}9a}$$
$$150^2=2\cdot 0{,}9a$$
$$3^2\cdot 50^2=2\cdot\frac{3^2}{10}a$$
$$a=\frac{3^2\cdot 50^2\cdot 10}{2\cdot 3^2}$$
$$a=12500$$

№9.2 (Центр, 27.05)

Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 25,6 километра? Ответ дайте в метрах.

Ответ: 51,2

Решение. Выразим из формулы расстояния высоту над Землей:

$$h=\frac{l^2\cdot 500}{R}$$

Тогда наблюдатель находится на высоте в метрах, равной

$$h=\frac{25{,}6^2\cdot 500}{6400}=$$
$$=\frac{256^2\cdot 5}{6400}=\frac{\left(4^4\right)^2\cdot 5}{4^3\cdot 100}=\frac{4^8\cdot 5}{4^3\cdot 100}=$$
$$=\frac{4^5}{20}=\frac{4^4}{5}=51{,}2$$

№9.3 (Центр, 26.05)

Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0=24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a=3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошел путь $S=v_0t-\frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 6

Решение. Подставим данные в формулу:

$$90=24t-\frac{3t^2}{2}$$
$$3t^2-48t+180=0$$
$$t^2-16t+60=0\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&t=6\\&t=10\end{aligned}\right.$$

Так как через $t_0 = 8$ секунд, где t_0 — абсцисса вершины параболы $y = 24t - \dfrac{3t^2}{2}$, автомобиль остановится, то следует из двух корней выбрать меньший, то есть $t = 6$.
Следовательно, с момента начала торможения прошло 6 секунд.

ШКОЛКОВО

Задачи №10. Решения

№10.1 #99980 (Дальний восток, 27.05)

От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 240 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним, со скоростью на 8 км/ч больше, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 12

Решение. Пусть скорость первого теплохода равна x км/ч, при этом $x > 0$. Составим таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Первый теплоход	x	$\dfrac{240}{x}$	240
Второй теплоход	$x+8$	$\dfrac{240}{x+8}$	240

Так как второй теплоход вышел на 8 часов позже, то его время на 8 часов меньше. Составим уравнение:

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+8} = 8$$
$$\frac{240x + 240\cdot 8 - 240x}{x(x+8)} = 8$$
$$\frac{240\cdot 8}{x(x+8)} = 8$$

Так как $x \neq -8$, $x \neq 0$, то можем домножить обе части уравнения на $x(x+8,)$ получим:

$$240\cdot 8 = 8x(x+8) \quad |:8$$
$$240 = x(x+8)$$
$$x^2 + 8x - 240 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D = 8^2 + 4\cdot 240 = 8^2(1+15) = 8^2\cdot 4^2 = 32^2.$$

Тогда корни квадратного уравнения равны

$$x_1 = \frac{-8+32}{2} = 12 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-8-32}{2} < 0.$$

Так как $x > 0$, то скорость первого теплохода равна 12 км/ч.

№10.2 #37890 (Сибирь, 27.05)

Два автомобиля одновременно отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 24 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 84

Решение. Обозначим искомую скорость первого автомобиля за x. Тогда скорость второго автомобиля равна $(x-24)$ км/ч.

Найдем время, за которое автомобили преодолевают 420 километров. Для первого это $\frac{420}{x}$ часов, для второго — $\frac{420}{x-24}$ часов. По условию первый автомобиль прибывает к финишу на 2 часа раньше второго, имеем уравнение:

$$\frac{420}{x}+2=\frac{420}{x-24}$$

$$\frac{420+2x}{x}=\frac{420}{x-24}$$

$$(420+2x)(x-24)=420x$$

$$2x^2+420x-48x-420\cdot 24=420x$$

$$2x^2-48x-420\cdot 24=0$$

$$x^2-24x-210\cdot 24=0$$

$$D=24^2+4\cdot 210\cdot 24=24^2+24^2\cdot 35=$$
$$=24^2\cdot 36=24^2\cdot 6^2=144^2$$

Отсюда

$$x=\frac{24+144}{2}=84 \quad \text{или} \quad x=\frac{24-144}{2}=-60$$

Скорость – величина неотрицательная, поэтому нам подходит ответ $x=84$ км/ч.

ШКОЛКОВО

№10.3 #20838 (Центр, 27.05)

Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 30 км от A. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00 того же дня. Определите собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки равна 1 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: 11

Решение. Обозначим скорость лодки через x км/ч, $x > 0$.

Тогда скорость лодки по течению равна $x + 1$ км/ч. Следовательно, время, затраченное на путь по течению, составляет $\frac{30}{x+1}$ часа.

При этом скорость лодки против течения равна $x - 1$ км/ч. Следовательно, время, затраченное на путь против течения, составляет $\frac{30}{x-1}$ часа.

Учитывая то, что лодка пробыла в пункте B 2,5 часа и затратила на всю дорогу $18 - 10 = 8$ часов, получаем уравнение:

$$\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} + 2{,}5 = 8$$

$$\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 5{,}5$$

$$\frac{30(x-1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{30(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5{,}5(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$30x - 30 + 30x + 30 = 5{,}5x^2 - 5{,}5$$

$$5{,}5x^2 - 60x - 5{,}5 = 0$$

$$x = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 + 4 \cdot 5{,}5 \cdot 5{,}5}}{2 \cdot 5{,}5} = \frac{60 \pm \sqrt{3600 + 121}}{11} = \frac{60 \pm 61}{11}$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{121}{11} = 11 \\ &x = -\frac{1}{11} \end{aligned}\right.$$

С учетом условия $x > 0$ подходит только $x = 11$.

№10.4 #126361 (Центр, 26.05)
Наташа выполняет работу за 51 час, а Саша и Наташа вместе выполняют ту же работу за 34 часа. За сколько часов выполнит работу Саша?

Ответ: 102
Решение. Пусть x — скорость Наташи, а y — скорость Саши.
По условию имеем:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{51} \\ x + y = \frac{1}{34} \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго, получим

$$y = \frac{1}{34} - \frac{1}{51} = \frac{3-2}{17 \cdot 6} = \frac{1}{102}$$

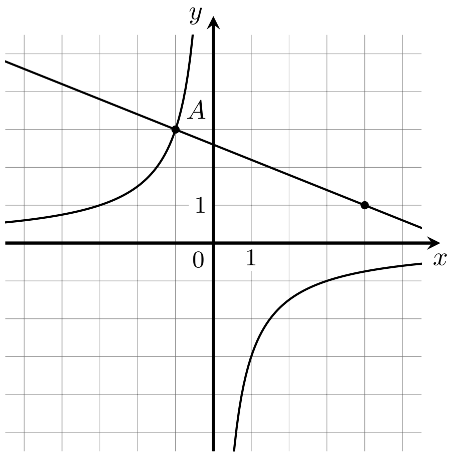
Таким образом, Саша выполнит работу за 102 часа.

ШКОЛКОВО

Задачи №11. Решения

№11.1 #100214 (Дальний восток, 27.05)

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 7,5

Решение. Найдём уравнение прямой. Коэффициент a определим по формуле

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

где $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — любые две точки на прямой.
По рисунку видно, что прямая проходит через точки $(-1; 3)$ и $(4; 1)$. Тогда

$$a = \frac{1-3}{4-(-1)} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Таким образом, получим уравнение прямой

$$g(x) = -\frac{2}{5}x + b.$$

Чтобы найти b, подставим одну из точек в наше уравнение, например, точку $(4; 1)$. Её координаты обратят уравнение функции в верное равенство:

$$g(4) = 1$$

$$-\frac{2}{5} \cdot 4 + b = 1$$

$$b = 1 + \frac{8}{5}$$

$$b = \frac{13}{5}$$

Значит,

$$g(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}.$$

Найдём уравнение гиперболы. Она проходит через точку $(-1; 3)$, значит, её координаты обратят уравнение функции в верное равенство:

$$f(-1) = 3$$

$$\frac{k}{-1} = 3$$

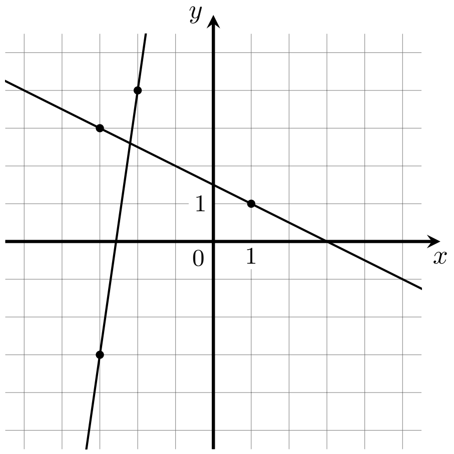
$$k = -3$$

Получили
$$f(x) = -\frac{3}{x}.$$
Чтобы найти координаты точки B, решим уравнение $f(x) = g(x)$:
$$-\frac{3}{x} = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}$$
$$-15 = -2x^2 + 13x$$
$$2x^2 - 13x - 15 = 0$$
$$(x+1)(2x-15) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 7{,}5 \end{array}\right.$$
Значение $x = -1$ — это абсцисса точки A, тогда $x = 7{,}5$ — это абсцисса точки B.

ШКОЛКОВО

№11.2 #100207 (Сибирь, 27.05)

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



Ответ: $-2{,}2$

Решение. Пусть $f(x) = k_1x + b_1$ — уравнение первой прямой, $g(x) = k_2x + b_2$ — уравнение второй прямой. Заметим, что прямая $y = f(x)$ проходит через точки $(-3; -3)$ и $(-2; 4)$. Если прямая проходит через точку на плоскости, то координаты этой точки обращают уравнение этой прямой в верное равенство. Тогда получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} f(-3) = -3 \\ f(-2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 \cdot (-3) + b_1 = -3 \\ k_1 \cdot (-2) + b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3k_1 + b_1 = -3 \\ -2k_1 + b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 7 \\ -2k_1 + b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 7 \\ -14 + b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 7 \\ b_1 = 18 \end{cases}$$

Значит, уравнение первой прямой имеет вид

$$f(x) = 7x + 18.$$

Вторая прямая проходит через точки $(-3; 3)$ и $(1; 1)$. Следовательно, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} g(-3) = 3 \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 \cdot (-3) + b_2 = 3 \\ k_2 \cdot 1 + b_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3k_2 + b_2 = 3 \\ k_2 + b_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b_2 = 6 \\ k_2 + b_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = 1{,}5 \\ k_2 + b_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = 1{,}5 \\ k_2 = -0{,}5 \end{cases}$$

Значит, уравнение второй прямой имеет вид

$$g(x) = -0{,}5x + 1{,}5.$$

Пусть $A\,(x_0; y_0)$ — общая точка прямых. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} y_0 = 7x_0 + 18 \\ y_0 = -0{,}5x_0 + 1{,}5 \end{cases}$$

$$7x_0 + 18 = -0{,}5x_0 + 1{,}5$$

$$14x_0 + 36 = -x_0 + 3$$

$$15x_0 = -33$$

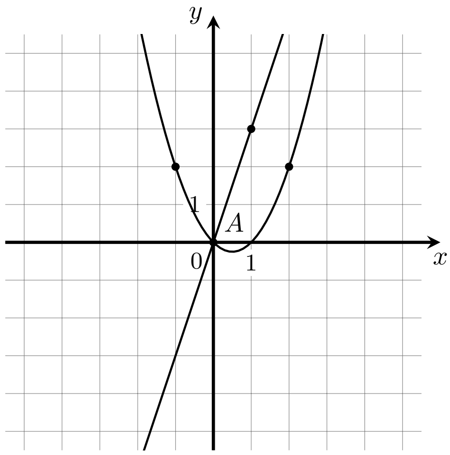
$$5x_0 = -11$$

$$x_0 = -2{,}2$$

ШКОЛКОВО

№11.3 #71607 (Центр, 27.05)

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 4

Решение. Начнем с параболы:
$f(0) = 0$, поэтому коэффициент $c = 0$.
$f(-1) = 2 \to a - b = 2 \to a = 2 + b$,
$f(2) = 2 \to 4a + 2b = 2 \to 4(2 + b) + 2b = 2 \to 8 + 6b = 2 \to b = -1$,
$a = 2 - 1 = 1 \to f(x) = x^2 - x$.
Прямая:
$g(1) = 3 \to 3 = k \cdot 1 \to k = 3 \to g(x) = 3x$.
Приравниваем две функции:

$$x^2 - x = 3x,$$

$$x^2 = 4x,$$

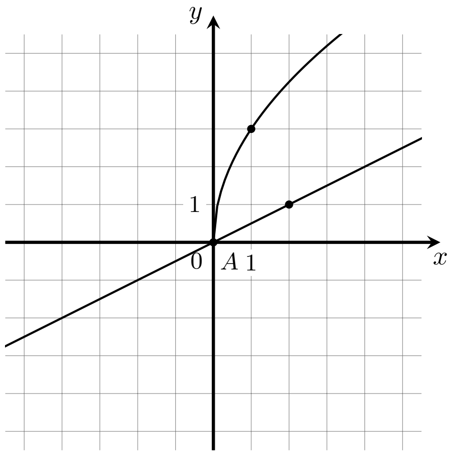
$$x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Точка пересечения $x = 0$ у нас уже изображена на рисунке, поэтому нам подходит точка $x = 4$.

ШКОЛКОВО

№11.4 #113025 (Центр, 26.05)

На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 36

Решение. Восстановим коэффициент k в уравнении прямой. Поскольку прямая проходит через точку (2;1), то получаем уравнение:

$$1 = 2k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

Поэтому уравнение прямой имеет вид:

$$g(x) = \frac{1}{2}x$$

Восстановим коэффициент a в уравнении корня. Поскольку корень проходит через точку (1;3), то получаем уравнение:

$$3 = a \cdot \sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Поэтому уравнение корня имеет вид:

$$g(x) = 3\sqrt{x}$$

Теперь найдем точки пересечения:

$$3\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$$

$$9x = \frac{1}{4}x^2$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{4}x - 9\right) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = 36 \end{aligned}\right.$$

Поскольку $x = 0$ соответствует точке A, то точке B соответствует $x = 36$.

Задачи №12. Решения

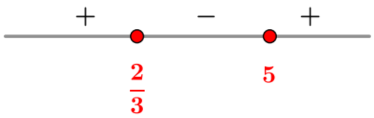
№12.1 **#17139** (Дальний восток, 27.05)

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 8{,}5x^2 + 10x - 13$.

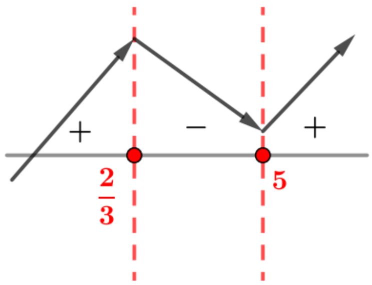
Ответ: 5

Решение. Обозначим $f(x) = x^3 - 8{,}5x^2 + 10x - 13$.

1. Найдем производную функции:
$$f'(x) = 3x^2 - 17x + 10.$$
2. Нули производной: $x = \dfrac{2}{3}$ и $x = 5$.
3. Применим метод интервалов для определения знаков производной. В каждом из нулей знак производной меняется на противоположный.



4. Теперь можем нарисовать эскиз графика. На промежутке $\left(\dfrac{2}{3}; 5\right)$ производная отрицательна, то есть исходная функция убывает. На оставшихся промежутках производная положительна и функция возрастает.



На полученном эскизе видно, что точкой минимума является $x = 5$, так как левее нее функция убывает, а правее — возрастает.

№12.2 #121851 (Центр, 27.05)

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 81x + 56$ на отрезке $[-7;\, 0]$.

Ответ: -52

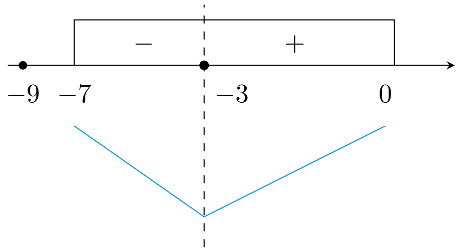
Решение. Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Исследуем функцию и найдем её промежутки возрастания и убывания, для этого найдем её производную:

$$y' = 3(x+9)(x+3)$$

Найдем нули производной

$$y' = 0 \text{ при } x = -9, \quad x = -3$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков.



Таким образом, наименьшее значение на отрезке функция принимает в точке $x = -3$. Найдем данное значение

$$y(-3) = (-3)^3 + 18\cdot(-3)^2 + 81\cdot(-3) + 56 = -27 + 162 - 243 + 56 = -52$$

№12.3 #126363 (Центр, 26.05)

Найдите точку минимума функции $y = (58 - x)e^{58-x}$.

Ответ: 59

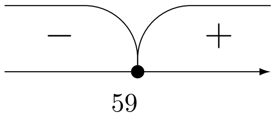
Решение. Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = (-1) \cdot e^{58-x} + (58 - x) \cdot e^{58-x} \cdot (-1) = e^{58-x}(x - 59)$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 59$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков:



При $x \in (-\infty; 59)$ производная отрицательна, то есть функция $y = y(x)$ убывает. При $x \in (59; +\infty)$ производная положительна, то есть функция возрастает. Следовательно, $x = 59$ является точкой минимума.

ШКОЛКОВО

Вторая часть. Решения

Задачи №13. Решения

№13.1 #125803 (Дальний Восток, 27.05)

а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{2}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

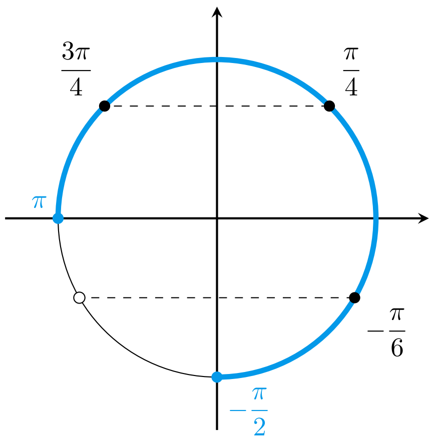
Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}$

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Тогда получаем:

$$2\sin x + 2\sqrt{2}\sin(-x) - 4\left(1 - \sin^2 x\right) = \sqrt{2} - 4$$
$$2\sin x - 2\sqrt{2}\sin x - 4 + 4\sin^2 x = \sqrt{2} - 4$$
$$2\sin x - 2\sqrt{2}\sin x + 4\sin^2 x - \sqrt{2} = 0$$
$$2\sin x + 4\sin^2 x - \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin x = 0$$
$$2\sin x(1 + 2\sin x) - \sqrt{2}(1 + 2\sin x) = 0$$
$$\left(2\sin x - \sqrt{2}\right)(1 + 2\sin x) = 0$$
$$\left[\begin{aligned} &2\sin x - \sqrt{2} = 0\\ &1 + 2\sin x = 0 \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\sin x = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\\ &x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\\ &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ лежат точки $-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}$.

№13.2 #125804 (Дальний Восток, 27.05)

а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k;\ -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

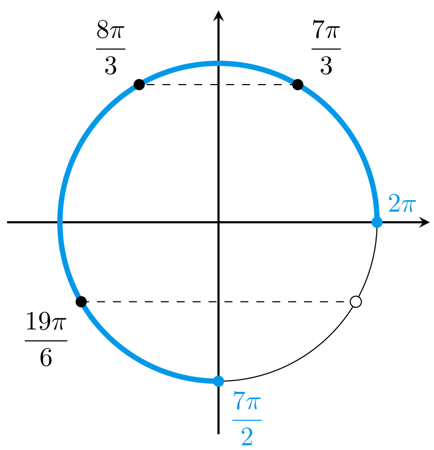
б) $\dfrac{7\pi}{3};\ \dfrac{8\pi}{3};\ \dfrac{19\pi}{6}$

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Тогда получаем:

$$2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\left(1 - \sin^2 x\right) = \sqrt{3} - 4$$
$$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4 + 4\sin^2 x = \sqrt{3} - 4$$
$$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x + 4\sin^2 x - \sqrt{3} = 0$$
$$2\sin x + 4\sin^2 x - \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sin x = 0$$
$$2\sin x(1 + 2\sin x) - \sqrt{3}(1 + 2\sin x) = 0$$
$$\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)(1 + 2\sin x) = 0$$
$$\left[\begin{aligned} &2\sin x - \sqrt{3} = 0\\ &1 + 2\sin x = 0 \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\sin x = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\\ &x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\\ &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

ШКОЛКОВО

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{7\pi}{3};\ \dfrac{8\pi}{3};\ \dfrac{19\pi}{6}$.

№13.3 #125805 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2 + 2\cos(\pi + 2x) - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} - \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{3\pi}{4};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}$

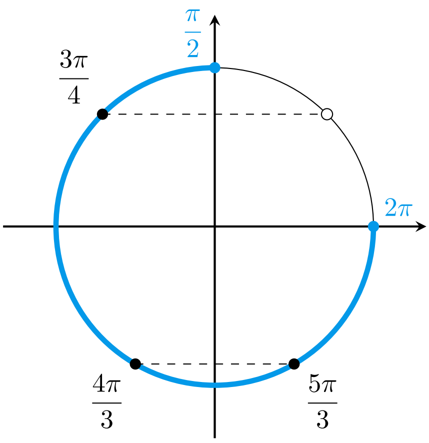
Решение. а) По формуле приведения и формуле косинуса двойного угла получаем:

$$\cos(\pi + 2x) = -\cos 2x = 2\sin^2 x - 1.$$

Тогда

$$2 + 2\cos(\pi + 2x) - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} - \sqrt{12}\sin x$$
$$2 + 4\sin^2 x - 2 - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} - \sqrt{12}\sin x$$
$$4\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{6} = 0$$
$$2\sin x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) + \sqrt{3}\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0$$
$$\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0$$
$$\left[\begin{aligned} &2\sin x + \sqrt{3} = 0 \\ &2\sin x - \sqrt{2} = 0 \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ лежат точки $\frac{3\pi}{4};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}$.

№13.4 #125806 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2-2\cos(\pi+2x)-\sqrt{8}\cos x=\sqrt{6}-\sqrt{12}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{7\pi}{4}$

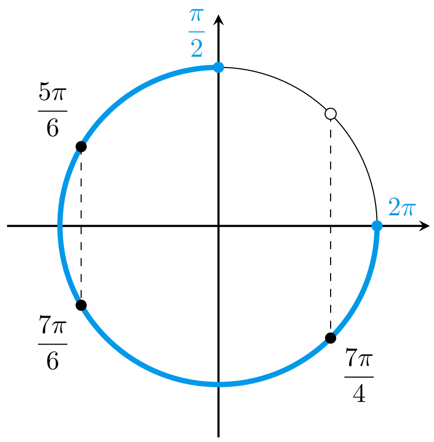
Решение. а) По формуле приведения и формуле косинуса двойного угла получаем:

$$\cos(\pi+2x)=-\cos 2x=1-2\cos^2 x.$$

Тогда

$$\begin{gathered}
2-2\cos(\pi+2x)-\sqrt{8}\cos x=\sqrt{6}-\sqrt{12}\cos x\\
2-2+4\cos^2 x-\sqrt{8}\cos x=\sqrt{6}-\sqrt{12}\cos x\\
4\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x+2\sqrt{3}\cos x-\sqrt{6}=0\\
2\cos x\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=0\\
\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=0\\
\left[\begin{array}{l}2\cos x+\sqrt{3}=0\\2\cos x-\sqrt{2}=0\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.
\end{gathered}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ лежат точки $\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{7\pi}{4}$.

№13.5 #125836 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2 + 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{13\pi}{4};\ \dfrac{15\pi}{4};\ \dfrac{13\pi}{3}$

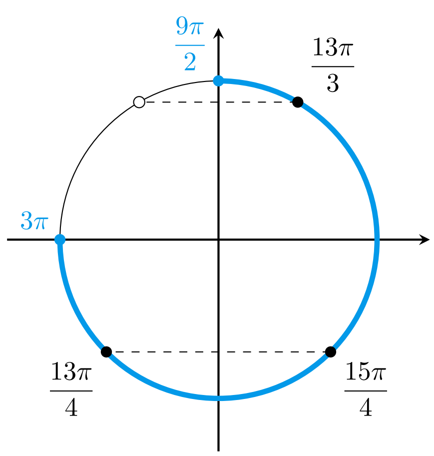
Решение. а) По формуле приведения и формуле косинуса двойного угла получаем:

$$\cos(\pi - 2x) = -\cos 2x = 2\sin^2 x - 1.$$

Тогда

$$\begin{gathered}
2 + 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x\\
2 + 4\sin^2 x - 2 + \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x\\
4\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{6} = 0\\
2\sin x\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) - \sqrt{3}\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0\\
\left(2\sin x + \sqrt{2}\right)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0\\
\left[\begin{aligned}&2\sin x + \sqrt{2} = 0\\ &2\sin x - \sqrt{3} = 0\end{aligned}\right.\\
\left[\begin{aligned}&\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right.\\
\left[\begin{aligned}&x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ &x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ &x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ &x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}\right.
\end{gathered}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{13\pi}{4};\ \dfrac{15\pi}{4};\ \dfrac{13\pi}{3}$.

№13.6 #125808 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2\cos(2\pi + 2x) - 2 + \sqrt{8}\sin x = -\sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{4\pi}{3}$

Решение. а) Используя формулу косинуса двойного угла и периодичность косинуса, преобразуем уравнение:

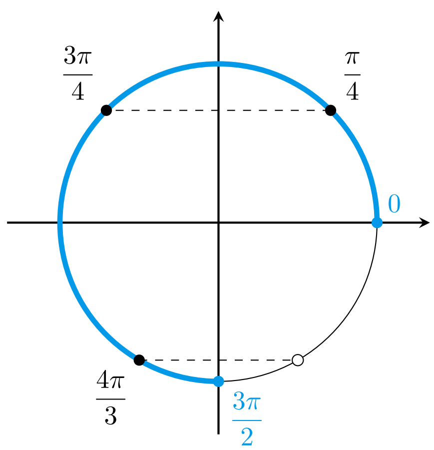
$$\begin{gathered}
2\cos 2x - 2 + \sqrt{8}\sin x = -\sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x \\
2\left(1 - 2\sin^2 x\right) - 2 + 2\sqrt{2}\sin x = -\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sin x \\
2\sqrt{2}\sin x + \sqrt{6} = 4\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \\
\sqrt{2}\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 2\sin x\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) \\
\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0
\end{gathered}$$

Таким образом, мы получаем

$$\left[\begin{aligned}
&\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned}
&x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \\
&x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \\
&x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \\
&x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}\right.$$

ШКОЛКОВО

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{4\pi}{3}$.

№13.7 #125837 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2\cos(2\pi + 2x) - 2 - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{5\pi}{3};\ \dfrac{7\pi}{4}$

Решение. а) Используя формулу косинуса двойного угла и периодичность косинуса, преобразуем уравнение:

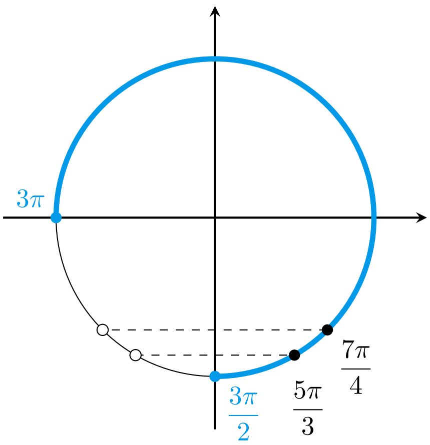
$$\begin{gathered}
2\cos(2\pi + 2x) - 2 - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x\\
2\left(1 - 2\sin^2 x\right) - 2 - 2\sqrt{2}\sin x = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sin x\\
-2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6} = 4\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\\
-\sqrt{2}\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 2\sin x\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\\
\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0
\end{gathered}$$

Таким образом, мы получаем

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ &x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ &x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ &x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

ШКОЛКОВО

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ лежат точки $\dfrac{5\pi}{3};\ \dfrac{7\pi}{4}$.

№13.8 #125816 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $2-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}-2\sin(x+\pi)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б)$-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{8\pi}{3}$

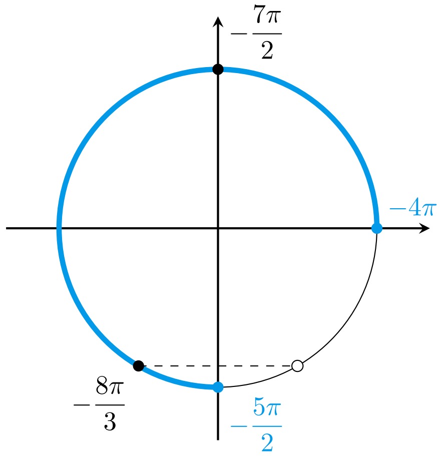
Решение. а) Используя формулу приведения и основное тригонометрическое тождество, преобразуем уравнение:

$$2-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}-2\sin(x+\pi)$$
$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}+2\sin x$$
$$2\sin^2 x-2\sin x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}=0$$
$$2\sin x(\sin x-1)+\sqrt{3}(\sin x-1)=0$$
$$\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)(\sin x-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}2\sin x+\sqrt{3}=0\\ \sin x-1=0\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=1\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

ШКОЛКОВО

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{8\pi}{3}$.

№13.9 #125815 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin(x+\pi) = \sqrt{3} + 2\sin x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{14\pi}{3};\ -\dfrac{13\pi}{3};\ -\dfrac{7\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения:

$$\sin(x+\pi) = -\sin x.$$

По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

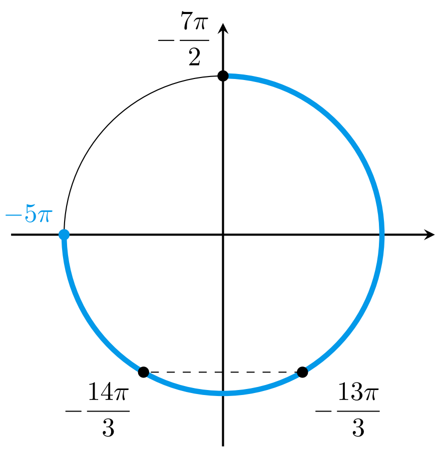
Сделаем полученные замены и перенесем всё в левую сторону:

$$1 - \left(1 - 2\sin^2 x\right) - \sqrt{3}(-\sin x) - \sqrt{3} - 2\sin x = 0$$
$$1 - 1 + 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} - 2\sin x = 0$$
$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} - 2\sin x = 0$$
$$2\sin x(\sin x - 1) + \sqrt{3}(\sin x - 1) = 0$$
$$\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)(\sin x - 1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = 1 \end{array}\right.$$

ШКОЛКОВО

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-5\pi; -\dfrac{7\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-5\pi; -\dfrac{7\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{14\pi}{2};\ -\dfrac{13\pi}{2};\ -\dfrac{7\pi}{2}$.

№13.10 #125817 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{3}\sin(x+\pi)=\sqrt{3}-2\sin x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$

Решение. а) По формуле приведения:

$$\sin(x+\pi)=-\sin x.$$

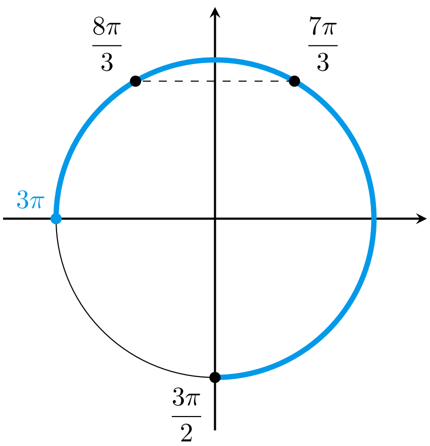
По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x.$$

Сделаем полученные замены и перенесем всё в левую сторону:

$$1-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sqrt{3}(-\sin x)-\sqrt{3}+2\sin x=0$$
$$1-1+2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}+2\sin x=0$$
$$2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}+2\sin x=0$$
$$2\sin x(\sin x+1)-\sqrt{3}(\sin x+1)=0$$
$$(2\sin x-\sqrt{3})\cdot(\sin x+1)=0$$
$$\left[\begin{array}{l}2\sin x-\sqrt{3}=0\\ \sin x+1=0\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=-1\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$ лежат точки $\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$.

№13.11 #125838 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin(x-\pi)=\sqrt{2}-2\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}$

Решение. а) По формуле приведения:

$$\sin(x-\pi)=-\sin x.$$

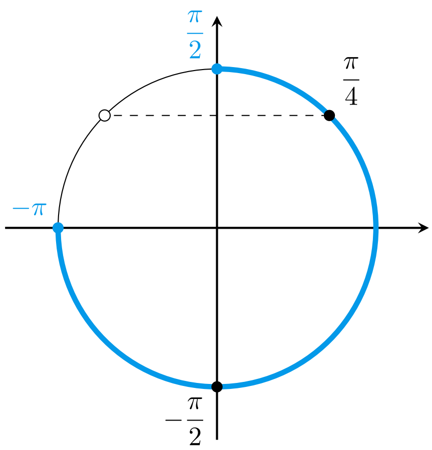
По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x.$$

Сделаем полученные замены и перенесем всё в левую сторону:

$$1-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sqrt{2}(-\sin x)-\sqrt{2}+2\sin x=0$$
$$1-1+2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}+2\sin x=0$$
$$2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}+2\sin x=0$$
$$2\sin x(\sin x+1)-\sqrt{2}(\sin x+1)=0$$
$$(2\sin x-\sqrt{2})\cdot(\sin x+1)=0$$
$$\left[\begin{array}{l}2\sin x-\sqrt{2}=0\\ \sin x+1=0\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x=-1\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}$.

№13.12 #125839 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin(x+\pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{9\pi}{4};\ -\dfrac{11\pi}{4}$

Решение. а) По формуле приведения:

$$\sin(x+\pi)=-\sin x.$$

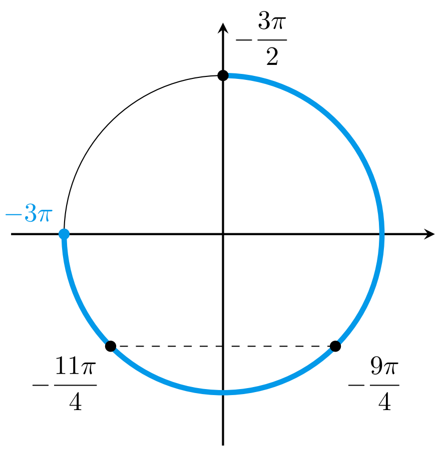
По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x.$$

Сделаем полученные замены и перенесем всё в левую сторону:

$$\begin{gathered}
1-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}+2(-\sin x)=0\\
1-1+2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}-2\sin x=0\\
2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}-2\sin x=0\\
2\sin x\cdot(\sin x-1)+\sqrt{2}(\sin x-1)=0\\
\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)\cdot(\sin x-1)=0\\
\left[\begin{aligned}&2\sin x+\sqrt{2}=0\\&\sin x-1=0\end{aligned}\right.\\
\left[\begin{aligned}&\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\&\sin x=1\end{aligned}\right.\\
\left[\begin{aligned}&x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.
\end{gathered}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{9\pi}{4};\ -\dfrac{11\pi}{4}$.

№13.13 #125841 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}-2\sin(x+\pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения:

$$\sin(x+\pi)=-\sin x.$$

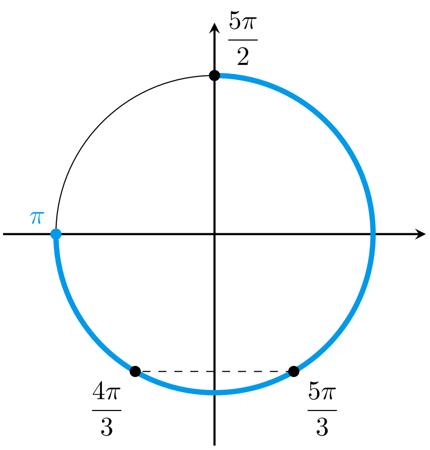
По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x.$$

Сделаем полученные замены и перенесем всё в левую сторону:

$$\begin{gathered}
1-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}+2(-\sin x)=0\\
1-1+2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}-2\sin x=0\\
2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}-2\sin x=0\\
2\sin x\cdot(\sin x-1)+\sqrt{3}\,(\sin x-1)=0\\
\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\cdot(\sin x-1)=0\\
\left[\begin{aligned}&2\sin x+\sqrt{3}=0\\&\sin x-1=0\end{aligned}\right.\\
\left[\begin{aligned}&\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\sin x=1\end{aligned}\right.\\
\left[\begin{aligned}&x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.
\end{gathered}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{2}$.

№13.14 #125818 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}75 = \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{11\pi}{3};\ -\dfrac{10\pi}{3};\ -\dfrac{8\pi}{3}$

Решение. а) Используя формулу косинуса двойного угла, преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 + 0{,}75 = \cos^2 x$$

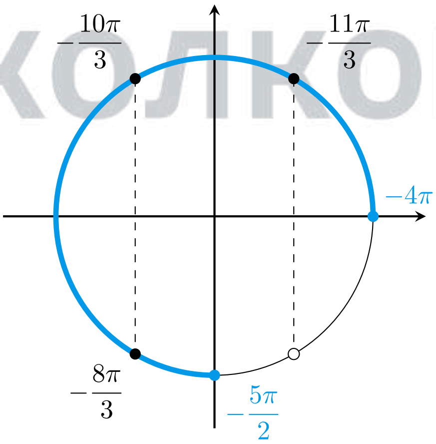
$$\cos^2 x - 0{,}25 = 0$$

$$\cos x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{11\pi}{3};\ -\dfrac{10\pi}{3};\ -\dfrac{8\pi}{3}$.

№13.15 #125843 (Дальний Восток, 26.05)

а) Решите уравнение $2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos^2 x = 2+\sqrt{6}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-3\pi;\ -2\pi;\ -\dfrac{7\pi}{4}$

Решение. а) По формуле синуса суммы:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.$$

Из основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x.$$

Сделаем полученные замены и перенесем всё в левую сторону:

$$2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+2\left(1-\sin^2 x\right)-2-\sqrt{6}\cos x=0$$

$$\sqrt{2}\sin x+\sqrt{6}\cos x+2-2\sin^2 x-2-\sqrt{6}\cos x=0$$

$$\sqrt{2}\sin x-2\sin^2 x=0$$

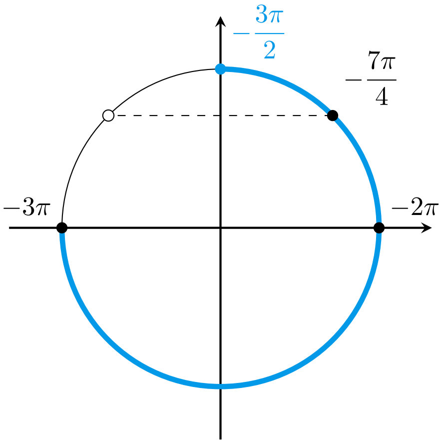
$$\sin x\left(\sqrt{2}-2\sin x\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sqrt{2}-2\sin x=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$ лежат точки -3π; -2π; $-\dfrac{7\pi}{4}$.

ШКОЛКОВО

№13.16 #125844 (Сибирь, 26.05)

а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(2\pi + x) - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{7\pi}{4};\ \dfrac{7\pi}{3}$

Решение. а) Преобразуем уравнение, воспользовавшись формулами

- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$,
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$.

Тогда имеем:

$$\begin{gathered}
2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(2\pi + x) - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}\cos x\\
2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{6}\cos x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x\\
\sin x(2\sin x + \sqrt{2}) = \sqrt{3}\cos x(2\sin x + \sqrt{2})\\
\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0
\end{gathered}$$

То есть выполнено одно из условий:

1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$,
2. $2\sin x + \sqrt{2} = 0$.

Решим оба случая. Первый:

$$\begin{aligned}
&\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0\\
&\sin x = \sqrt{3}\cos x\\
&\operatorname{tg} x = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Данное преобразование возможно, так как, если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, а это противоречит ОТТ.
Тогда

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

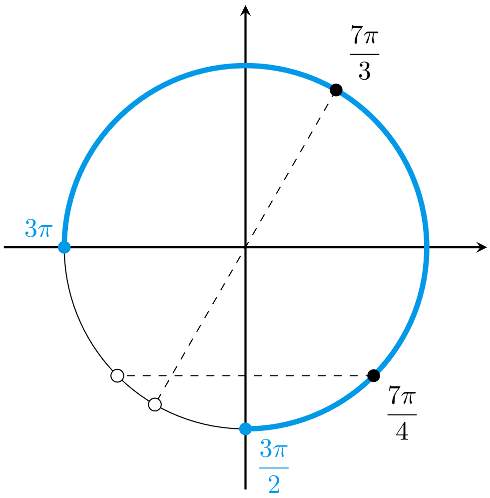
Второй:

$$\begin{aligned}
&2\sin x + \sqrt{2} = 0\\
&\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\left[\begin{aligned}
&x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\
&x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left[\begin{aligned}
&x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\
&x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\
&x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ лежат точки $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{3}$.

ШКОЛКОВО

№13.17 **#125846** (Центр, 26.05)

а) Решите уравнение $\sin\left(-2x+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin(4\pi-x)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{17\pi}{6};\ -\dfrac{13\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения и формуле синуса двойного угла получаем:

$$\sin\left(-2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x=1-2\sin^2 x.$$

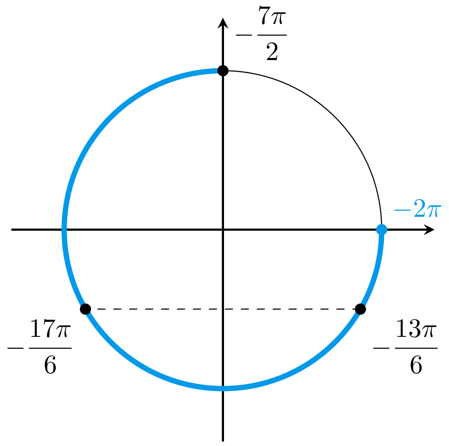
По формуле приведения:

$$\sin(4\pi-x)=\sin(-x)=-\sin x.$$

Сделаем полученные замены:

$$1-2\sin^2 x-(-\sin x)=0$$
$$1-2\sin^2 x+\sin x=0$$
$$(1-\sin x)(2\sin x+1)=0$$
$$\left[\begin{array}{l}1-\sin x=0\\ 2\sin x+1=0\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$ лежат точки $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{17\pi}{6};\ -\dfrac{13\pi}{6}$.

№13.18 #126318 (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin(x - \pi)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б)$-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{4}$

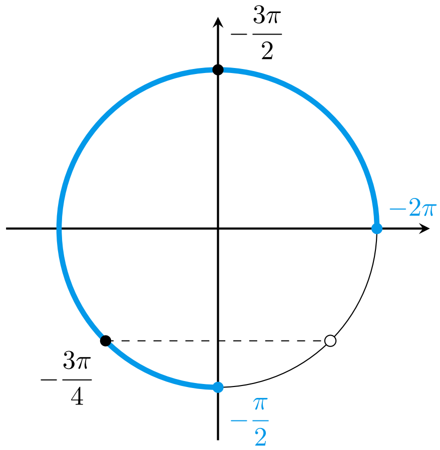
Решение. а) Используя формулу приведения и основное тригонометрическое тождество, преобразуем уравнение:

$$2 - 2\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin(x - \pi)$$
$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} + 2\sin x$$
$$2\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} = 0$$
$$2\sin x(\sin x - 1) + \sqrt{2}(\sin x - 1) = 0$$
$$\left(2\sin x + \sqrt{2}\right)(\sin x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &2\sin x + \sqrt{2} = 0 \\ &\sin x - 1 = 0 \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\sin x = 1 \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

ШКОЛКОВО

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{4}$.

№13.19 #127041 (Дальний Восток, 27.05)

а) Решите уравнение $2\sin(-x)+2\sqrt{3}\sin x-4\cos^2 x=\sqrt{3}-4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

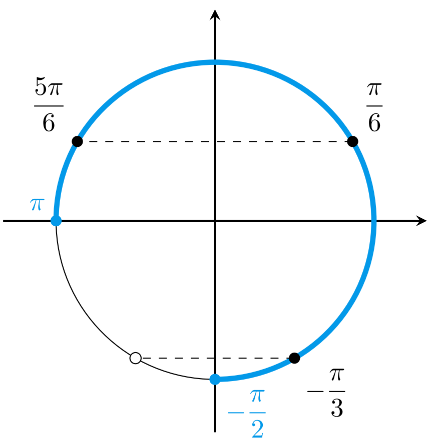
Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}$

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Тогда получаем:

$$2\sin(-x)+2\sqrt{3}\sin x-4\left(1-\sin^2 x\right)=\sqrt{3}-4$$
$$-2\sin x+2\sqrt{3}\sin x-4+4\sin^2 x=\sqrt{3}-4$$
$$-2\sin x+2\sqrt{3}\sin x+4\sin^2 x-\sqrt{3}=0$$
$$-2\sin x+4\sin^2 x-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin x=0$$
$$2\sin x(-1+2\sin x)+\sqrt{3}(-1+2\sin x)=0$$
$$\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)(-1+2\sin x)=0$$
$$\left[\begin{array}{l}2\sin x+\sqrt{3}=0\\ -1+2\sin x=0\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ лежат точки $-\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}$.

№13.20 #127044 (Сибирь, 27.05)

а) Решите уравнение $2\cos(\pi+2x)-2-\sqrt{8}\cos x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{7\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{4}$

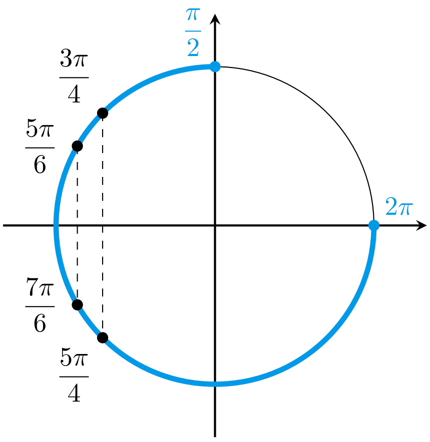
Решение. а) По формуле приведения и формуле косинуса двойного угла получаем:

$$\cos(\pi+2x)=-\cos 2x=1-2\cos^2 x.$$

Тогда

$$\begin{gathered}
2\cos(\pi+2x)-2-\sqrt{8}\cos x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\cos x\\
2-4\cos^2 x-2-\sqrt{8}\cos x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\cos x\\
4\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x+2\sqrt{3}\cos x+\sqrt{6}=0\\
2\cos x\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)=0\\
\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)=0\\
\left[\begin{aligned}&2\cos x+\sqrt{3}=0\\&2\cos x+\sqrt{2}=0\end{aligned}\right.\\
\left[\begin{aligned}&\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right.\\
\left[\begin{aligned}&x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.
\end{gathered}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$ лежат точки $\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{7\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{4}$.

№13.21 **#127045** (Центр, 27.05)

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{3}\sin(x+\pi)=\sqrt{3}-2\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{3}$

Решение. а) По формуле приведения:

$$\sin(x+\pi)=-\sin x.$$

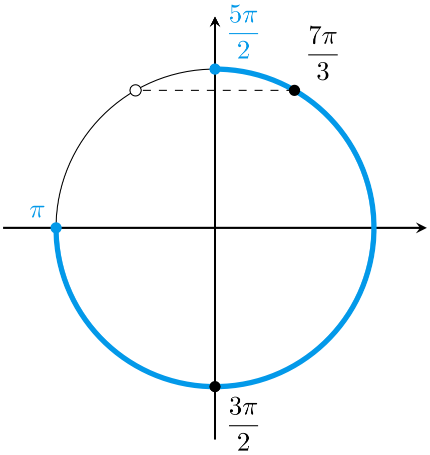
По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x.$$

Сделаем полученные замены и перенесем всё в левую сторону:

$$\begin{gathered}1-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sqrt{3}(-\sin x)-\sqrt{3}+2\sin x=0\\ 1-1+2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}+2\sin x=0\\ 2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}+2\sin x=0\\ 2\sin x\cdot(\sin x+1)-\sqrt{3}(\sin x+1)=0\\ \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\cdot(\sin x+1)=0\\ \left[\begin{array}{l}2\sin x-\sqrt{3}=0\\ \sin x+1=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{gathered}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{3}$.

№13.22 #127046 (Дальний Восток, 27.05)

а) Решите уравнение $2\cos(-x) - 2\sqrt{2}\cos x - 4\sin^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

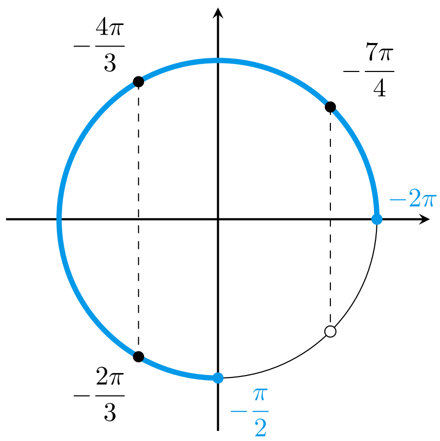
Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{2\pi}{3};\ -\dfrac{4\pi}{3};\ -\dfrac{7\pi}{4}$

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда получаем:

$$2\cos(-x) - 2\sqrt{2}\cos x - 4\left(1 - \cos^2 x\right) = \sqrt{2} - 4$$
$$2\cos x - 2\sqrt{2}\cos x - 4 + 4\cos^2 x = \sqrt{2} - 4$$
$$2\cos x - 2\sqrt{2}\cos x + 4\cos^2 x - \sqrt{2} = 0$$
$$2\cos x + 4\cos^2 x - \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\cos x = 0$$
$$2\cos x(1 + 2\cos x) - \sqrt{2}(1 + 2\cos x) = 0$$
$$\left(2\cos x - \sqrt{2}\right)(1 + 2\cos x) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \\ 1 + 2\cos x = 0 \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{2\pi}{3};\ -\dfrac{4\pi}{3};\ -\dfrac{7\pi}{4}$.

Задачи №14. Решения

№14.1 #125865 (Дальний восток, 27.05)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 5MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 12.

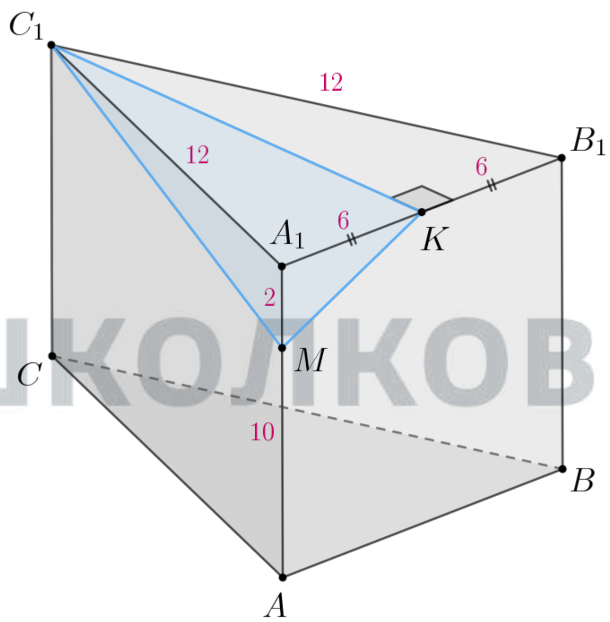
Ответ: б) $6\sqrt{30}$

Решение. а) Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник. Следовательно, медиана C_1K является также и высотой треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда $KC_1 \perp A_1B_1$.

Также так как призма правильная, то $KC_1 \perp AA_1$.

Получили, что KC_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости (ABB_1), следовательно, $KC_1 \perp (ABB_1)$.

Так как $\alpha \perp (ABB_1)$, $K \in \alpha$ и $KC_1 \perp (ABB_1)$, то $KC_1 \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.



б) Выше мы доказали, что $KC_1 \perp (ABB_1)$. Но тогда $KC_1 \perp MK$, следовательно, MKC_1 — прямоугольный треугольник и его площадь можно найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2} MK \cdot C_1K$$

Так как все ребра призмы равны 12, то $A_1K = KB_1 = 6$. Далее, из того, что $AM : MA_1 = 5 : 1$, получаем $AM = 10$, $MA_1 = 2$.

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle A_1MK$:

$$MK^2 = A_1M^2 + A_1K^2$$
$$MK^2 = 4 + 36 = 40 \quad \Rightarrow \quad MK = 2\sqrt{10}$$

По теореме Пифагора для $\triangle A_1C_1K$:

$$C_1K^2 = C_1A_1^2 - A_1K^2$$
$$C_1K^2 = 144 - 36 = 108 \quad \Rightarrow \quad C_1K = 6\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} MK \cdot C_1K = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{3} = 6\sqrt{30}.$$

№14.2 #125866 (Дальний восток, 27.05)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $A_1M = 2AM$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 20.

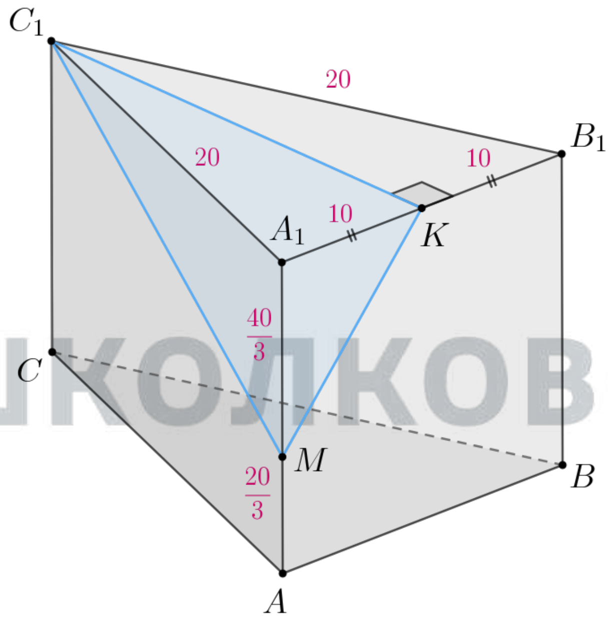
Ответ: б) $\dfrac{250\sqrt{3}}{3}$

Решение. а) Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник. Следовательно, медиана C_1K является также и высотой треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда $KC_1 \perp A_1B_1$.

Также так как призма правильная, то $KC_1 \perp AA_1$.

Получили, что KC_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости (ABB_1), следовательно, $KC_1 \perp (ABB_1)$.

Так как $\alpha \perp (ABB_1)$, $K \in \alpha$ и $KC_1 \perp (ABB_1)$, то $KC_1 \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.



б) Выше мы доказали, что $KC_1 \perp (ABB_1)$. Но тогда $KC_1 \perp MK$, следовательно, MKC_1 — прямоугольный треугольник и его площадь можно найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2}MK \cdot C_1K$$

Так как все ребра призмы равны 20, то $A_1K = KB_1 = 10$. Далее, из того, что $AM : MA_1 = 1 : 2$, получаем $AM = \frac{20}{3}$, $MA_1 = \frac{40}{3}$.

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle A_1MK$:

$$MK^2 = A_1M^2 + A_1K^2$$
$$MK^2 = \frac{40^2}{9} + 10^2 = \frac{10^2 \cdot 25}{9} \quad \Rightarrow \quad MK = \frac{50}{3}$$

По теореме Пифагора для $\triangle A_1C_1K$:

$$C_1K^2 = C_1A_1^2 - A_1K^2$$
$$C_1K^2 = 400 - 100 = 300 \quad \Rightarrow \quad C_1K = 10\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2}MK \cdot C_1K = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{3} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{250\sqrt{3}}{3}.$$

№14.3 #125869 (Сибирь, 27.05)

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.

а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.

б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

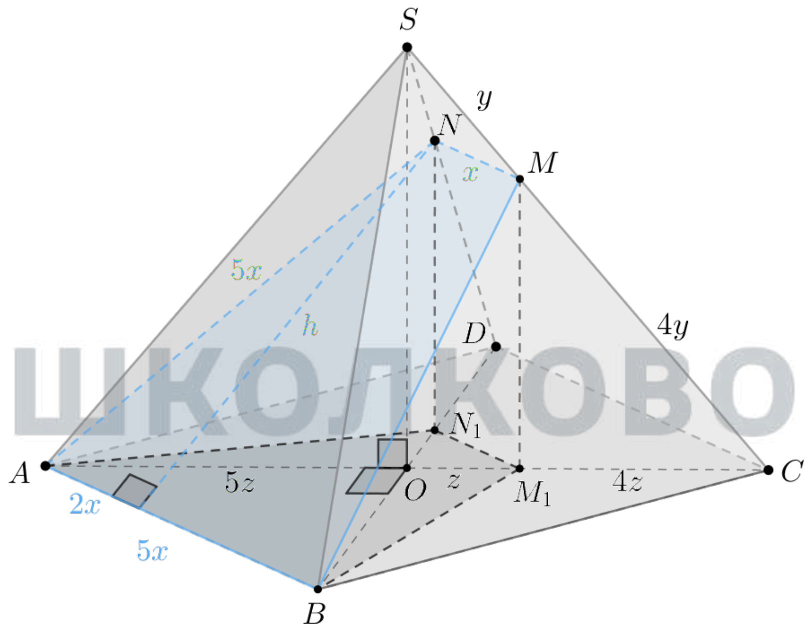
Ответ: б) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

Решение. а) Рассмотрим три попарно пересекающиеся плоскости: (SCD), (ABC), α. Прямые CD, AB и MN — их линии пересечения. Тогда эти прямые либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны. Так как $AB \parallel CD$, то имеем: $MN \parallel AB \parallel CD$.

Тогда $\triangle SMN \sim \triangle SCD \quad \Rightarrow$

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{MN}{CD} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{5}$$

Отсюда следует, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.



б) Пусть $AB = BM = AN = 5x$, $MN = x$.

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Так как пирамида правильная, то SO — высота этой пирамиды.

В плоскости SAC проведем $MM_1 \parallel SO$. Тогда M_1 — проекция точки M на плоскость ABC.

В плоскости SBD проведем $NN_1 \parallel SO$. Тогда N_1 — проекция точки N на плоскость ABC.

Значит, четырехугольник ABM_1N_1 — проекция сечения $ABMN$ на плоскость ABC.

Если φ — угол между плоскостями ABM и ABC, то

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABM_1N_1}}{S_{ABMN}}$$

Рассмотрим $ABMN$. Это равнобедренная трапеция. Пусть h — ее высота. Тогда образуется прямоугольный треугольник с гипотенузой $5x$ и катетами h и $2x$. Следовательно, по теореме Пифагора:

$$h^2 = (5x)^2 - (2x)^2 = 21x^2 \quad \Rightarrow \quad h = x\sqrt{21}$$

Значит, площадь сечения равна

$$S_{ABMN} = \frac{x + 5x}{2} \cdot x\sqrt{21} = 3x^2\sqrt{21}$$

По теореме о пропорциональных отрезках $CM_1 : M_1O = CM : MS = 4 : 1$. Аналогично $DN_1 : N_1O = 4 : 1$. Пусть $AC = BD = 10z$. Тогда $M_1O = N_1O = z$, $AO = BO = 5z$.

Диагонали AM_1 и BN_1 четырехугольника ABM_1N_1 взаимно перпендикулярны, следовательно, его площадь равна

$$S_{ABM_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot AM_1 \cdot BN_1 = \frac{1}{2} \cdot 6z \cdot 6z = 18z^2$$

Но по свойству квадрата

$$10z = 5x\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Отсюда площадь проекции сечения равна

$$S_{ABM_1N_1} = 18 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = 9x^2$$

Тогда искомый косинус равен

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABM_1N_1}}{S_{ABMN}} = \frac{9x^2}{3x^2\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

ШКОЛКОВО

№14.4 **#126161** (Сибирь, 27.05)

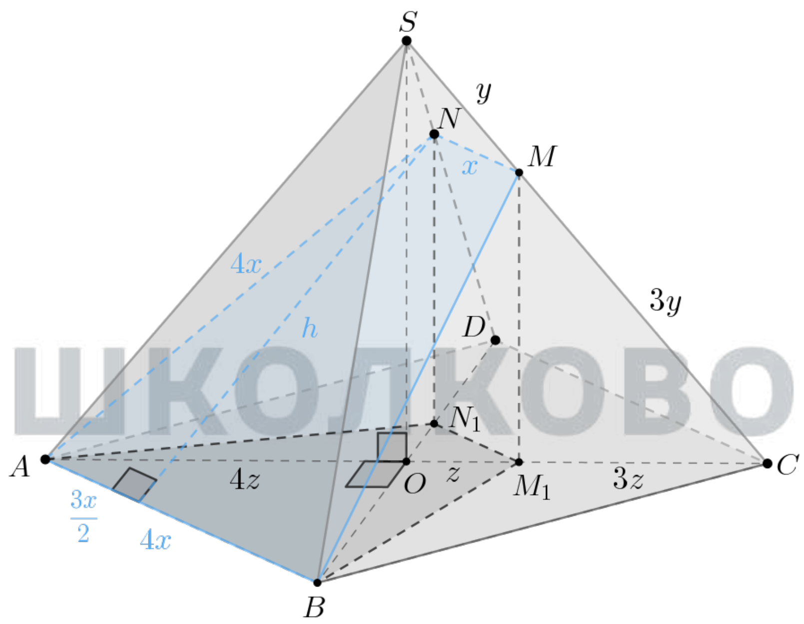
Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 4MN$.
а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 3$.
б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{55}}{11}$

Решение. а) Рассмотрим три попарно пересекающиеся плоскости: (SCD), (ABC), α. Прямые CD, AB и MN — их линии пересечения. Тогда эти прямые либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны. Так как $AB \parallel CD$, то имеем: $MN \parallel AB \parallel CD$.
Тогда $\triangle SMN \sim \triangle SCD \quad \Rightarrow$

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{MN}{CD} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{4}$$

Отсюда следует, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 3$.



б) Пусть $AB = BM = AN = 4x$, $MN = x$.
Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Так как пирамида правильная, то SO — высота этой пирамиды.
В плоскости SAC проведем $MM_1 \parallel SO$. Тогда M_1 — проекция точки M на плоскость ABC.
В плоскости SBD проведем $NN_1 \parallel SO$. Тогда N_1 — проекция точки N на плоскость ABC.
Значит, четырехугольник ABM_1N_1 — проекция сечения $ABMN$ на плоскость ABC.
Если φ — угол между плоскостями ABM и ABC, то

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABM_1N_1}}{S_{ABMN}}$$

Рассмотрим $ABMN$. Это равнобедренная трапеция. Пусть h — ее высота. Тогда образуется прямоугольный треугольник с гипотенузой $4x$ и катетами h и $\dfrac{3x}{2}$. Следовательно, по теореме Пифагора:

$$h^2 = (4x)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = \frac{55x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{55}}{2}x$$

Значит, площадь сечения равна

$$S_{ABMN} = \frac{x + 4x}{2} \cdot \frac{\sqrt{55}}{2}x = \frac{5\sqrt{55}}{4}x^2$$

По теореме о пропорциональных отрезках $CM_1 : M_1O = CM : MS = 3 : 1$. Аналогично $DN_1 : N_1O = 3 : 1$. Пусть $AC = BD = 8z$. Тогда $M_1O = N_1O = z$, $AO = BO = 4z$.

Диагонали AM_1 и BN_1 четырехугольника ABM_1N_1 взаимно перпендикулярны, следовательно, его площадь равна

$$S_{ABM_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot AM_1 \cdot BN_1 = \frac{1}{2} \cdot 5z \cdot 5z = \frac{25}{2} z^2$$

Но по свойству квадрата

$$8z = 4x\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Отсюда площадь проекции сечения равна

$$S_{ABM_1N_1} = \frac{25}{2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{4} x^2$$

Тогда искомый косинус равен

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABM_1N_1}}{S_{ABMN}} = \frac{\frac{25}{4}x^2}{\frac{5\sqrt{55}}{4}x^2} = \frac{5}{\sqrt{55}} = \frac{\sqrt{55}}{11}.$$

ШКОЛКОВО

№14.5 #126162 (Сибирь, 27.05)

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 3MN$.

а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 2$.

б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

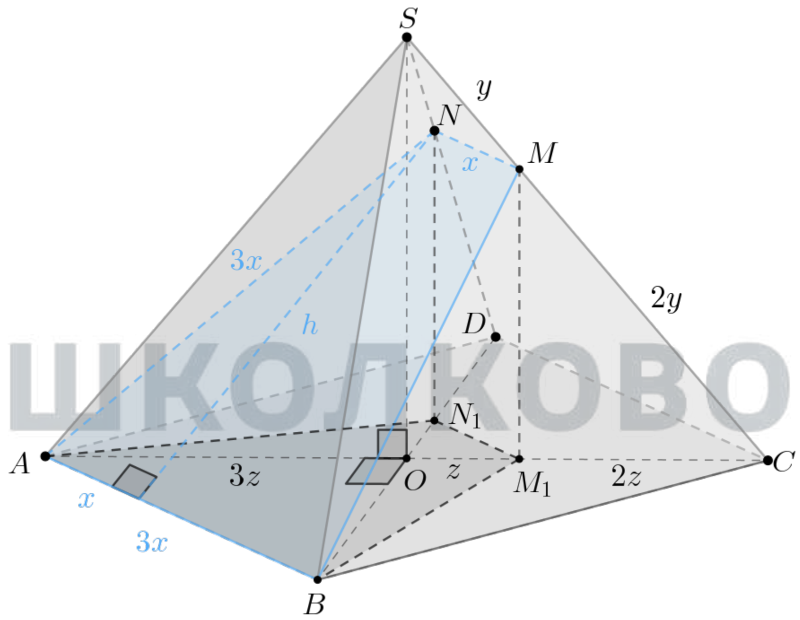
Ответ: б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Решение. а) Рассмотрим три попарно пересекающиеся плоскости: (SCD), (ABC), α. Прямые CD, AB и MN — их линии пересечения. Тогда эти прямые либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны. Так как $AB \parallel CD$, то имеем: $MN \parallel AB \parallel CD$.

Тогда $\triangle SMN \sim \triangle SCD \quad \Rightarrow$

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{MN}{CD} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$$

Отсюда следует, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 2$.



б) Пусть $AB = BM = AN = 3x$, $MN = x$.

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Так как пирамида правильная, то SO — высота этой пирамиды.

В плоскости SAC проведем $MM_1 \parallel SO$. Тогда M_1 — проекция точки M на плоскость ABC.

В плоскости SBD проведем $NN_1 \parallel SO$. Тогда N_1 — проекция точки N на плоскость ABC.

Значит, четырехугольник ABM_1N_1 — проекция сечения $ABMN$ на плоскость ABC.

Если φ — угол между плоскостями ABM и ABC, то

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABM_1N_1}}{S_{ABMN}}$$

Рассмотрим $ABMN$. Это равнобедренная трапеция. Пусть h — ее высота. Тогда образуется прямоугольный треугольник с гипотенузой $3x$ и катетами h и x. Следовательно, по теореме Пифагора:

$$h^2 = (3x)^2 - x^2 = 8x^2 \quad \Rightarrow \quad h = 2\sqrt{2}x$$

Значит, площадь сечения равна

$$S_{ABMN} = \frac{x + 3x}{2} \cdot 2\sqrt{2}x = 4\sqrt{2}x^2$$

По теореме о пропорциональных отрезках $CM_1 : M_1O = CM : MS = 2 : 1$. Аналогично $DN_1 : N_1O = 2 : 1$. Пусть $AC = BD = 6z$. Тогда $M_1O = N_1O = z$, $AO = BO = 3z$.

Диагонали AM_1 и BN_1 четырехугольника ABM_1N_1 взаимно перпендикулярны, следовательно, его площадь равна

$$S_{ABM_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot AM_1 \cdot BN_1 = \frac{1}{2} \cdot 4z \cdot 4z = 8z^2$$

Но по свойству квадрата

$$6z = 3x\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Отсюда площадь проекции сечения равна

$$S_{ABM_1N_1} = 8 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4x^2$$

Тогда искомый косинус равен

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABM_1N_1}}{S_{ABMN}} = \frac{4x^2}{4\sqrt{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ШКОЛКОВО

№14.6 #125871 (Центр, 27.05)

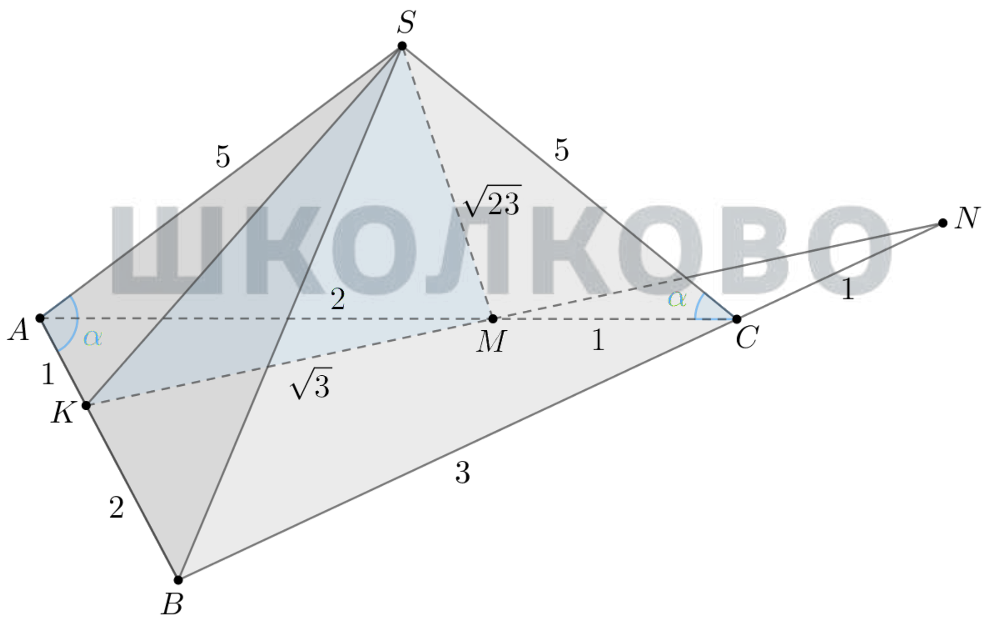
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро SA равно 5. На ребре AC отмечена точка M, а на продолжении ребра BC за точку C — точка N так, что $CM = CN = 1$.
а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью SNM является равнобедренным треугольником.
б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью SNM.

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{267}}{4}$

Решение. а) Пусть прямая NM пересекает ребро AB в точке K. Тогда $\triangle SMK$ — сечение пирамиды плоскостью SMN. Докажем, что $SM = SK$.
Применим теорему Менелая для $\triangle ABC$ и прямой NK :

$$\frac{BK}{KA}\cdot\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CN}{NB}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{BK}{KA}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{BK}{KA}=\frac{2}{1}$$

Учитывая также, что $BK + KA = BA = 3$, получаем, что $BK = 2$, $KA = 1$.
Так как пирамида правильная, то боковые грани представляют собой равные равнобедренные треугольники. Следовательно, $\angle SAK = \angle SCM = \alpha$.
Тогда $\triangle SAK = \triangle SCM$ по двум сторонам и углу между ними: $SA = SC = 5$, $AK = CM = 1$, $\angle SAK = \angle SCM = \alpha$. Отсюда следует, что $SK = SM$.



б) Из теоремы косинусов для $\triangle SCA$ следует, что

$$\cos\alpha=\frac{SC^2+AC^2-SA^2}{2\cdot SC\cdot AC}=\frac{5^2+3^2-5^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\frac{3}{10}$$

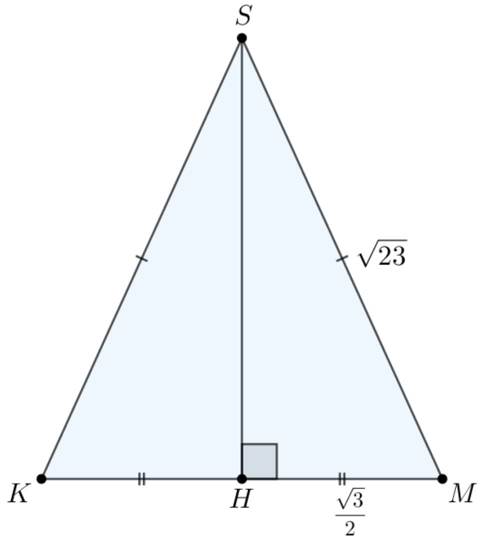
Применим теорему косинусов для $\triangle SCM$:

$$SM^2=SC^2+MC^2-2\cdot SC\cdot MC\cdot\cos\alpha=5^2+1^2-2\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{3}{10}=23$$

Так как $\triangle ABC$ — правильный, то $\angle MAK = 60^\circ$.
Применим теорему косинусов для $\triangle MAK$:

$$MK^2=MA^2+KA^2-2\cdot MA\cdot KA\cdot\cos 60^\circ=2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=3$$

Рассмотрим $\triangle SMK$. Проведем высоту SH. Тогда она является и медианой, следовательно, $MH = \dfrac{1}{2}MK$.



По теореме Пифагора для $\triangle SHM$:

$$SH^2 = SM^2 - MH^2 = 23 - \frac{3}{4} = \frac{89}{4} \quad \Rightarrow \quad SH = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

Следовательно, площадь сечения равна

$$S_{SMK} = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{89}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{267}}{4}.$$

ШКОЛКОВО

№14.7 #125873 (Центр, 27.05)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 2$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D.

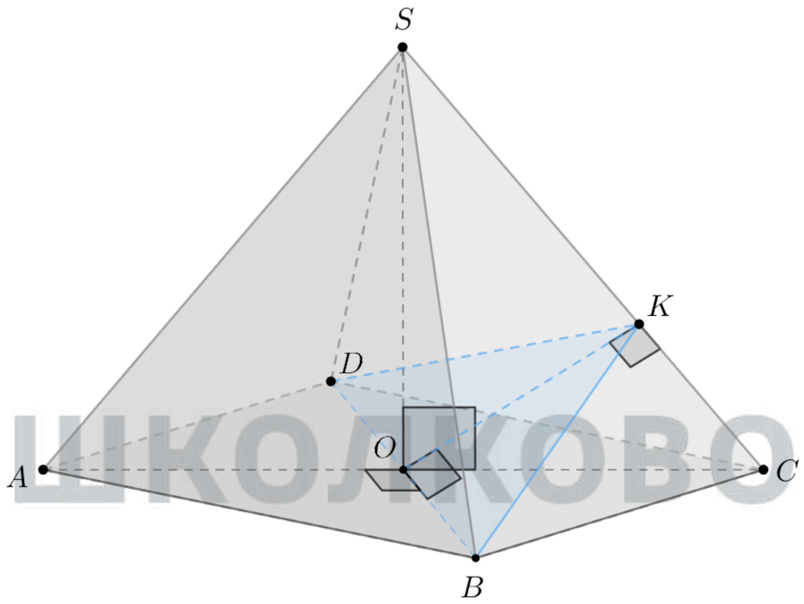
б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC, считая от вершины S, если площадь сечения равна $\sqrt{3}$?

Ответ: б) $3:1$

Решение. а) Прямая SC перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым из этой плоскости. Поэтому найдем две прямые, проходящие через точку O и перпендикулярные SC.

Так как пирамида правильная, то SO — ее высота, $AC \perp BD$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp BD$. Так как $O \in BD$, то $BD \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.

Найдем вторую прямую. Проведем в $\triangle SOC$ высоту OK, то есть $OK \perp SC$. Тогда $\triangle BKD$ — сечение пирамиды плоскостью α.



б) Требуется найти $SK : KC$.

По доказанному в пункте а) имеем: $BD \perp SC$, $BD \perp SO$. Следовательно, $BD \perp (SOC)$. Тогда $BD \perp OK$. Следовательно, площадь сечения равна

$$S_{BKD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot OK$$

Так как $AB = 2$ и $ABCD$ — квадрат, то $BD = 2\sqrt{2}$, $OC = \sqrt{2}$.

Тогда площадь сечения равна

$$\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot OK \quad \Leftrightarrow \quad OK = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Перейдем в $\triangle SOC$. Пусть $\angle KOC = \varphi$. Тогда из $\triangle KOC$:

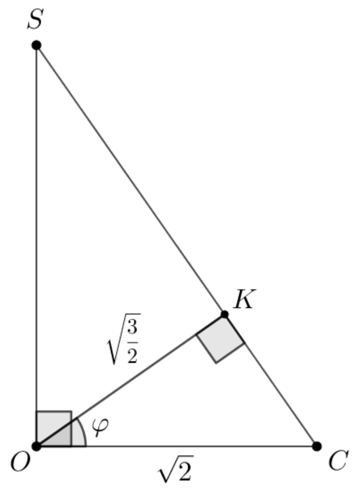
$$\cos\varphi = \frac{OK}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 30^\circ$$

Тогда $KC = \frac{1}{2}OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

По свойству прямоугольного треугольника и высоты, опущенной из прямого угла, имеем: $\angle OSC = \varphi = 30^\circ$. Следовательно, $SC = 2OC = 2\sqrt{2}$.

Тогда имеем:

$$SK = SC - KC = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



Значит, искомое отношение равно

$$SK : KC = \frac{3\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 : 1.$$

ШКОЛКОВО

№14.8 #126159 (Центр, 27.05)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D.

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC, считая от вершины S, если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

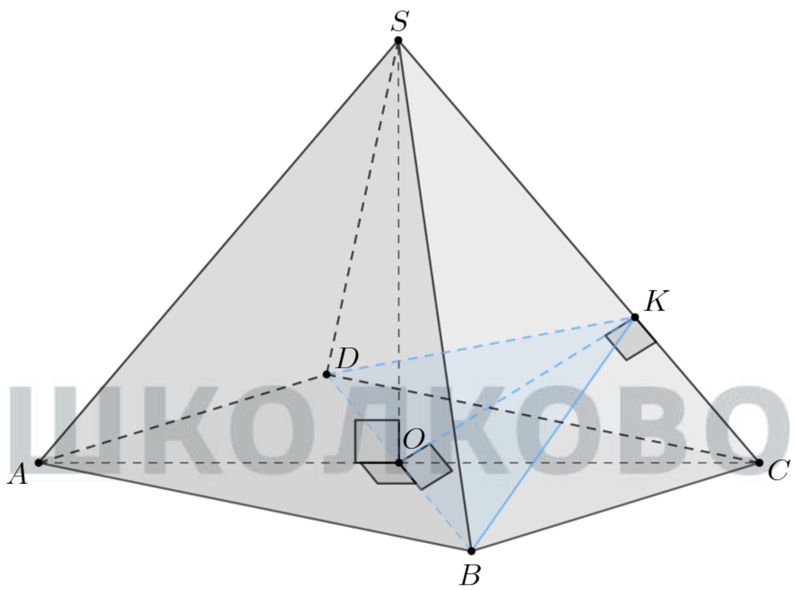
Ответ: б) $8 : 1$

Решение. а) Прямая SC перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым из этой плоскости. Поэтому найдем две прямые, проходящие через точку O и перпендикулярные SC.

Так как пирамида правильная, то SO — ее высота, $AC \perp BD$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp BD$.

Так как $O \in BD$, то $BD \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.

Найдем вторую прямую. Проведем в $\triangle SOC$ высоту OK, то есть $OK \perp SC$. Тогда $\triangle BKD$ — сечение пирамиды плоскостью α.



б) Требуется найти $SK : KC$.

По доказанному в пункте а) имеем: $BD \perp SC$, $BD \perp SO$. Следовательно, $BD \perp (SOC)$. Тогда $BD \perp OK$.

Следовательно, площадь сечения равна

$$S_{BKD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot OK$$

Так как $AB = 1$ и $ABCD$ — квадрат, то $BD = \sqrt{2}$, $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда площадь сечения равна

$$\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot OK \quad \Leftrightarrow \quad OK = \frac{2}{3}$$

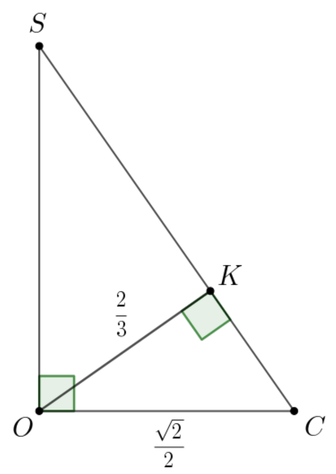
Перейдем в $\triangle SOC$.

По теореме Пифагора для треугольника KOC :

$$KC^2 = OC^2 - OK^2$$

$$KC^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$KC = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$



Найдем SK через свойство высоты из вершины прямого угла:

$$OK^2 = SK \cdot KC$$

$$\frac{4}{9} = SK \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$SK = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Значит, искомое отношение равно

$$SK : KC = \frac{4\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3\sqrt{2}} = 8 : 1.$$

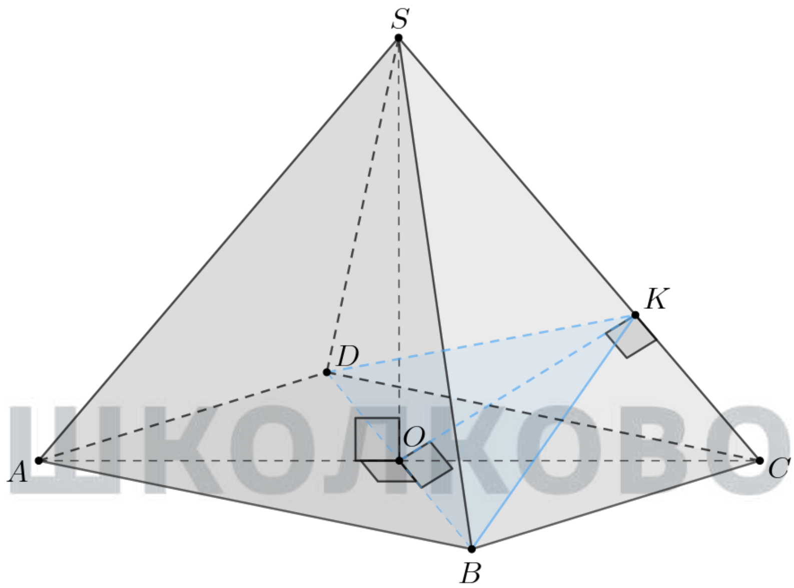
ШКОЛКОВО

№14.9 #126160 (Центр, 27.05)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ известно, что $AB = 4$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α.
а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D.
б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC, считая от вершины S, если площадь сечения равна $2\sqrt{14}$?

Ответ: б) $7:1$

Решение. а) Прямая SC перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым из этой плоскости. Поэтому найдем две прямые, проходящие через точку O и перпендикулярные SC.
Так как пирамида правильная, то SO — ее высота, $AC \perp BD$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp BD$. Так как $O \in BD$, то $BD \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.
Найдем вторую прямую. Проведем в $\triangle SOC$ высоту OK, то есть $OK \perp SC$. Тогда $\triangle BKD$ — сечение пирамиды плоскостью α.



б) Требуется найти $SK : KC$.
По доказанному в пункте а) имеем: $BD \perp SC$, $BD \perp SO$. Следовательно, $BD \perp (SOC)$. Тогда $BD \perp OK$.
Следовательно, площадь сечения равна

$$S_{BKD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot OK$$

Так как $AB = 4$ и $ABCD$ — квадрат, то $BD = 4\sqrt{2}$, $OC = 2\sqrt{2}$.
Тогда площадь сечения равна

$$2\sqrt{14} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot OK \quad \Leftrightarrow \quad OK = \sqrt{7}$$

Перейдем в $\triangle SOC$.
По теореме Пифагора для треугольника KOC :

$$KC^2 = OC^2 - OK^2$$

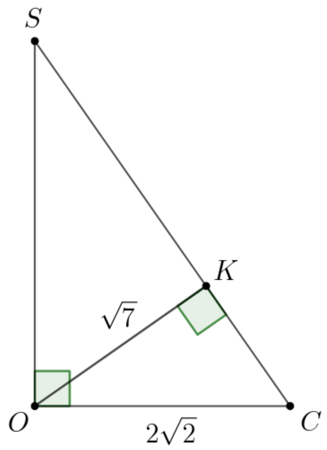
$$KC^2 = 8 - 7 = 1$$

$$KC = 1$$

Найдем SK через свойство высоты из вершины прямого угла:

$$OK^2 = SK \cdot KC$$

$$7 = SK \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad SK = 7$$



Значит, искомое отношение равно

$$SK : KC = 7 : 1.$$

ШКОЛКОВО

№14.10 #125876 (Центр, 27.05)

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $2\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.

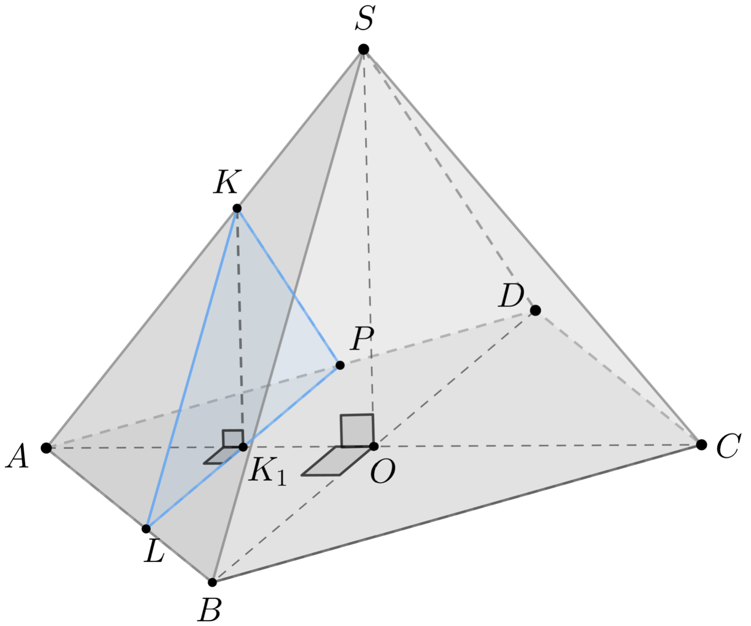
б) В каком отношении точка K делит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $36\sqrt{6}$?

Ответ: б) $2:1$

Решение. а) Проведём KK_1 параллельно SO, тогда $KK_1 \perp (ABC)$. Здесь SO — высота пирамиды, при этом так как $SABCD$ — правильная, то O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. Так как по условию $\alpha \perp (ABC)$, то прямая KK_1, проходящая через точку K и перпендикулярная (ABC), лежит в плоскости α.
Далее, плоскости α и (ABC) имеют общую точку K_1. Тогда эти плоскости пересекаются по некоторой прямой. Пусть это будет прямая LP, где L, P — точки пересечения со сторонами AB и AD основания соответственно.
Так как KK_1 перпендикулярна плоскости основания, то KK_1 перпендикулярна AC. Покажем, что AC перпендикулярна LP.

- Из свойств квадрата $ABCD$: AC — биссектриса угла BAD.
- Из свойств правильного треугольника KLP : высота KK_1 является и медианой, то есть $LK_1 = K_1P$.

Тогда AK_1 — медиана и биссектриса в треугольнике ALP, а значит, является и высотой. Тогда $AC \perp LP$, $AC \perp KK_1$, то есть AC перпендикулярна плоскости α. Что и требовалось доказать.



б) Распишем объёмы пирамид $KALP$ и $SABCD$:

$$V_{KALP} = \frac{1}{3} \cdot KK_1 \cdot S_{ALP}$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$$

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}} = \frac{KK_1}{SO} \cdot \frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}$$

Выразим нужные отношения через $\frac{AK}{AS}$. Рассмотрим подобные по острому углу прямоугольные треугольники AKK_1 и ASO.
Запишем отношение подобия:

$$\frac{AK}{AS} = \frac{KK_1}{SO} = \frac{AK_1}{AO}$$

Найдем отношение площадей:

$$\frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AK_1\cdot LP}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD}=\frac{AK_1}{AC}\cdot\frac{LP}{BD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AK_1}{AO}\cdot\frac{LP}{BD}$$

Из подобия по общему острому углу прямоугольных треугольников AK_1L и AOB имеем:

$$\frac{AK_1}{AO}=\frac{LK_1}{BO}=\frac{\frac{1}{2}LP}{\frac{1}{2}BD}=\frac{LP}{BD}$$

Тогда получаем:

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}}=\frac{KK_1}{SO}\cdot\frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}=\frac{AK}{AS}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{AK_1}{AO}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{AK}{AS}\right)^3$$

Чтобы найти V_{KALP}, запишем площадь правильного треугольника KLP. Из свойств правильного треугольника известно, что $KK_1=\frac{\sqrt{3}}{2}LP$. Тогда имеем:

$$S_{KLP}=\frac{1}{2}\cdot LP\cdot KK_1=\frac{1}{2}LP\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}LP=\frac{\sqrt{3}}{4}LP^2=2\sqrt{3}$$

Отсюда получаем, что $LP=2\sqrt{2}$, $KK_1=\sqrt{6}$.
Из прямоугольного равнобедренного треугольника ALP :

$$LP^2=AP^2+AL^2=2AP^2=8$$

Отсюда $AP=2$. Найдем объем пирамиды $KALP$:

$$V_{KALP}=\frac{1}{3}\cdot KK_1\cdot S_{ALP}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Тогда имеем:

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{36\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\left(\frac{AK}{AS}\right)^3$$

$$\left(\frac{AK}{AS}\right)^3=\frac{4}{3\cdot 36}=\frac{1}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Откуда получаем, что $\frac{AK}{AS}=\frac{1}{3}$. Отсюда если $AK=x$, то $AS=3x$ и $KS=3x-x=2x$.
Тогда искомое отношение равно

$$\frac{SK}{KA}=\frac{2x}{x}=\frac{2}{1}.$$

№14.11 #126157 (Центр, 27.05)

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $4\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.

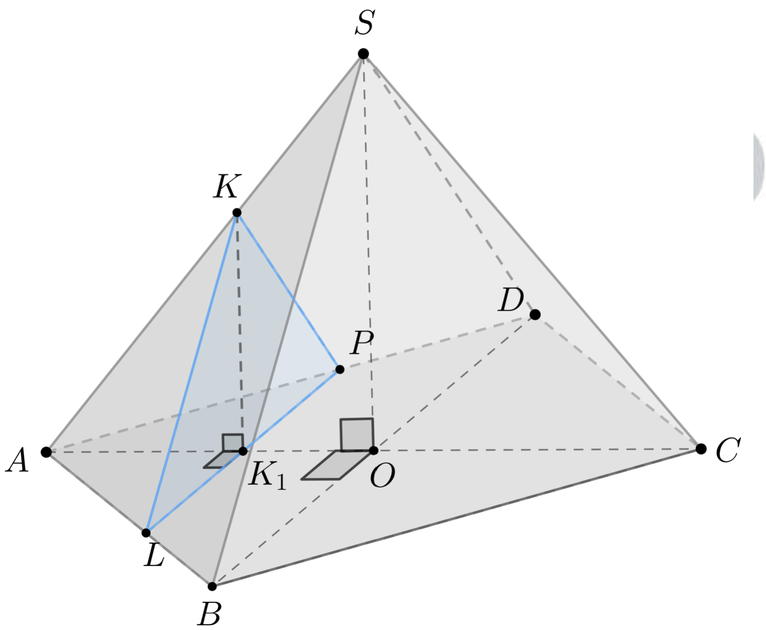
б) В каком отношении точка K делит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $18\sqrt{3}$?

Ответ: б) 1 : 2

Решение. а) Проведём KK_1 параллельно SO, тогда $KK_1 \perp (ABC)$. Здесь SO — высота пирамиды, при этом так как $SABCD$ — правильная, то O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. Так как по условию $\alpha \perp (ABC)$, то прямая KK_1, проходящая через точку K и перпендикулярная (ABC), лежит в плоскости α. Далее, плоскости α и (ABC) имеют общую точку K_1. Тогда эти плоскости пересекаются по некоторой прямой. Пусть это будет прямая LP, где L, P — точки пересечения со сторонами AB и AD основания соответственно.
Так как KK_1 перпендикулярна плоскости основания, то KK_1 перпендикулярна AC. Покажем, что AC перпендикулярна LP.

- Из свойств квадрата $ABCD$: AC — биссектриса угла BAD.
- Из свойств правильного треугольника KLP : высота KK_1 является и медианой, то есть $LK_1 = K_1P$.

Тогда AK_1 — медиана и биссектриса в треугольнике ALP, а значит, является и высотой. Тогда $AC \perp LP$, $AC \perp KK_1$, то есть AC перпендикулярна плоскости α. Что и требовалось доказать.



б) Распишем объёмы пирамид $KALP$ и $SABCD$:

$$V_{KALP} = \frac{1}{3} \cdot KK_1 \cdot S_{ALP}$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$$

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}} = \frac{KK_1}{SO} \cdot \frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}$$

Выразим нужные отношения через $\frac{AK}{AS}$. Рассмотрим подобные по острому углу прямоугольные треугольники AKK_1 и ASO.
Запишем отношение подобия:

$$\frac{AK}{AS} = \frac{KK_1}{SO} = \frac{AK_1}{AO}$$

Найдем отношение площадей:

$$\frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AK_1\cdot LP}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD}=\frac{AK_1}{AC}\cdot\frac{LP}{BD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AK_1}{AO}\cdot\frac{LP}{BD}$$

Из подобия по общему острому углу прямоугольных треугольников AK_1L и AOB имеем:

$$\frac{AK_1}{AO}=\frac{LK_1}{BO}=\frac{\frac{1}{2}LP}{\frac{1}{2}BD}=\frac{LP}{BD}$$

Тогда получаем:

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}}=\frac{KK_1}{SO}\cdot\frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}=\frac{AK}{AS}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{AK_1}{AO}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{AK}{AS}\right)^3$$

Чтобы найти V_{KALP}, запишем площадь правильного треугольника KLP. Из свойств правильного треугольника известно, что $KK_1=\frac{\sqrt{3}}{2}LP$. Тогда имеем:

$$S_{KLP}=\frac{1}{2}\cdot LP\cdot KK_1=\frac{1}{2}LP\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}LP=\frac{\sqrt{3}}{4}LP^2=4\sqrt{3}$$

Отсюда получаем, что $LP=4$, $KK_1=2\sqrt{3}$.
Из прямоугольного равнобедренного треугольника ALP :

$$LP^2=AP^2+AL^2=2AP^2=16$$

Отсюда $AP=2\sqrt{2}$. Найдем объем пирамиды $KALP$:

$$V_{KALP}=\frac{1}{3}\cdot KK_1\cdot S_{ALP}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Тогда имеем:

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{18\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{AK}{AS}\right)^3$$

$$\left(\frac{AK}{AS}\right)^3=\frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

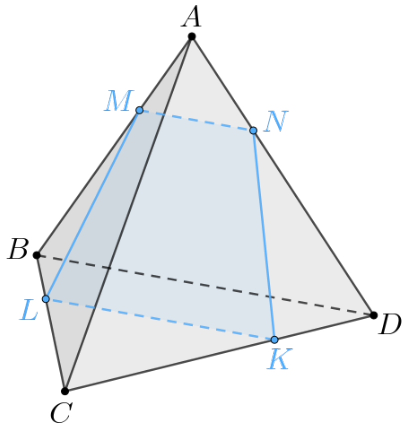
Откуда получаем, что $\frac{AK}{AS}=\frac{2}{3}$. Отсюда если $AK=2x$, то $AS=3x$ и $KS=3x-2x=x$.
Тогда искомое отношение равно

$$\frac{SK}{KA}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

№14.12 #125877 (Запад, 27.05)
На ребрах BC, AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L, M и N соответственно. Известно, что $AM : MB = BL : LC = AN : ND = 1 : 4$.
а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точки L, M и N, делит ребро CD в отношении $4 : 1$, считая от вершины C.
б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB = 10$.

Ответ: б) $5\sqrt{43}$

Решение. а) Так как $AM : MB = AN : ND$, то по обратной теореме о пропорциональных отрезках $MN \parallel BD$. Пусть плоскость сечения α пересекает CD в точке K.



Линии пересечения трех попарно пересекающихся плоскостей либо попарно параллельны, либо пересекаются в одной точке.
Тогда рассмотрим плоскости (ABD), (CBD) и (LMN). Они пересекаются по прямым MN, BD и LK. Так как $MN \parallel BD$, то линии пересечения этих плоскостей не могут пересекаться в одной точке. Следовательно, они попарно параллельны:

$$MN \parallel BD \parallel LK$$

Отсюда $LK \parallel BD$. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках получаем:

$$CK : KD = CL : LB = 4 : 1$$

б) Так как тетраэдр правильный, то все его ребра равны 10.
Так как $MN \parallel BD$, то $\triangle AMN \sim \triangle ABD$ по двум углам.
Запишем отношение подобия и найдем MN :

$$\frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$$

$$MN = \frac{1}{5}BD = \frac{10}{5} = 2$$

Так как $LK \parallel BD$, то $\triangle CLK \sim \triangle CBD$ по двум углам.
Запишем отношение подобия и найдем LK :

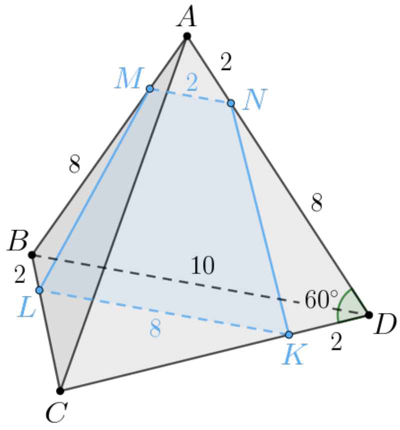
$$\frac{LK}{BD} = \frac{CK}{CD} = \frac{4}{5}$$

$$LK = \frac{4}{5}BD = \frac{4 \cdot 10}{5} = 8$$

Так как $AN : ND = AM : MB = DK : KC = BL : LC = 1 : 4$, то имеем:

$$AM = AN = BL = KD = 2$$

$$CL = CK = MB = ND = 8$$



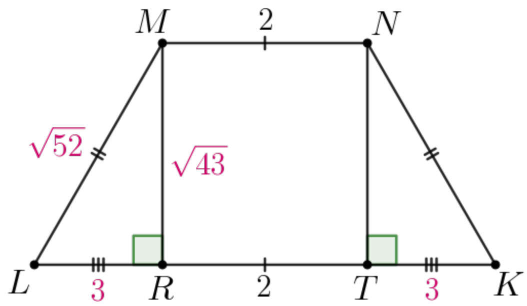
Отметим, что все грани правильного тетраэдра являются равносторонними треугольниками. Следовательно, $\angle MBL = \angle NDK = 60^\circ$.
Получаем, что $\triangle MBL = \triangle NDK$ по двум сторонам и углу между ними: $MB = ND = 8$, $BL = KD = 2$, $\angle MBL = \angle NDK = 60^\circ$.
Следовательно, $ML = NK$. Тогда так как $MN \parallel LK$, $MN \neq LK$, то сечение $MNKL$ тетраэдра — равнобедренная трапеция с основаниями $MN = 2$ и $LK = 8$.
Найдем боковую сторону трапеции. По теореме косинусов для $\triangle NKD$:

$$NK^2 = ND^2 + KD^2 - 2 \cdot ND \cdot KD \cdot \cos\angle NDK$$

$$NK^2 = 64 + 4 - 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$NK^2 = 52 \quad \Rightarrow \quad NK = 2\sqrt{13}$$

Найдем площадь трапеции $MNKL$. Для этого проведем высоты MR и NT.



Так как трапеция равнобедренная, то имеем:

$$LR = TK = \frac{LK - MN}{2} = \frac{8-2}{2} = 3.$$

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle MLR$:

$$LM^2 = MR^2 + LR^2$$

$$MR^2 = 52 - 9 = 43 \quad \Rightarrow \quad MR = \sqrt{43}$$

Отсюда площадь трапеции равна

$$S_{MNKL} = \frac{MN + LK}{2} \cdot MR = \frac{2+8}{2} \cdot \sqrt{43} = 5\sqrt{43}.$$

№14.13 #125879 (Запад, 27.05)

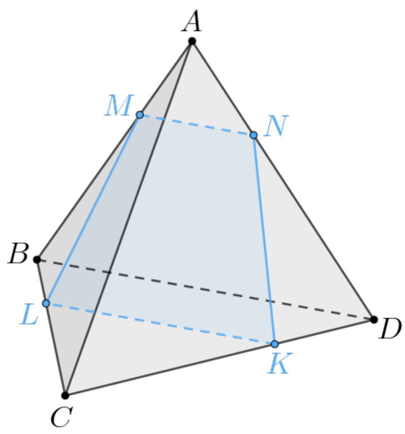
На ребрах BC, AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L, M и N соответственно. Известно, что $AM : MB = BL : LC = AN : ND = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точки L, M и N, делит ребро CD в отношении $2 : 1$, считая от вершины C.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB = 6$.

Ответ: б) $3\sqrt{11}$

Решение. а) Так как $AM : MB = AN : ND$, то по обратной теореме о пропорциональных отрезках $MN \parallel BD$. Пусть плоскость сечения α пересекает CD в точке K.



Линии пересечения трех попарно пересекающихся плоскостей либо попарно параллельны, либо пересекаются в одной точке.

Тогда рассмотрим плоскости (ABD), (CBD) и (LMN). Они пересекаются по прямым MN, BD и LK. Так как $MN \parallel BD$, то линии пересечения плоскостей не могут пересекаться в одной точке. Следовательно, они попарно параллельны:

$$MN \parallel BD \parallel LK$$

Отсюда $LK \parallel BD$. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках получаем:

$$CK : KD = CL : LB = 2 : 1$$

б) Так как тетраэдр правильный, то все его ребра равны 6.

Так как $MN \parallel BD$, то $\triangle AMN \sim \triangle ABD$ по двум углам.

Запишем отношение подобия:

$$\frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$MN = \frac{1}{3}BD = \frac{6}{3} = 2$$

Так как $LK \parallel BD$, то $\triangle CLK \sim \triangle CBD$ по двум углам.

Запишем отношение подобия:

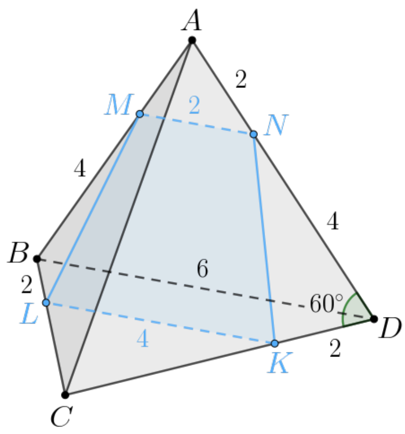
$$\frac{LK}{BD} = \frac{CK}{CD} = \frac{2}{3}$$

$$LK = \frac{2}{3}BD = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$$

Так как $AN : ND = AM : MB = DK : KC = BL : LC = 1 : 2$, то имеем:

$$AM = AN = BL = KD = 2$$

$$CL = CK = MB = ND = 4$$



Отметим, что все грани правильного тетраэдра являются равносторонними треугольниками. Следовательно $\angle MBL = \angle NDK = 60°$.
Получаем, что $\triangle MBL = \triangle NKD$ по двум сторонам и углу между ними: $MB = ND = 4$, $BL = KD = 2$, $\angle MBL = \angle NDK = 60°$.
Следовательно, $ML = NK$. Тогда так как $MN \parallel LK$, $MN \neq LK$, то сечение $MNKL$ тетраэдра — равнобедренная трапеция с основаниями $MN = 2$ и $LK = 4$.
Найдем боковую сторону трапеции. По теореме косинусов для $\triangle NKD$:

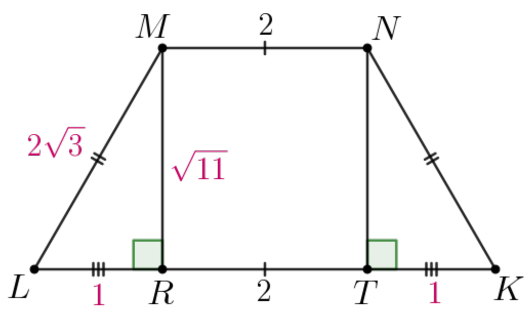
$$NK^2 = ND^2 + KD^2 - 2 \cdot ND \cdot KD \cdot \cos\angle NDK$$

$$NK^2 = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$NK^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad NK = 2\sqrt{3}$$

ШКОЛКОВО

Найдем площадь трапеции $MNKL$. Для этого проведем высоты MR и NT.



Так как трапеция равнобедренная, то

$$LR = TK = \frac{LK - MN}{2} = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle MLR$:

$$LM^2 = MR^2 + LR^2$$

$$MR^2 = 12 - 1 = 11 \quad \Rightarrow \quad MR = \sqrt{11}$$

Отсюда площадь трапеции равна

$$S_{MNKL} = \frac{MN + LK}{2} \cdot MR = \frac{2+4}{2} \cdot \sqrt{11} = 3\sqrt{11}.$$

№14.14 #125894 (Запад, 27.05)

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении $AK : KB = 3 : 1$. Точка L — середина ребра BC. Плоскость α проходит через точки K и L и пересекает ребра B_1C_1 и A_1B_1 в точках M и N соответственно. Известно, что $B_1M : MC_1 = 3 : 1$.

а) Докажите, что $MN \perp AB$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы, если все рёбра призмы равны.

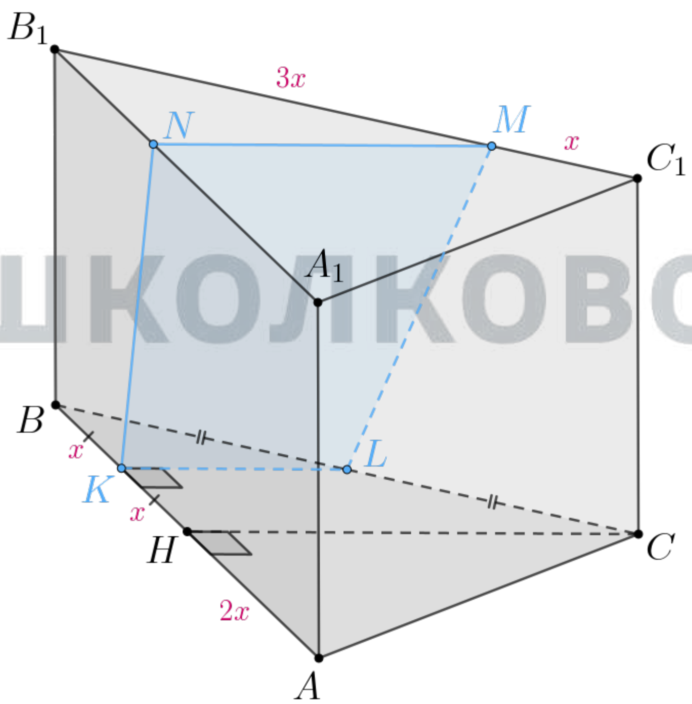
Ответ: б) $\operatorname{arctg} 8$

Решение. а) Проведем высоту CH в основании ABC. Так как призма правильная, то основания являются равносторонними треугольниками. Следовательно, CH также является медианой.

Пусть сторона основания равна $4x$. Тогда $BH = HA = 2x$ и так как $AK : KB = 3 : 1$, то $AK = 3x$, $KB = x$. Отсюда $KH = KB = x$.

В треугольнике BCH точка K — середина HB, точка L — середина BC. Следовательно, KL — средняя линия, то есть $KL \parallel CH$ и $KL \perp AB$.

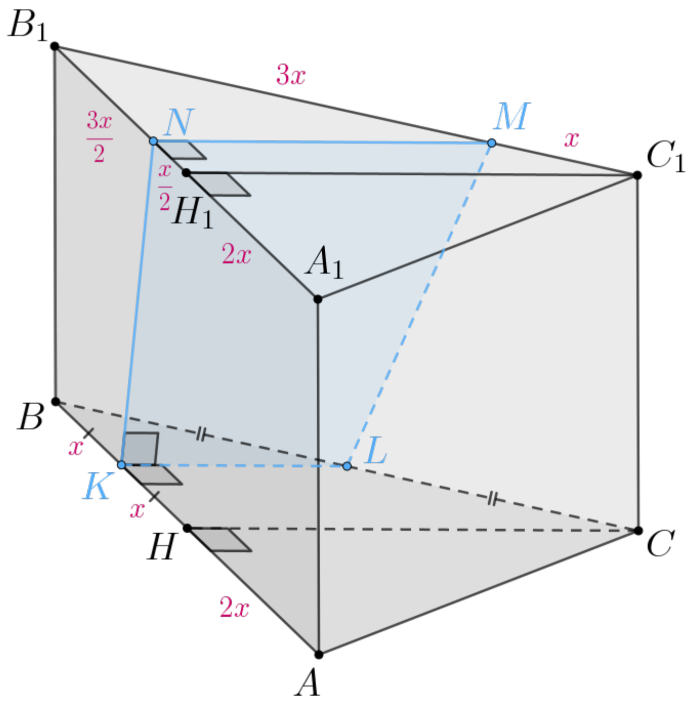
Если параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны. Плоскость α пересекает параллельные плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ по прямым KL и MN, значит, $KL \parallel MN$. Так как $KL \perp AB$, то отсюда $MN \perp AB$. Что и требовалось доказать.



б) Проведем высоту C_1H_1 в основании $A_1B_1C_1$. Так как $MN \perp AB$, $AB \parallel A_1B_1$, то $MN \perp A_1B_1$. Тогда $MN \parallel C_1H$ и по теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{B_1N}{NH_1} = \frac{B_1M}{MC_1} = \frac{3}{1}$$

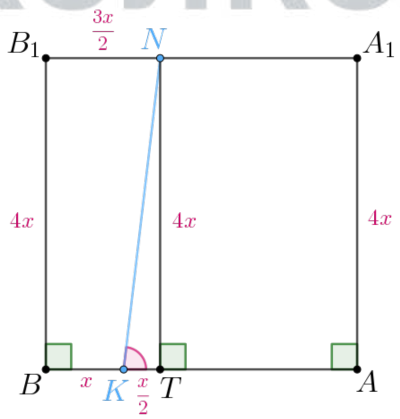
Так как $B_1H_1 = H_1A_1 = 2x$, то $B_1N = \frac{3}{4}B_1H_1 = \frac{3x}{2}$.



Так как призма правильная, то $BB_1 \perp (ABC)$, в частности, $BB_1 \perp KL$. Тогда $KL \perp AB$, $KL \perp BB_1$, следовательно, $KL \perp (ABB_1)$. Отсюда $KL \perp KN$.

Заметим, что KL — прямая пересечения плоскостей α и (ABC), $NK \perp KL$ и $AK \perp KL$. Следовательно, угол между данными плоскостями равен углу $\angle AKN$.

Рассмотрим грань ABB_1A_1. Так как по условию все ребра призмы равны, то $AA_1 = BB_1 = 4x$.



Проведем $NT \perp AB$. Тогда $BT = B_1N = \dfrac{3x}{2}$. Отсюда $KT = BT - BK = \dfrac{3x}{2} - x = \dfrac{x}{2}$.

Так как $NT = BB_1 = 4x$, то из прямоугольного треугольника KTN получаем:

$$\operatorname{tg} \angle TKN = \frac{NT}{KT} = \frac{4x}{\frac{x}{2}} = 8$$

$$\angle AKN = \angle TKN = \operatorname{arctg} 8$$

Таким образом, искомый угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы равен $\operatorname{arctg} 8$.

№14.15 #113002 (Центр, 26.05)

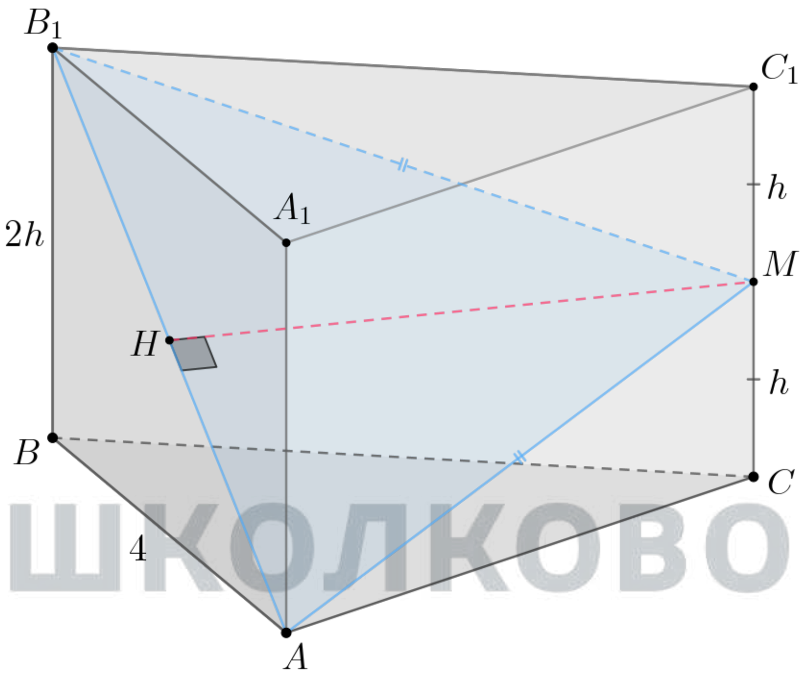
Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M — середина ребра CC_1. Плоскость α проходит через точки B_1, A и M.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения призмы плоскостью α равна 18 и $AB = 4$.

Ответ: б) $2\sqrt{23}$

Решение. а) Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle B_1C_1M$ и $\triangle ACM$. Их катеты CM и C_1M равны, так как M — середина CC_1 по условию. Также равны катеты B_1C_1 и AC, поскольку призма правильная, то есть оба треугольника в основании правильные с равными сторонами.



Тогда $\triangle B_1C_1M = \triangle ACM$ по двум катетам. Тогда равны их гипотенузы $AM = B_1M$. То есть треугольник B_1MA — равнобедренный, что и требовалось доказать.

б) Пусть $BB_1 = 2h$. Тогда по теореме Пифагора

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{16 + 4h^2} = 2\sqrt{4 + h^2}.$$

А также

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{16 + h^2}.$$

Поскольку треугольник $\triangle B_1MA$ — равнобедренный с основанием AB_1, то его высота MH делит сторону AB_1 пополам. То есть

$$AH = \frac{AB_1}{2} = \sqrt{4 + h^2}.$$

Вновь воспользуемся теоремой Пифагора:

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} =$$
$$= \sqrt{16 + h^2 - 4 - h^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Теперь запишем площадь S сечения:

$$S = \frac{MH \cdot AB_1}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{4 + h^2}}{2} = 2\sqrt{12 + 3h^2}.$$

По условию имеем:
$$2\sqrt{12+3h^2}=18$$
$$12+3h^2=81$$
$$3h^2=69$$
$$h^2=23$$
$$h=\sqrt{23}$$
Тогда высота призмы равняется $2h$, то есть $2\sqrt{23}$.

ШКОЛКОВО

№14.16 #127048 (Дальний восток, 27.05)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 3MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 12.

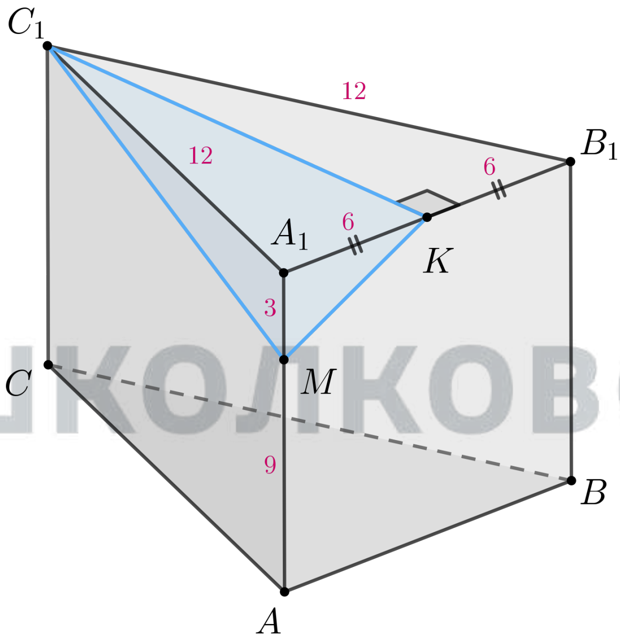
Ответ: б) $9\sqrt{15}$

Решение. а) Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник. Следовательно, медиана C_1K является также и высотой треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда $KC_1 \perp A_1B_1$.

Также так как призма правильная, то $KC_1 \perp AA_1$.

Получили, что KC_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости (ABB_1), следовательно, $KC_1 \perp (ABB_1)$.

Так как $\alpha \perp (ABB_1)$, $K \in \alpha$ и $KC_1 \perp (ABB_1)$, то $KC_1 \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.



б) Выше мы доказали, что $KC_1 \perp (ABB_1)$. Но тогда $KC_1 \perp MK$, следовательно, MKC_1 — прямоугольный треугольник и его площадь можно найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2} MK \cdot C_1K$$

Так как все ребра призмы равны 12, то $A_1K = KB_1 = 6$. Далее, из того, что $AM : MA_1 = 3 : 1$, получаем $AM = 9$, $MA_1 = 3$.

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle A_1MK$:

$$MK^2 = A_1M^2 + A_1K^2$$
$$MK^2 = 9 + 36 = 45 \quad \Rightarrow \quad MK = 3\sqrt{5}$$

По теореме Пифагора для $\triangle A_1C_1K$:

$$C_1K^2 = C_1A_1^2 - A_1K^2$$
$$C_1K^2 = 144 - 36 = 108 \quad \Rightarrow \quad C_1K = 6\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} MK \cdot C_1K = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{3} = 9\sqrt{15}.$$

№14.17 #127050 (Центр, 27.05)

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $3\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.

б) В каком отношении точка K делит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $36\sqrt{6}$?

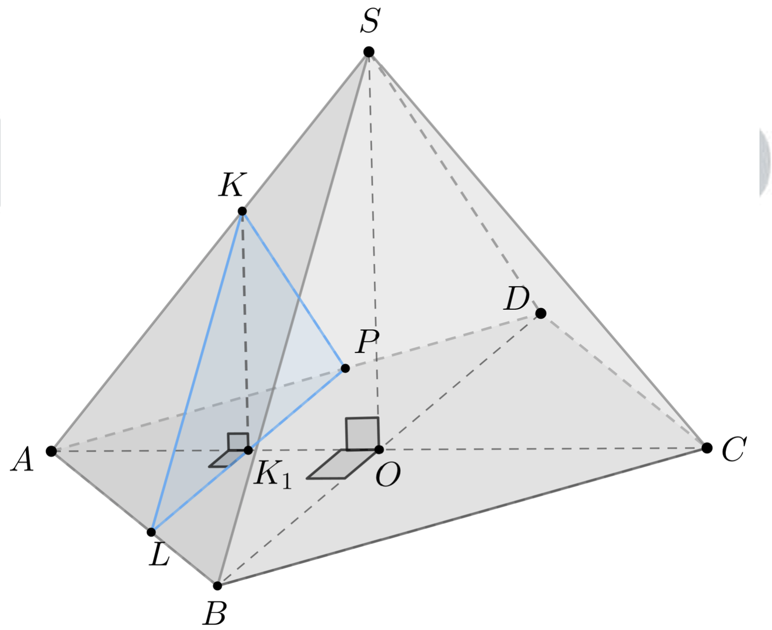
Ответ: б) $\left(\sqrt{6}-1\right):1$

Решение. а) Проведём KK_1 параллельно SO, тогда $KK_1 \perp (ABC)$. Здесь SO — высота пирамиды, при этом так как $SABCD$ — правильная, то O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. Так как по условию $\alpha \perp (ABC)$, то прямая KK_1, проходящая через точку K и перпендикулярная (ABC), лежит в плоскости α. Далее, плоскости α и (ABC) имеют общую точку K_1. Тогда эти плоскости пересекаются по некоторой прямой. Пусть это будет прямая LP, где L, P — точки пересечения со сторонами AB и AD основания соответственно.

Так как KK_1 перпендикулярна плоскости основания, то KK_1 перпендикулярна AC. Покажем, что AC перпендикулярна LP.

- Из свойств квадрата $ABCD$: AC — биссектриса угла BAD.
- Из свойств правильного треугольника KLP : высота KK_1 является и медианой, то есть $LK_1 = K_1P$.

Тогда AK_1 — медиана и биссектриса в треугольнике ALP, а значит, является и высотой. Тогда $AC \perp LP$, $AC \perp KK_1$, то есть AC перпендикулярна плоскости α. Что и требовалось доказать.



б) Распишем объёмы пирамид $KALP$ и $SABCD$:

$$V_{KALP} = \frac{1}{3} \cdot KK_1 \cdot S_{ALP}$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$$

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}} = \frac{KK_1}{SO} \cdot \frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}$$

Выразим нужные отношения через $\dfrac{AK}{AS}$. Рассмотрим подобные по острому углу прямоугольные треугольники AKK_1 и ASO.

Запишем отношение подобия:

$$\frac{AK}{AS} = \frac{KK_1}{SO} = \frac{AK_1}{AO}$$

Найдем отношение площадей:

$$\frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AK_1\cdot LP}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD}=\frac{AK_1}{AC}\cdot\frac{LP}{BD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AK_1}{AO}\cdot\frac{LP}{BD}$$

Из подобия по общему острому углу прямоугольных треугольников AK_1L и AOB имеем:

$$\frac{AK_1}{AO}=\frac{LK_1}{BO}=\frac{\frac{1}{2}LP}{\frac{1}{2}BD}=\frac{LP}{BD}$$

Тогда получаем:

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}}=\frac{KK_1}{SO}\cdot\frac{S_{ALP}}{S_{ABCD}}=\frac{AK}{AS}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{AK_1}{AO}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{AK}{AS}\right)^3$$

Чтобы найти V_{KALP}, запишем площадь правильного треугольника KLP. Из свойств правильного треугольника известно, что $KK_1=\frac{\sqrt{3}}{2}LP$. Тогда имеем:

$$S_{KLP}=\frac{1}{2}\cdot LP\cdot KK_1=\frac{1}{2}LP\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}LP=\frac{\sqrt{3}}{4}LP^2=3\sqrt{3}$$

Отсюда получаем, что $LP=2\sqrt{3}$, $KK_1=3$.
Из прямоугольного равнобедренного треугольника ALP :

$$LP^2=AP^2+AL^2=2AP^2=12$$

Отсюда $AP=\sqrt{6}$. Найдем объем пирамиды $KALP$:

$$V_{KALP}=\frac{1}{3}\cdot KK_1\cdot S_{ALP}=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=3$$

Тогда имеем:

$$\frac{V_{KALP}}{V_{SABCD}}=\frac{3}{36\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\left(\frac{AK}{AS}\right)^3$$

$$\left(\frac{AK}{AS}\right)^3=\frac{3\cdot 2}{36\sqrt{6}}=\frac{1}{6\sqrt{6}}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3$$

Откуда получаем, что $\frac{AK}{AS}=\frac{1}{\sqrt{6}}$. Отсюда если $AK=x$, то $AS=x\sqrt{6}$ и $KS=x\sqrt{6}-x=\left(\sqrt{6}-1\right)x$.
Тогда искомое отношение равно

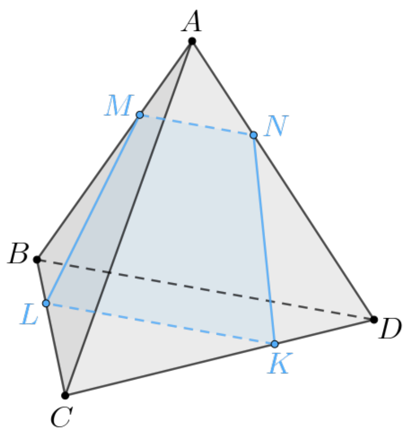
$$\frac{SK}{KA}=\frac{\left(\sqrt{6}-1\right)x}{x}=\frac{\sqrt{6}-1}{1}.$$

№14.18 #127057 (Запад, 27.05)

На ребрах BC, AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L, M и N соответственно. Известно, что $AM : MB = BL : LC = AN : ND = 1 : 3$.
а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точки L, M и N, делит ребро CD в отношении $3 : 1$, считая от вершины C.
б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB = 8$.

Ответ: б) $8\sqrt{6}$

Решение. а) Так как $AM : MB = AN : ND$, то по обратной теореме о пропорциональных отрезках $MN \parallel BD$. Пусть плоскость сечения α пересекает CD в точке K.



Линии пересечения трех попарно пересекающихся плоскостей либо попарно параллельны, либо пересекаются в одной точке.
Тогда рассмотрим плоскости (ABD), (CBD) и (LMN). Они пересекаются по прямым MN, BD и LK. Так как $MN \parallel BD$, то линии пересечения этих плоскостей не могут пересекаться в одной точке. Следовательно, они попарно параллельны:

$$MN \parallel BD \parallel LK$$

Отсюда $LK \parallel BD$. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках получаем:

$$CK : KD = CL : LB = 3 : 1$$

б) Так как тетраэдр правильный, то все его ребра равны 8.
Так как $MN \parallel BD$, то $\triangle AMN \sim \triangle ABD$ по двум углам.
Запишем отношение подобия и найдем MN :

$$\frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$MN = \frac{1}{4}BD = \frac{8}{4} = 2$$

Так как $LK \parallel BD$, то $\triangle CLK \sim \triangle CBD$ по двум углам.
Запишем отношение подобия и найдем LK :

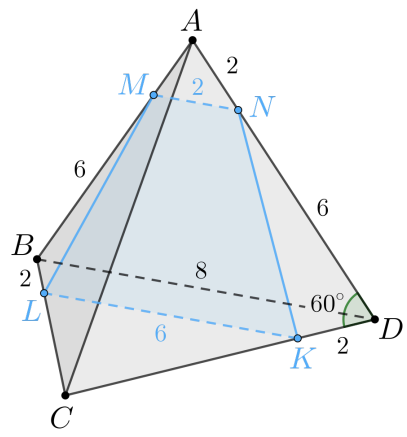
$$\frac{LK}{BD} = \frac{CK}{CD} = \frac{3}{4}$$

$$LK = \frac{3}{4}BD = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$$

Так как $AN : ND = AM : MB = DK : KC = BL : LC = 1 : 3$, то имеем:

$$AM = AN = BL = KD = 2$$

$$CL = CK = MB = ND = 6$$



Отметим, что все грани правильного тетраэдра являются равносторонними треугольниками. Следовательно, $\angle MBL = \angle NDK = 60^\circ$.
Получаем, что $\triangle MBL = \triangle NDK$ по двум сторонам и углу между ними: $MB = ND = 6$, $BL = KD = 2$, $\angle MBL = \angle NDK = 60^\circ$.
Следовательно, $ML = NK$. Тогда так как $MN \parallel LK$, $MN \neq LK$, то сечение $MNKL$ тетраэдра — равнобедренная трапеция с основаниями $MN = 2$ и $LK = 6$.
Найдем боковую сторону трапеции. По теореме косинусов для $\triangle NKD$:

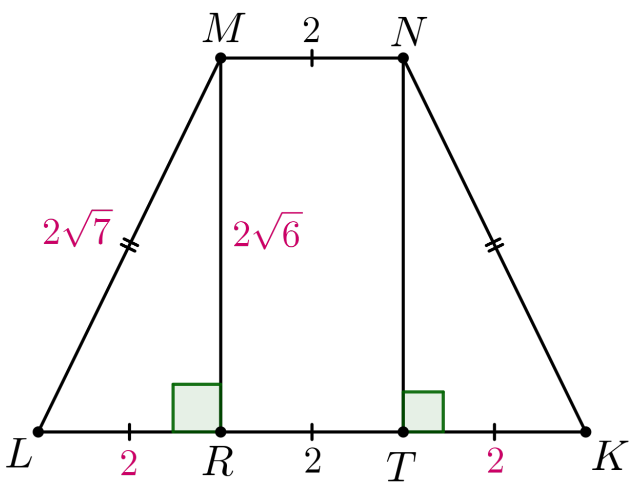
$$NK^2 = ND^2 + KD^2 - 2 \cdot ND \cdot KD \cdot \cos \angle NDK$$

$$NK^2 = 36 + 4 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$NK^2 = 28 \quad \Rightarrow \quad NK = 2\sqrt{7}$$

ШКОЛКОВО

Найдем площадь трапеции $MNKL$. Для этого проведем высоты MR и NT.



Так как трапеция равнобедренная, то имеем:

$$LR = TK = \frac{LK - MN}{2} = \frac{6-2}{2} = 2.$$

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle MLR$:

$$LM^2 = MR^2 + LR^2$$

$$MR^2 = 28 - 4 = 24 \quad \Rightarrow \quad MR = 2\sqrt{6}$$

Отсюда площадь трапеции равна

$$S_{MNKL} = \frac{MN + LK}{2} \cdot MR = \frac{2+6}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}.$$

ШКОЛКОВО

Задачи №15. Решения

№15.1 #125978 (Дальний восток, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x}-2\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+2}-16}{x-1}\geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$2^{3x}-2\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+2}-16=(2^x)^3-8\cdot(2^x)^2+20\cdot 2^x-16.$$

Пусть $t=2^x$. Тогда получим

$$(2^x)^3-8\cdot(2^x)^2+20\cdot 2^x-16=t^3-8\cdot t^2+20\cdot t-16.$$

Убедимся в том, что $t=2$ является корнем этого кубического многочлена:

$$\begin{gathered}2^3-8\cdot 2^2+20\cdot 2-16=\\=8-32+40-16=0.\end{gathered}$$

Поделим многочлен $t^3-8t^2+20t-16$ столбиком на $t-2$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
t^3 & -8t^2 & +20t & -16 & t-2 \\ \cline{5-5}
t^3 & -2t^2 & & & t^2-6t+8 \\ \cline{1-3}
 & -6t^2 & +20t & & \\
 & -6t^2 & +12t & & \\ \cline{2-4}
 & & 8t & -16 & \\
 & & 8t & -16 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}t^3-8t^2+20t-16=\\=(t-2)\left(t^2-6t+8\right)=\\=(t-2)^2(t-4).\end{gathered}$$

Сделаем обратную замену, тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{(2^x-2)^2(2^x-4)}{x-1}\geqslant 0$$

$$\frac{\left(2^x-2^1\right)^2\left(2^x-2^2\right)}{x-1}\geqslant 0$$

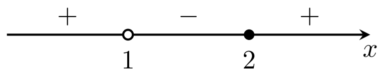
По методу рационализации:

$$\frac{((2-1)(x-1))^2((2-1)(x-2))}{x-1}\geqslant 0$$

$$\frac{1\cdot(x-1)^2\cdot 1\cdot(x-2)}{x-1}\geqslant 0$$

$$\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-1}\geqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty).$$

ШКОЛКОВО

№15.2 #126195 (Дальний восток, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x}-10\cdot 2^{2x}+17\cdot 2^{x}-8}{x}\leqslant 0.$$

Ответ: $(0;3]$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$2^{3x}-10\cdot 2^{2x}+17\cdot 2^{x}-8=\left(2^{x}\right)^{3}-10\cdot\left(2^{x}\right)^{2}+17\cdot 2^{x}-8.$$

Пусть $t=2^{x}$. Тогда получим

$$\left(2^{x}\right)^{3}-10\cdot\left(2^{x}\right)^{2}+17\cdot 2^{x}-8=t^{3}-10\cdot t^{2}+17\cdot t-8.$$

Убедимся в том, что $t=1$ является корнем этого кубического многочлена:

$$\begin{gathered}1^{3}-10\cdot 1^{2}+17\cdot 1-8=\\=1-10+17-8=0.\end{gathered}$$

Поделим многочлен $t^{3}-10t^{2}+17t-8$ столбиком на $t-1:$

$$\begin{array}{rrrr|l}
t^3 & -10t^2 & +17t & -8 & t-1 \\ \cline{5-5}
t^3 & -t^2 & & & t^2-9t+8 \\ \cline{1-2}
 & -9t^2 & +17t & & \\
 & -9t^2 & +9t & & \\ \cline{2-4}
 & & 8t & -8 & \\
 & & 8t & -8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

ШКОЛКОВО

Таким образом,

$$\begin{gathered}t^{3}-10t^{2}+17t-8=\\=(t-1)\left(t^{2}-9t+8\right)=\\=(t-1)(t-1)(t-8)=\\=(t-1)^{2}(t-8).\end{gathered}$$

Сделаем обратную замену, тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{\left(2^{x}-1\right)^{2}\left(2^{x}-8\right)}{x}\leqslant 0$$

$$\frac{\left(2^{x}-2^{0}\right)^{2}\left(2^{x}-2^{3}\right)}{x}\leqslant 0$$

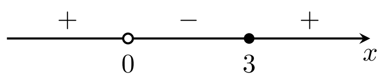
По методу рационализации:

$$\frac{((2-1)(x-0))^{2}\,((2-1)(x-3))}{x}\leqslant 0$$

$$\frac{1\cdot x^{2}\cdot 1\cdot(x-3)}{x}\leqslant 0$$

$$\frac{x^{2}(x-3)}{x}\leqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x\in(0;3]\,.$$

№15.3 #125981 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^x - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729}{50x^2 + 10x + 0{,}5} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty; -0{,}1) \cup (-0{,}1; 2]$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе, используя формулу куба разности:

$$\begin{gathered}27^x - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729 = \\ = (3^x)^3 - 3 \cdot 9^x \cdot 9^1 + 3^x \cdot 3^5 - 9^3 = \\ = (3^x)^3 - 3 \cdot (3^x)^2 \cdot 9 + 3 \cdot 3^x \cdot 9^2 - 9^3 = \\ = (3^x - 9)^3 = \left(3^x - 3^2\right)^3.\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе, используя формулу квадрата суммы:

$$\begin{gathered}50x^2 + 10x + 0{,}5 = \\ = 2 \cdot \left(25x^2 + 5x + \frac{1}{4}\right) = \\ = 2 \cdot \left((5x)^2 + 5x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \\ = 2 \cdot \left(5x + \frac{1}{2}\right)^2.\end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

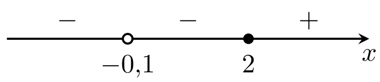
$$\frac{\left(3^x - 3^2\right)^3}{2 \cdot \left(5x + \frac{1}{2}\right)^2} \leqslant 0.$$

ШКОЛКОВО

Используем метод рационализации:

$$\begin{gathered}\frac{(3-1)^3 \cdot (x-2)^3}{2 \cdot \left(5x + \frac{1}{2}\right)^2} \leqslant 0 \\ \frac{4 \cdot (x-2)^3}{\left(5x + \frac{1}{2}\right)^2} \leqslant 0 \\ \frac{(x-2)^3}{\left(5x + \frac{1}{2}\right)^2} \leqslant 0\end{gathered}$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x \in (-\infty; -0{,}1) \cup (-0{,}1; 2].$$

№15.4 #126194 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{3\cdot 27^x - 9^{x+1} + 3^{x+2} - 3}{50x^2 - 30x + 4{,}5} \geqslant 0.$$

Ответ: $\left[0; \dfrac{3}{10}\right) \cup \left(\dfrac{3}{10}; +\infty\right)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе, используя формулу куба разности:

$$\begin{gathered}
3\cdot 27^x - 9^{x+1} + 3^{x+2} - 3 = \\
= 3\cdot (3^x)^3 - 9\cdot (3^x)^2 + 9\cdot 3^x - 3 = \\
= 3\cdot \left((3^x)^3 - 3\cdot (3^x)^2\cdot 1 + 3\cdot 3^x\cdot 1^2 - 1^3\right) = \\
= 3\cdot (3^x - 1)^3 = 3\cdot \left(3^x - 3^0\right)^3.
\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе, используя формулу квадрата разности:

$$\begin{gathered}
50x^2 - 30x + 4{,}5 = \\
= 0{,}5\cdot \left(100x^2 - 60\cdot x + 9\right) = \\
= 0{,}5\cdot (10x - 3)^2.
\end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

$$\frac{3\cdot \left(3^x - 3^0\right)^3}{0{,}5\cdot (10x-3)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{\left(3^x - 3^0\right)^3}{(10x-3)^2} \geqslant 0$$

ШКОЛКОВО

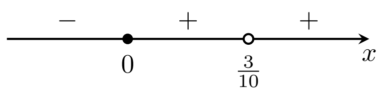
Используем метод рационализации:

$$\frac{(3-1)^3(x-0)^3}{(10x-3)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{8x^3}{(10x-3)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{x^3}{(10x-3)^2} \geqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x \in \left[0; \frac{3}{10}\right) \cup \left(\frac{3}{10}; +\infty\right).$$

№15.5 #125983 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1}{50x^2+50x+12{,}5}\geqslant 0.$$

Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе, используя формулу куба разности:

$$\begin{gathered}27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1=\\ =\left(3^{x+1}\right)^3-3\cdot\left(3^{x+1}\right)^2\cdot 1+3\cdot 3^{x+1}\cdot 1^2-1^3=\\ =\left(3^{x+1}-1\right)^3=\left(3^{x+1}-3^0\right)^3.\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе, используя формулу квадрата суммы:

$$\begin{gathered}50x^2+50x+12{,}5=\\ =12{,}5\cdot\left(4x^2+4x+1\right)=\\ =12{,}5\cdot(2x+1)^2.\end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

$$\frac{\left(3^{x+1}-3^0\right)^3}{12{,}5\cdot(2x+1)^2}\geqslant 0.$$

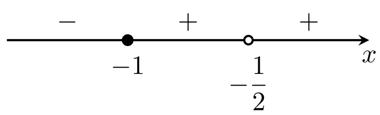
Используем метод рационализации:

$$\frac{(3-1)^3\cdot(x+1-0)^3}{12{,}5\cdot(2x+1)^2}\geqslant 0$$

$$\frac{8\cdot(x+1)^3}{12{,}5\cdot(2x+1)^2}\geqslant 0$$

$$\frac{(x+1)^3}{(2x+1)^2}\geqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x\in\left[-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right).$$

ШКОЛКОВО

№15.6 #125984 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1}{50x^2-50x+12{,}5}\geqslant 0.$$

Ответ: $\left[-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе, используя формулу куба разности:

$$\begin{gathered}27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1=\\=\left(3^{x+1}\right)^3-3\cdot\left(3^{x+1}\right)^2\cdot 1+3\cdot 3^{x+1}\cdot 1^2-1^3=\\=\left(3^{x+1}-1\right)^3=\left(3^{x+1}-3^0\right)^3\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе, используя формулу квадрата разности:

$$\begin{gathered}50x^2-50x+12{,}5=\\=12{,}5\cdot\left(4x^2-4x+1\right)=\\=12{,}5\cdot(2x-1)^2\end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

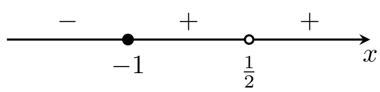
$$\frac{\left(3^{x+1}-3^0\right)^3}{12{,}5\cdot(2x-1)^2}\geqslant 0.$$

Используем метод рационализации:

$$\begin{gathered}\frac{(3-1)^3\cdot(x+1-0)^3}{12{,}5\cdot(2x-1)^2}\geqslant 0\\\frac{8\cdot(x+1)^3}{12{,}5\cdot(2x-1)^2}\geqslant 0\\\frac{(x+1)^3}{(2x-1)^2}\geqslant 0\end{gathered}$$

ШКОЛКОВО

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

№15.7 #126192 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1}-9^{x+2}+3^{x+4}-27}{50x^2+70x+24{,}5}\leqslant 0.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{7}{10}\right)\cup\left(-\dfrac{7}{10};0\right]$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе, используя формулу куба разности:

$$\begin{gathered}27^{x+1}-9^{x+2}+3^{x+4}-27=\\ =27\cdot(3^x)^3-27\cdot(3^x)^2\cdot 3+27\cdot 3^x\cdot 3-27=\\ =27\cdot\left((3^x)^3-3\cdot(3^x)^2\cdot 1+3\cdot 3^x\cdot 1^2-1^3\right)=\\ =27\cdot(3^x-1)^3=27\cdot\left(3^x-3^0\right)^3.\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе, используя формулу квадрата суммы:

$$\begin{gathered}50x^2+70x+24{,}5=\\ =0{,}5\cdot\left(100x^2+140\cdot x+49\right)=\\ =0{,}5\cdot(10x+7)^2\end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

$$\frac{27\cdot\left(3^x-3^0\right)^3}{0{,}5\cdot(10x+7)^2}\leqslant 0$$

$$\frac{\left(3^x-3^0\right)^3}{(10x+7)^2}\leqslant 0$$

ШКОЛКОВО

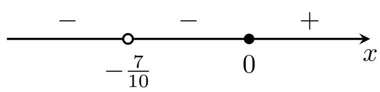
Используем метод рационализации:

$$\frac{(3-1)^3(x-0)^3}{(10x+7)^2}\leqslant 0$$

$$\frac{8x^3}{(10x+7)^2}\leqslant 0$$

$$\frac{x^3}{(10x+7)^2}\leqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x\in\left(-\infty;-\frac{7}{10}\right)\cup\left(-\frac{7}{10};0\right].$$

№15.8 #126152 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{9\cdot 27^x-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+3}-9}{50x^2-90x+40{,}5}\geqslant 0.$$

Ответ: $\left[0;\,\frac{9}{10}\right)\cup\left(\frac{9}{10};+\infty\right)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе, используя формулу куба разности:

$$\begin{gathered}9\cdot 27^x-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+3}-9=\\ =9\cdot\left(3^x\right)^3-3\cdot\left(3^x\right)^2\cdot 9+3\cdot 3^x\cdot 9-9=\\ =9\cdot\left(\left(3^x\right)^3-3\cdot\left(3^x\right)^2\cdot 1+3\cdot 3^x\cdot 1^2-1^3\right)=\\ =9\cdot\left(3^x-1\right)^3=9\cdot\left(3^x-3^0\right)^3.\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе, используя формулу квадрата разности:

$$\begin{gathered}50x^2-90x+40{,}5=\\ =0{,}5\cdot\left(100x^2-180\cdot x+81\right)=\\ =0{,}5\cdot(10x-9)^2.\end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

$$\frac{9\left(3^x-3^0\right)^3}{0{,}5\cdot(10x-9)^2}\geqslant 0$$

$$\frac{\left(3^x-3^0\right)^3}{(10x-9)^2}\geqslant 0$$

ШКОЛКОВО

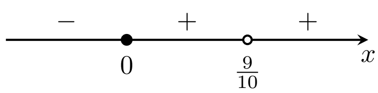
Используем метод рационализации:

$$\frac{(3-1)^3\cdot(x-0)^3}{(10x-9)^2}\geqslant 0$$

$$\frac{8x^3}{(10x-9)^2}\geqslant 0$$

$$\frac{x^3}{(10x-9)^2}\geqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x\in\left[0;\,\frac{9}{10}\right)\cup\left(\frac{9}{10};+\infty\right).$$

№15.9 #125986 (Сибирь, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60{,}5} \geqslant 0.$$

Ответ: $\left[1; \frac{11}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{10}; +\infty\right)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе, используя формулу куба разности:

$$27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27 =$$
$$= (3^x)^3 - 3\cdot(3^x)^2\cdot 3 + 3\cdot 3^x\cdot 3^2 - 3^3 =$$
$$= (3^x - 3)^3 = \left(3^x - 3^1\right)^3.$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе, используя формулу квадрата разности:

$$50x^2 - 110x + 60{,}5 =$$
$$= 50\cdot\left(x^2 - \frac{22}{10}\cdot x + \left(\frac{11}{10}\right)^2\right) =$$
$$= 50\cdot\left(x - \frac{11}{10}\right)^2.$$

Перепишем неравенство:

$$\frac{\left(3^x - 3^1\right)^3}{50\cdot\left(x - \frac{11}{10}\right)^2} \geqslant 0.$$

ШКОЛКОВО

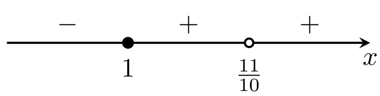
Используем метод рационализации:

$$\frac{(3-1)^3\cdot(x-1)^3}{50\cdot\left(x - \frac{11}{10}\right)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{8\cdot(x-1)^3}{50\cdot\left(x - \frac{11}{10}\right)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{(x-1)^3}{\left(x - \frac{11}{10}\right)^2} \geqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x \in \left[1; \frac{11}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{10}; +\infty\right).$$

№15.10 #125991 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{9^{x^2} - 18 \cdot 3^{x^2} + 81} \leqslant 0.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}; -1\right] \cup \{1\}$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$\begin{gathered} x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = \\ = (x-1)\left(x^2 - 1\right) = (x-1)^2(x+1). \end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$\begin{gathered} 9^{x^2} - 18 \cdot 3^{x^2} + 81 = \\ = \left(3^{x^2}\right)^2 - 2 \cdot \left(3^{x^2}\right) \cdot 9 + 9^2 = \\ = \left(3^{x^2} - 9\right)^2. \end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

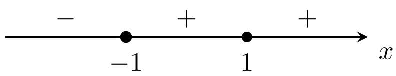
$$\frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)}{\left(3^{x^2} - 9\right)^2} \leqslant 0.$$

Так как $\left(3^{x^2} - 9\right)^2 \geqslant 0$, то неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-1)^2 \cdot (x+1) \leqslant 0 \\ \left(3^{x^2} - 9\right)^2 \neq 0 \end{cases}$$

ШКОЛКОВО

Решим первое неравенство системы методом интервалов:



Получим, что

$$x \in (-\infty; -1] \cup \{1\}.$$

Решим второе неравенство системы:

$$\begin{gathered} \left(3^{x^2} - 9\right)^2 \neq 0 \\ 3^{x^2} - 9 \neq 0 \\ 3^{x^2} \neq 3^2 \\ x^2 \neq 2 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{gathered}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup \{1\} \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Получаем ответ:

$$x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}; -1\right] \cup \{1\}.$$

№15.11 #125990 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{4^{x^2} - 16 \cdot 2^{x^2} + 64} \leqslant 0.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; -1\right] \cup \{1\}$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2\,(x-1) - (x-1) =$$
$$= (x-1)\cdot\left(x^2 - 1\right) = (x-1)^2 \cdot (x+1)\,.$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$4^{x^2} - 16 \cdot 2^{x^2} + 64 =$$
$$= \left(2^{x^2}\right)^2 - 2 \cdot \left(2^{x^2}\right) \cdot 8 + 8^2 =$$
$$= \left(2^{x^2} - 8\right)^2.$$

Перепишем неравенство:

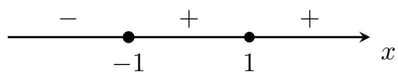
$$\frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)}{\left(2^{x^2} - 8\right)^2} \leqslant 0.$$

Так как $\left(2^{x^2} - 8\right)^2 \geqslant 0$, то неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-1)^2 \cdot (x+1) \leqslant 0 \\ \left(2^{x^2} - 8\right)^2 \neq 0 \end{cases}$$

ШКОЛКОВО

Решим первое неравенство системы методом интервалов:



Получим, что

$$x \in (-\infty; -1] \cup \{1\}.$$

Решим второе неравенство системы:

$$\left(2^{x^2} - 8\right)^2 \neq 0$$
$$2^{x^2} - 8 \neq 0$$
$$2^{x^2} \neq 2^3$$
$$x^2 \neq 3$$
$$x \neq \pm\sqrt{3}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup \{1\} \\ x \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Получаем ответ:

$$x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; -1\right] \cup \{1\}.$$

№15.12 #126193 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\geqslant 0.$$

Ответ: $\{-1\}\cup\left[1;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=$$
$$=(x+1)\cdot\left(x^2-1\right)=(x+1)^2\cdot(x-1)$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16=$$
$$=\left(2^{x^2}\right)^2-2\cdot\left(2^{x^2}\right)\cdot 4+4^2=$$
$$=\left(2^{x^2}-4\right)^2$$

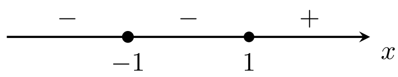
Перепишем неравенство:

$$\frac{(x+1)^2\cdot(x-1)}{\left(2^{x^2}-4\right)^2}\geqslant 0.$$

Так как $\left(2^{x^2}-4\right)^2\geqslant 0$, то неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}(x+1)^2\cdot(x-1)\geqslant 0\\ \left(2^{x^2}-4\right)^2\neq 0\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов:



Получим, что

$$x\in\{-1\}\cup[1;+\infty).$$

Решим второе неравенство системы:

$$\left(2^{x^2}-4\right)^2\neq 0$$
$$2^{x^2}-4\neq 0$$
$$2^{x^2}\neq 2^2$$
$$x^2\neq 2$$
$$x\neq\pm\sqrt{2}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases}x\in\{-1\}\cup[1;+\infty)\\ x\neq\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

Получаем ответ:

$$x\in\{-1\}\cup\left[1;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right).$$

№15.13 #125988 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{27x^3+9x^2-3x-1}{64^{x^2}-4\cdot 8^{x^2}+4}\geqslant 0.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}\cup\left[\frac{1}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$\begin{gathered}27x^3+9x^2-3x-1=\\=9x^2(3x+1)-(3x+1)=\\=(3x+1)\cdot\left(9x^2-1\right)=\\=(3x+1)^2\cdot(3x-1).\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$\begin{gathered}64^{x^2}-4\cdot 8^{x^2}+4=\\=\left(8^2\right)^{x^2}-2\cdot 8^{x^2}\cdot 2+2^2=\\=\left(8^{x^2}\right)^2-2\cdot 8^{x^2}\cdot 2+2^2=\left(8^{x^2}-2\right)^2.\end{gathered}$$

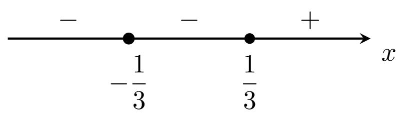
Перепишем неравенство:

$$\frac{(3x+1)^2\cdot(3x-1)}{\left(8^{x^2}-2\right)^2}\geqslant 0.$$

Так как $\left(8^{x^2}-2\right)^2\geqslant 0$, то неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}(3x+1)^2\cdot(3x-1)\geqslant 0\\ \left(8^{x^2}-2\right)^2\neq 0\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов:



Получим, что

$$x\in\left\{-\frac{1}{3}\right\}\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Решим второе неравенство системы:

$$\begin{gathered}\left(8^{x^2}-2\right)^2\neq 0\\ 8^{x^2}-2\neq 0\\ 8^{x^2}\neq 2\\ 2^{3x^2}\neq 2^1\\ 3x^2\neq 1\\ x^2\neq\frac{1}{3}\\ x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\end{gathered}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \in \left\{-\dfrac{1}{3}\right\} \cup \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right) \\ x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Получаем ответ:

$$x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right).$$

ШКОЛКОВО

№15.14 #125989 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{8x^3+4x^2-2x-1}{81^{x^2}-6\cdot 9^{x^2}+9}\geqslant 0.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$\begin{gathered}8x^3+4x^2-2x-1=\\=4x^2(2x+1)-(2x+1)=\\=(2x+1)\cdot\left(4x^2-1\right)=\\=(2x+1)^2\cdot(2x-1).\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$\begin{gathered}81^{x^2}-6\cdot 9^{x^2}+9=\\=\left(9^2\right)^{x^2}-6\cdot 9^{x^2}+9=\\=\left(9^{x^2}\right)^2-2\cdot 9^{x^2}\cdot 3+3^2=\left(9^{x^2}-3\right)^2.\end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

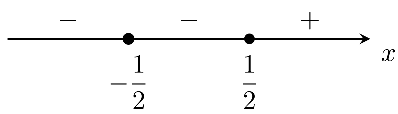
$$\frac{(2x+1)^2\cdot(2x-1)}{\left(9^{x^2}-3\right)^2}\geqslant 0.$$

Так как $\left(9^{x^2}-3\right)^2\geqslant 0$, то неравенство равносильно системе:

ШКОЛКОВО

$$\begin{cases}(2x+1)^2\cdot(2x-1)\geqslant 0\\ \left(9^{x^2}-3\right)^2\neq 0\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов:



Получим, что

$$x\in\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Решим второе неравенство системы:

$$\begin{gathered}\left(9^{x^2}-3\right)^2\neq 0\\ 9^{x^2}-3\neq 0\\ 9^{x^2}\neq 3\\ 3^{2x^2}\neq 3^1\\ 2x^2\neq 1\\ x^2\neq\frac{1}{2}\\ x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{gathered}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \in \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \\ x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Получаем ответ:

$$x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right).$$

ШКОЛКОВО

№15.15 #125992 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2}{2^x+10} \leqslant \frac{3}{2^{x+1}-1}.$$

Ответ: $(-1;5]$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{2}{2^x+10} \leqslant \frac{3}{2\cdot 2^x-1}.$$

Сделаем замену $t=2^x$.
Тогда неравенство примет вид:

$$\frac{2}{t+10} \leqslant \frac{3}{2t-1}$$

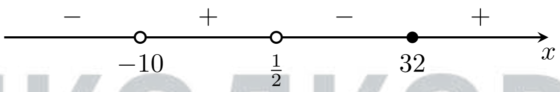
$$\frac{2}{t+10} - \frac{3}{2t-1} \leqslant 0$$

$$\frac{2\,(2t-1)-3\,(t+10)}{(t+10)\,(2t-1)} \leqslant 0$$

$$\frac{4t-2-3t-30}{(t+10)\,(2t-1)} \leqslant 0$$

$$\frac{t-32}{(t+10)\,(2t-1)} \leqslant 0$$

По методу интервалов:



ШКОЛКОВО

Получаем, что

$$t\in(-\infty;-10)\cup\left(\frac{1}{2};32\right].$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x<-10 \\ \dfrac{1}{2}<2^x\leqslant 32 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ 2^{-1}<2^x\leqslant 2^5 \end{array}\right.$$

$$-1<x\leqslant 5$$

Получаем ответ:

$$x\in(-1;5].$$

№15.16 #125993 (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{3^{3x}-29\cdot 3^{2x}+55\cdot 3^{x}-27}{x}\geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup[3;+\infty)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$3^{3x}-29\cdot 3^{2x}+55\cdot 3^{x}-27=\left(3^{x}\right)^{3}-29\cdot\left(3^{x}\right)^{2}+55\cdot 3^{x}-27.$$

Пусть $t=3^{x}$. Тогда получим

$$\left(3^{x}\right)^{3}-29\cdot\left(3^{x}\right)^{2}+55\cdot 3^{x}-27=t^{3}-29\cdot t^{2}+55\cdot t-27.$$

Убедимся в том, что $t=1$ является корнем этого кубического многочлена:

$$\begin{gathered}1^{3}-29\cdot 1^{2}+55\cdot 1-27=\\=1-29+55-27=0.\end{gathered}$$

Поделим многочлен $t^{3}-29t^{2}+55t-27$ столбиком на $t-1:$

$$\begin{array}{rrrr|l}
t^{3} & -29t^{2} & +55t & -27 & t-1 \\ \cline{5-5}
t^{3} & -t^{2} & & & t^{2}-28t+27 \\ \cline{1-3}
 & -28t^{2} & +55t & & \\
 & -28t^{2} & +28t & & \\ \cline{2-4}
 & & 27t & -27 & \\
 & & 27t & -27 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

ШКОЛКОВО

Таким образом,

$$\begin{gathered}t^{3}-29t^{2}+55t-27=\\=(t-1)\cdot\left(t^{2}-28t+27\right)=\\=(t-1)(t-27)(t-1)=\\=(t-1)^{2}(t-27).\end{gathered}$$

Сделаем обратную замену, тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{\left(3^{x}-1\right)^{2}\left(3^{x}-27\right)}{x}\geqslant 0$$

$$\frac{\left(3^{x}-3^{0}\right)^{2}\left(3^{x}-3^{3}\right)}{x}\geqslant 0$$

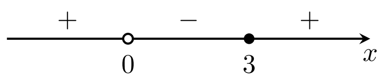
По методу рационализации:

$$\frac{((3-1)(x-0))^{2}\left((3-1)(x-3)\right)}{x}\geqslant 0$$

$$\frac{4\cdot x^{2}\cdot 2\cdot(x-3)}{x}\geqslant 0$$

$$\frac{x^{2}(x-3)}{x}\geqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x\in(-\infty;0)\cup[3;+\infty).$$

№15.17 #126227 (Центр, 26.05)

Решите неравенство

$$7\log_3\left(x^2-7x+12\right)\leqslant 8+\log_3\frac{(x-3)^7}{x-4}.$$

Ответ: $[1;3)\cup(4;7]$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases}x^2-7x+12>0\\ x-4\neq 0\\ \dfrac{(x-3)^7}{x-4}>0\end{cases}$$

$$x\in(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$$

На ОДЗ преобразуем исходное неравенство:

$$\log_3\left(x^2-7x+12\right)^7-\log_3 3^8-\log_3\frac{(x-3)^7}{x-4}\leqslant 0$$

$$\log_3\frac{\left(x^2-7x+12\right)^7}{3^8\cdot\frac{(x-3)^7}{x-4}}\leqslant 0$$

$$\log_3\frac{(x-3)^7(x-4)^7}{3^8\cdot\frac{(x-3)^7}{x-4}}\leqslant 0$$

На ОДЗ последнее неравенство равносильно неравенству

$$\log_3\frac{(x-4)^8}{3^8}\leqslant 0$$

$$8\cdot\log_3\frac{|x-4|}{3}\leqslant 0$$

$$\log_3\frac{|x-4|}{3}\leqslant 0$$

По методу рационализации это неравенство на ОДЗ равносильно:

$$(3-1)\cdot\left(\frac{|x-4|}{3}-1\right)\leqslant 0$$

$$\frac{|x-4|-3}{3}\leqslant 0$$

$$|x-4|\leqslant 3$$

$$-3\leqslant x-4\leqslant 3$$

$$1\leqslant x\leqslant 7$$

Пересекая с ОДЗ, получаем

$$x\in[1;3)\cup(4;7].$$

№15.18 #126229 (Центр, 26.05)

Решите неравенство

$$9\log_7\left(x^2+x-2\right)\leqslant 10+\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}.$$

Ответ: $[-9;-2)\cup(1;5]$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases}x^2+x-2>0\\ x+2\neq 0\\ \dfrac{(x-1)^9}{x+2}>0\end{cases}$$

$$x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$$

На ОДЗ преобразуем исходное неравенство:

$$\log_7\left(x^2+x-2\right)^9-\log_7 7^{10}-\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}\leqslant 0$$

$$\log_7\frac{\left(x^2+x-2\right)^9}{7^{10}\cdot\frac{(x-1)^9}{x+2}}\leqslant 0$$

$$\log_7\frac{(x-1)^9(x+2)^9}{7^{10}\cdot\frac{(x-1)^9}{x+2}}\leqslant 0$$

На ОДЗ последнее неравенство равносильно неравенству

$$\log_7\frac{(x+2)^{10}}{7^{10}}\leqslant 0$$

$$10\cdot\log_7\frac{|x+2|}{7}\leqslant 0$$

$$\log_7\frac{|x+2|}{7}\leqslant 0$$

По методу рационализации это неравенство на ОДЗ равносильно:

$$(7-1)\cdot\left(\frac{|x+2|}{7}-1\right)\leqslant 0$$

$$\frac{|x+2|-7}{7}\leqslant 0$$

$$|x+2|\leqslant 7$$

$$-7\leqslant x+2\leqslant 7$$

$$-9\leqslant x\leqslant 5$$

Пересекая с ОДЗ, получаем

$$x\in[-9;-2)\cup(1;5].$$

№15.19 #127060 (Дальний восток, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x} - 10 \cdot 2^{2x} + 17 \cdot 2^x - 8}{x} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$2^{3x} - 10 \cdot 2^{2x} + 17 \cdot 2^x - 8 = (2^x)^3 - 10 \cdot (2^x)^2 + 17 \cdot 2^x - 8.$$

Пусть $t = 2^x$. Тогда получим

$$(2^x)^3 - 10 \cdot (2^x)^2 + 17 \cdot 2^x - 8 = t^3 - 10 \cdot t^2 + 17 \cdot t - 8.$$

Убедимся в том, что $t = 1$ является корнем этого кубического многочлена:

$$\begin{gathered} 1^3 - 10 \cdot 1^2 + 17 \cdot 1 - 8 = \\ = 1 - 10 + 17 - 8 = 0. \end{gathered}$$

Поделим многочлен $t^3 - 10t^2 + 17t - 8$ столбиком на $t - 1:$

$$\begin{array}{rrrr|l} t^3 & -10t^2 & +17t & -8 & t-1 \\ \cline{5-5} t^3 & -t^2 & & & t^2 - 9t + 8 \\ \cline{1-3} & -9t^2 & +17t & & \\ & -9t^2 & +9t & & \\ \cline{2-4} & & 8t & -8 & \\ & & 8t & -8 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

ШКОЛКОВО

Таким образом,

$$\begin{gathered} t^3 - 10t^2 + 17t - 8 = \\ = (t-1)\left(t^2 - 9t + 8\right) = \\ = (t-1)(t-1)(t-8) = \\ = (t-1)^2(t-8). \end{gathered}$$

Сделаем обратную замену, тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{(2^x - 1)^2\,(2^x - 8)}{x} \geqslant 0$$

$$\frac{\left(2^x - 2^0\right)^2\left(2^x - 2^3\right)}{x} \geqslant 0$$

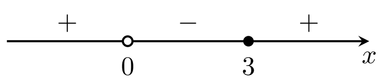
По методу рационализации:

$$\frac{((2-1)(x-0))^2\,((2-1)(x-3))}{x} \geqslant 0$$

$$\frac{1^2 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot (x-3)}{x} \geqslant 0$$

$$\frac{x^2(x-3)}{x} \geqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x \in (-\infty; 0) \cup [3; +\infty).$$

№15.20 #127061 (Дальний восток, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x} - 9\cdot 4^x + 3\cdot 2^{x+3} - 16}{x-2} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$2^{3x} - 9\cdot 4^x + 3\cdot 2^{x+3} - 16 = (2^x)^3 - 9\cdot (2^x)^2 + 24\cdot 2^x - 16.$$

Пусть $t = 2^x$. Тогда получим

$$(2^x)^3 - 9\cdot (2^x)^2 + 24\cdot 2^x - 16 = t^3 - 9\cdot t^2 + 24\cdot t - 16.$$

Убедимся в том, что $t = 1$ является корнем этого кубического многочлена:

$$\begin{aligned} &1^3 - 9\cdot 1^2 + 24\cdot 1 - 16 = \\ &= 1 - 9 + 24 - 16 = 0. \end{aligned}$$

Поделим многочлен $t^3 - 9t^2 + 24t - 16$ столбиком на $t-1$:

$$\begin{array}{rrrr|l} t^3 & -\,9t^2 & +\,24t & -\,16 & t-1 \\ \cline{5-5} t^3 & -\,t^2 & & & t^2-8t+16 \\ \cline{1-3} & -\,8t^2 & +\,24t & & \\ & -\,8t^2 & +\,8t & & \\ \cline{2-4} & & 16t & -\,16 & \\ & & 16t & -\,16 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

ШКОЛКОВО

Таким образом,

$$\begin{aligned} &t^3 - 9t^2 + 24t - 16 = \\ &= (t-1)\left(t^2 - 8t + 16\right) = \\ &= (t-1)(t-4)^2. \end{aligned}$$

Сделаем обратную замену, тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{(2^x - 1)\,(2^x - 4)^2}{x-2} \geqslant 0$$

$$\frac{\left(2^x - 2^0\right)\left(2^x - 2^2\right)^2}{x-2} \geqslant 0$$

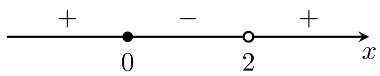
По методу рационализации:

$$\frac{((2-1)(x-0))\,((2-1)(x-2))^2}{x-2} \geqslant 0$$

$$\frac{1\cdot x\cdot 1^2\cdot (x-2)^2}{x-2} \geqslant 0$$

$$\frac{x(x-2)^2}{x-2} \geqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty).$$

№15.21 **#127062** (Центр, 27.05)

Решите неравенство

$$\frac{(2x)^3-(2x)^2-2x+1}{16^{x^2}-4\cdot 4^{x^2}+4}\leqslant 0.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе:

$$\begin{gathered}(2x)^3-(2x)^2-2x+1=\\=(2x)^2(2x-1)-(2x-1)=\\=(2x-1)\cdot\left((2x)^2-1\right)=\\=(2x-1)^2\cdot(2x+1).\end{gathered}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$\begin{gathered}16^{x^2}-4\cdot 4^{x^2}+4=\\=\left(4^2\right)^{x^2}-4\cdot 4^{x^2}+4=\\=\left(4^{x^2}\right)^2-2\cdot 4^{x^2}\cdot 2+2^2=\left(4^{x^2}-2\right)^2.\end{gathered}$$

Перепишем неравенство:

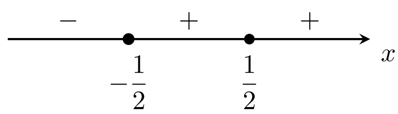
$$\frac{(2x-1)^2\cdot(2x+1)}{\left(4^{x^2}-2\right)^2}\leqslant 0.$$

Так как $\left(4^{x^2}-2\right)^2\geqslant 0$, то неравенство равносильно системе:

ШКОЛКОВО

$$\begin{cases}(2x-1)^2\cdot(2x+1)\leqslant 0\\ \left(4^{x^2}-2\right)^2\neq 0\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов:



Получим, что

$$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Решим второе неравенство системы:

$$\begin{gathered}\left(4^{x^2}-2\right)^2\neq 0\\ 4^{x^2}-2\neq 0\\ 4^{x^2}\neq 2\\ 2^{2x^2}\neq 2^1\\ 2x^2\neq 1\\ x^2\neq\frac{1}{2}\\ x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{gathered}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Получаем ответ:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

ШКОЛКОВО

Задачи №16. Решения

№16.1 #2555 (Дальний восток, 27.05)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторое целое число лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 24,5 млн рублей?

Ответ: 5 лет

Решение. Пусть n – число лет, на которое взят кредит. Так как годовой процент в банке равен 25%, то это значит, что каждый год долг увеличивается на четверть. Из условия следует, что система выплат дифференцированная, следовательно, каждый год долг должен уменьшаться на $\dfrac{1}{n}$ часть, то есть на $\dfrac{14}{n}$ млн рублей. Составим таблицу:

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата
1	14	$14+\frac{1}{4}\cdot 14$	$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot 14$
2	$\frac{n-1}{n}\cdot 14$	$\frac{n-1}{n}\cdot 14+\frac{1}{4}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 14$	$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 14$
...	...	...	...
n	$\frac{14}{n}$	$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{n}$	$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{n}$

Таким образом, общая сумма выплат составляет

$$\left(\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot 14\right)+\left(\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 14\right)+\ldots+\left(\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 14\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+n\cdot\frac{14}{n}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 14\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\cdot n+14=\frac{7}{4}(n+1)+14$$

В скобках мы получили сумму арифметической прогрессии, где первый член равен $\frac{1}{n}$, а n-ый равен 1, количество членов равно n.

Таким образом, так как общая сумма выплат равна по условию 24,5 млн рублей, получаем

$$\frac{7}{4}(n+1)+14=24{,}5$$

$$\frac{7}{4}(n+1)=10{,}5$$

$$7(n+1)=42$$

$$n+1=6$$

$$n=5$$

№16.2 #126148 (Дальний восток, 27.05)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторое целое число лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 7,5 млн рублей?

Ответ: 4 года

Решение. Пусть n — число лет, на которое взят кредит. Так как годовой процент в банке равен 20%, то это значит, что каждый год долг увеличивается на одну пятую. Из условия следует, что система выплат дифференцированная, следовательно, каждый год долг должен уменьшаться на $\frac{1}{n}$ часть, то есть на $\frac{5}{n}$ млн рублей.

Составим таблицу (все вычисления ведутся в млн рублей):

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата
1	5	$5+\frac{1}{5}\cdot 5$	$\frac{5}{n}+\frac{1}{5}\cdot 5$
2	$\frac{n-1}{n}\cdot 5$	$\frac{n-1}{n}\cdot 5+\frac{1}{5}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 5$	$\frac{5}{n}+\frac{1}{5}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 5$
...	...	...	...
n	$\frac{5}{n}$	$\frac{5}{n}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{n}$	$\frac{5}{n}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{n}$

Таким образом, общая сумма выплат составляет

$$\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{5}\cdot 5\right)+\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{5}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 5\right)+\ldots+\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot 5\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+n\cdot\frac{5}{n}=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot 5\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\cdot n+5=\frac{1}{2}(n+1)+5$$

При вычислениях в больших скобках мы получили сумму арифметической прогрессии, где первый член равен 1, n-ый член равен $\frac{1}{n}$, а количество членов равно n.

Таким образом, так как общая сумма выплат равна по условию 7,5 млн рублей, то получаем

$$\frac{1}{2}(n+1)+5=7{,}5$$
$$\frac{1}{2}(n+1)=2{,}5$$
$$n+1=5$$
$$n=4$$

№16.3 #125995 (Дальний восток, 27.05)

15 декабря 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 72 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

Ответ: 4,635 млн рублей

Решение. Составим таблицу:

месяц	долг до %, млн рублей	долг после %, млн рублей	платеж, млн рублей	долг после платежа, млн рублей
1	18	$18+18\cdot\frac{1}{100}$	$18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}$	$\frac{71}{72}\cdot 18$
...	...	...	...	...
13	$\frac{60}{72}\cdot 18$	$\frac{60}{72}\cdot 18+\frac{60}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}$	$\frac{60}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}$	$\frac{59}{72}\cdot 18$
...	...	...	...	...
24	$\frac{49}{72}\cdot 18$	$\frac{49}{72}\cdot 18+\frac{49}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}$	$\frac{49}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}$	$\frac{48}{72}\cdot 18$
...	...	...	...	...

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 13-го по 24-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{\frac{60}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}+\frac{49}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}}{2}\cdot 12=4{,}635.$$

№16.4 #125996 (Дальний восток, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

Ответ: 4,665 млн рублей

Решение. Составим таблицу:

месяц	долг до %, млн	долг после %, млн	платеж, млн	долг после платежа, млн
1	6	$6+6\cdot\frac{3}{100}$	$6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	$\frac{23}{24}\cdot 6$
...	...	...	...	...
12	$\frac{13}{24}\cdot 6$	$\frac{13}{24}\cdot 6+\frac{13}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}$	$\frac{13}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	$\frac{12}{24}\cdot 6$
...	...	...	...	...
24	$\frac{1}{24}\cdot 6$	$\frac{1}{24}\cdot 6+\frac{1}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}$	$\frac{1}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	0

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 1-го по 12-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}+\frac{13}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}}{2}\cdot 12=4{,}665.$$

№16.5 #126005 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– К 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2028 году составит 17925 тыс. рублей

Ответ: 30

Решение. По условию $r\% = 3\%$. Пусть $k = \dfrac{r}{100} = \dfrac{3}{100}$.

Так как в течение всего срока кредита долг уменьшается на одну и ту же сумму, то каждый месяц выплачивается одинаковая часть долга и начисленные проценты. При этом каждый месяц долг уменьшается на $\dfrac{A}{24}$ млн рублей. Тогда можно составить следующую таблицу, отслеживающую изменения долга (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	A	$A + k\cdot A$	$\frac{A}{24} + k\cdot A$	$\frac{23A}{24}$
2	$\frac{23A}{24}$	$\frac{23A}{24} + k\cdot\frac{23A}{24}$	$\frac{A}{24} + k\cdot\frac{23A}{24}$	$\frac{22A}{24}$
...	...	...	...	...
13	$\frac{12A}{24}$	$\frac{12A}{24} + k\cdot\frac{12A}{24}$	$\frac{A}{24} + k\cdot\frac{12A}{24}$	$\frac{11A}{24}$
...	...	...	...	...
24	$\frac{A}{24}$	$\frac{A}{24} + k\cdot\frac{A}{24}$	$\frac{A}{24} + k\cdot\frac{A}{24}$	0

Общая сумма платежей в 2028 году, то есть с 13 по 24 месяц кредита, по условию равна 17925 тыс. руб. = 17,925 млн руб.

Заметим, что платежи за 2028 год образуют арифметическую прогрессию из 12 членов, тогда их сумма равна:

$$\Sigma = \frac{\left(\frac{A}{24} + k\cdot\frac{12A}{24}\right) + \left(\frac{A}{24} + k\cdot\frac{A}{24}\right)}{2}\cdot 12 = \frac{A}{2} + k\cdot\frac{13A}{4}.$$

Отсюда, подставив $k = \dfrac{3}{100}$, по,лучаем уравнение:

$$\frac{A}{2} + \frac{3}{100}\cdot\frac{13A}{4} = 17{,}925 \,\Big|\cdot 400$$

$$200A + 39A = 7170$$

$$A = \frac{7170}{239} = 30$$

№16.6 #126145 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 60 месяцев. Условия возврата кредита таковы:
– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно A, если общая сумма платежей в 2031 году составит 1356 тыс. рублей?

Ответ: 6

Решение. По условию $r\% = 2\%$. Пусть $k = \frac{r}{100} = \frac{2}{100}$.
Так как в течение всего срока кредита долг уменьшается на одну и ту же сумму, то каждый месяц выплачивается одинаковая часть долга и начисленные проценты. При этом каждый месяц долг уменьшается на $\frac{A}{60}$ млн рублей. Тогда можно составить следующую таблицу, отслеживающую изменения долга (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	A	$A + k \cdot A$	$\frac{A}{60} + k \cdot A$	$\frac{59A}{60}$
2	$\frac{59A}{60}$	$\frac{59A}{60} + k \cdot \frac{59A}{60}$	$\frac{A}{60} + k \cdot \frac{59A}{60}$	$\frac{58A}{60}$
...	...	...	...	...
49	$\frac{12A}{60}$	$\frac{12A}{60} + k \cdot \frac{12A}{60}$	$\frac{A}{60} + k \cdot \frac{12A}{60}$	$\frac{11A}{60}$
...	...	...	...	...
60	$\frac{A}{60}$	$\frac{A}{60} + k \cdot \frac{A}{60}$	$\frac{A}{60} + k \cdot \frac{A}{60}$	0

Общая сумма платежей в 2031 году, то есть с 49 по 60 месяцы кредита, по условию равна 1356 тыс. руб. = 1,356 млн руб.
Заметим, что платежи за 2031 год образуют арифметическую прогрессию из 12 членов, тогда их сумма равна:

$$\Sigma = \frac{\left(\frac{A}{60} + k \cdot \frac{12A}{60}\right) + \left(\frac{A}{60} + k \cdot \frac{A}{60}\right)}{2} \cdot 12 = \frac{A}{5} + k \cdot \frac{13A}{10}.$$

Отсюда, подставив $k = \frac{2}{100}$, получаем уравнение:

$$\frac{A}{5} + \frac{2}{100} \cdot \frac{13A}{10} = 1{,}356 \,\Big|\, \cdot 1000$$

$$200A + 26A = 1356$$

$$A = \frac{1356}{226} = 6$$

№16.7 #126146 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 48 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2030 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2030 году составит 6390 тыс. рублей?

Ответ: 24

Решение. По условию $r\% = 1\%$. Пусть $k = \dfrac{r}{100} = \dfrac{1}{100}$.

Так как в течение всего срока кредита долг уменьшается на одну и ту же сумму, то каждый месяц выплачивается одинаковая часть долга и начисленные проценты. При этом каждый месяц долг уменьшается на $\dfrac{A}{48}$ млн рублей. Тогда можно составить следующую таблицу, отслеживающую изменения долга (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	A	$A + k\cdot A$	$\frac{A}{48} + k\cdot A$	$\frac{47A}{48}$
2	$\frac{47A}{48}$	$\frac{47A}{48} + k\cdot\frac{47A}{48}$	$\frac{A}{48} + k\cdot\frac{47A}{48}$	$\frac{46A}{48}$
...	...	...	...	...
37	$\frac{12A}{48}$	$\frac{12A}{48} + k\cdot\frac{12A}{48}$	$\frac{A}{48} + k\cdot\frac{12A}{48}$	$\frac{11A}{48}$
...	...	...	...	...
48	$\frac{A}{48}$	$\frac{A}{48} + k\cdot\frac{A}{48}$	$\frac{A}{48} + k\cdot\frac{A}{48}$	0

Общая сумма платежей в 2030 году, то есть с 37 по 48 месяцы кредита, по условию равна 6390 тыс. руб. = 6,39 млн руб.

Заметим, что платежи за 2030 год образуют арифметическую прогрессию из 12 членов, тогда их сумма равна:

$$\Sigma = \frac{\left(\frac{A}{48} + k\cdot\frac{12A}{48}\right) + \left(\frac{A}{48} + k\cdot\frac{A}{48}\right)}{2}\cdot 12 = \frac{A}{4} + k\cdot\frac{13A}{8}.$$

Отсюда, подставив $k = \dfrac{1}{100}$, получаем уравнение:

$$\frac{A}{4} + \frac{1}{100}\cdot\frac{13A}{8} = 6{,}39 \;\Big|\cdot 800$$

$$200A + 13A = 5112$$

$$A = \frac{5112}{213} = 24$$

№16.8 #126147 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2027 году составит 2610 тыс. рублей?

Ответ: 3

Решение. По условию $r\% = 4\%$. Пусть $k = \frac{r}{100} = \frac{4}{100}$.

Так как в течение всего срока кредита долг уменьшается на одну и ту же сумму, то каждый месяц выплачивается одинаковая часть долга и начисленные проценты. При этом каждый месяц долг уменьшается на $\frac{A}{24}$ млн рублей. Тогда можно составить следующую таблицу, отслеживающую изменения долга (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	A	$A + k\cdot A$	$\frac{A}{24} + k\cdot A$	$\frac{23A}{24}$
2	$\frac{23A}{24}$	$\frac{23A}{24} + k\cdot\frac{23A}{24}$	$\frac{A}{24} + k\cdot\frac{23A}{24}$	$\frac{22A}{24}$
...	...	...	...	...
12	$\frac{13A}{24}$	$\frac{13A}{24} + k\cdot\frac{13A}{24}$	$\frac{A}{24} + k\cdot\frac{13A}{24}$	$\frac{12A}{24}$
...	...	...	...	...
24	$\frac{A}{24}$	$\frac{A}{24} + k\cdot\frac{A}{24}$	$\frac{A}{24} + k\cdot\frac{A}{24}$	0

Общая сумма платежей в 2027 году, то есть с 1 по 12 месяцы кредита, по условию равна 2610 тыс. руб. $=$ 2,61 млн руб.

Заметим, что платежи за 2027 год образуют арифметическую прогрессию из 12 членов, тогда их сумма равна:

$$\Sigma = \frac{\left(\frac{A}{24} + k\cdot A\right) + \left(\frac{A}{24} + k\cdot\frac{13A}{24}\right)}{2}\cdot 12 = \frac{A}{2} + k\cdot\frac{37A}{4}.$$

Отсюда, подставив $k = \frac{4}{100}$, получаем уравнение:

$$\frac{A}{2} + \frac{4}{100}\cdot\frac{37A}{4} = 2{,}61 \;\Big|\cdot 100$$

$$50A + 37A = 261$$

$$A = \frac{261}{87} = 3$$

№16.9 #125998 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 7830 тыс. рублей?

Ответ: 1

Решение. Составим таблицу:

месяц	долг до %, млн	долг после %, млн	платеж, млн	долг после платежа, млн
1	18	$18+18\cdot\frac{r}{100}$	$18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{36}$	$\frac{35}{36}\cdot 18$
...	...	...	...	...
12	$\frac{25}{36}\cdot 18$	$\frac{25}{36}\cdot 18+\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{36}$	$\frac{24}{36}\cdot 18$
...	...	...	...	...
36	$\frac{1}{36}\cdot 18$	$\frac{1}{36}\cdot 18+\frac{1}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{1}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{36}$	0

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 1-го по 12-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{36}+\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{36}}{2}\cdot 12=7{,}83$$

$$\frac{183\cdot r}{100}+6=7{,}83$$

$$r=1$$

№16.10 #126150 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 4830 тыс. рублей?

Ответ: 2

Решение. Составим таблицу (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до %	Долг после %	Платеж	Долг после платежа
1	9	$9+9\cdot\frac{r}{100}$	$9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{36}$	$\frac{35}{36}\cdot 9$
...	...	...	...	...
12	$\frac{25}{36}\cdot 9$	$\frac{25}{36}\cdot 9+\frac{25}{36}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{25}{36}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{36}$	$\frac{24}{36}\cdot 9$
...	...	...	...	...
36	$\frac{1}{36}\cdot 9$	$\frac{1}{36}\cdot 9+\frac{1}{36}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{1}{36}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{36}$	0

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 1-го по 12-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{36}+\frac{25}{36}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{36}}{2}\cdot 12=4{,}83$$

$$\frac{183\cdot r}{200}+3=4{,}83$$

$$r=2$$

№16.11 #125997 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма платежей в 2031 году составила 3951 тыс. рублей?

Ответ: 1,5

Решение. Составим таблицу:

месяц	долг до %, тыс	долг после %, тыс	платеж, тыс	долг после платежа, тыс
1	18	$18+18\cdot\frac{r}{100}$	$18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}$	$\frac{59}{60}\cdot 18$
...	...	...	...	...
49	$\frac{12}{60}\cdot 18$	$\frac{12}{60}\cdot 18+\frac{12}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{12}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}$	$\frac{11}{60}\cdot 18$
...	...	...	...	...
60	$\frac{1}{60}\cdot 18$	$\frac{1}{60}\cdot 18+\frac{1}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{1}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}$	0

Просуммируем платежи за 2031 год, то есть с 49-го по 60-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{\left(\frac{12}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}\right)+\left(\frac{1}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}\right)}{2}\cdot 12=3{,}951$$

$$\frac{117\cdot r}{100}+3{,}6=3{,}951$$

$$r=1{,}5$$

№16.12 #126151 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на 48 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2030 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма платежей в 2030 году составила 3195 тыс. рублей?

Ответ: 1

Решение. Составим таблицу (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до %	Долг после %	платеж	Долг после платежа
1	12	$12+12\cdot\frac{r}{100}$	$12\cdot\frac{r}{100}+\frac{12}{48}$	$\frac{47}{48}\cdot 12$
...	...	...	...	...
37	$\frac{12}{48}\cdot 12$	$\frac{12}{48}\cdot 12+\frac{12}{48}\cdot 12\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{12}{48}\cdot 12\cdot\frac{r}{100}+\frac{12}{48}$	$\frac{11}{48}\cdot 12$
...	...	...	...	...
48	$\frac{1}{48}\cdot 12$	$\frac{1}{48}\cdot 12+\frac{1}{48}\cdot 12\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{1}{48}\cdot 12\cdot\frac{r}{100}+\frac{12}{48}$	0

Просуммируем платежи за 2030 год, то есть с 37-го по 48-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{\left(\frac{12}{48}\cdot 12\cdot\frac{r}{100}+\frac{12}{48}\right)+\left(\frac{1}{48}\cdot 12\cdot\frac{r}{100}+\frac{12}{48}\right)}{2}\cdot 12=3{,}195$$

$$\frac{39\cdot r}{200}+3=3{,}195$$

$$r=1$$

№16.13 #126149 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 6165 тыс. рублей?

Ответ: 2

Решение. Составим таблицу (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до %	Долг после %	Платеж	Долг после платежа
1	9	$9+9\cdot\frac{r}{100}$	$9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{24}$	$\frac{23}{24}\cdot 9$
...	...	...	...	...
12	$\frac{13}{24}\cdot 9$	$\frac{13}{24}\cdot 9+\frac{13}{24}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{13}{24}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{24}$	$\frac{12}{24}\cdot 9$
...	...	...	...	...
24	$\frac{1}{24}\cdot 9$	$\frac{1}{24}\cdot 9+\frac{1}{24}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{1}{24}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{24}$	0

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 1-го по 12-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{24}+\frac{13}{24}\cdot 9\cdot\frac{r}{100}+\frac{9}{24}}{2}\cdot 12=6{,}165$$

$$\frac{333\cdot r}{400}+4{,}5=6{,}165$$

$$r=2$$

№16.14 #126000 (Центр, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга одним платежом;
– 15-го числа каждого месяца (с января 2027 года по март 2028 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15 марта 2028 года долг составит 200 тыс. рублей;
– 15 апреля 2028 года кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма платежей после полного погашения составит 612 тыс. рублей?

Ответ: 500 000 руб

Решение. Пусть A тыс. рублей – сумма, взятая в кредит.
Фраза «с января 2027 года по март 2028 года включительно долг должен быть на одну и ту же величину меньше» означает, что в течение 15 месяцев долг уменьшается на x тыс. рублей.
Каждый такой платеж состоит из двух частей: первая часть всегда одинаковая – это x тыс. рублей; вторая часть состоит из процентов, «набежавших» на долг в этом месяце.
Составим таблицу:

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Сумма платежа	Долг после платежа
1	A	$A+0{,}02\cdot A$	$0{,}02\cdot A+x$	$A-x$
2	$A-x$	$A-x+0{,}02\cdot(A-x)$	$0{,}02\cdot(A-x)+x$	$A-2x$
3	$A-2x$	$A-2x+0{,}02\cdot(A-2x)$	$0{,}02\cdot(A-2x)+x$	$A-3x$
...	...	...	...	...
15	$A-14x$	$A-14x+0{,}02\cdot(A-14x)$	$0{,}02\cdot(A-14x)+x$	$A-15x=200$
16	$A-15x$	$A-15x+0{,}02\cdot(A-15x)$	$0{,}02\cdot(A-15x)+A-15x$	0

Так как 15 марта 2028 года, то есть в 15 месяце долг составит 200 тыс. рублей, получаем уравнение:

$$A-15x=200 \text{ тыс. рублей.}$$

Выразим x :

$$x=\frac{A-200}{15}$$

Общая сумма платежей равна:

$$0{,}02\cdot A+x+0{,}02\cdot(A-x)+x+\dots+0{,}02\cdot(A-14x)+x+0{,}02\cdot(A-15x)+A-15x=$$

$$=0{,}02\cdot 16A+15x-0{,}02\cdot x\cdot(1+2+3+\dots+15)+A-15x=$$

$$=0{,}32\cdot A-0{,}02\cdot x\cdot\left(\frac{1+15}{2}\cdot 15\right)+A=1{,}32\cdot A-2{,}4\cdot x=612 \text{ тыс. рублей}$$

Подставим значение x из первого уравнения:

$$1{,}32\cdot A-2{,}4\cdot\frac{A-200}{15}=612$$

$$1{,}32\cdot A-\frac{24}{150}\cdot A+\frac{480}{15}=612$$

$$1{,}32\cdot A-0{,}16\cdot A+32=612$$

$$1{,}16\cdot A=580$$
$$A=500$$

Таким образом, кредит планируется взять на сумму 500 000 рублей.

№16.15 #126001 (Запад, 27.05)

В июле 2025 планируется взять кредит в банке сроком на четыре года на сумму 2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026 и 2027 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– в январе 2028 и 2029 годов долг возрастает на $2r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем;

– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите r, если общая переплата по кредиту после полного его погашения составит 650 тыс. рублей.

Ответ: 10

Решение. Пусть $S = 2$ млн рублей, $k = \dfrac{r}{100}$. Так как в течение всего срока кредита долг уменьшается на одну и ту же сумму, то каждый год выплачивается одинаковая часть долга и начисленные проценты.

Тогда можно составить следующую таблицу, отслеживающую изменения долга (все вычисления ведутся в млн рублей):

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
2026	S	$S + k \cdot S$	$0{,}25S + k \cdot S$	$0{,}75S$
2027	$0{,}75S$	$0{,}75S + k \cdot 0{,}75S$	$0{,}25S + k \cdot 0{,}75S$	$0{,}5S$
2028	$0{,}5S$	$0{,}5S + k \cdot 0{,}5S$	$0{,}25S + 2k \cdot 0{,}5S$	$0{,}25S$
2029	$0{,}25S$	$0{,}25S + 2k \cdot 0{,}25S$	$0{,}25S + 2k \cdot 0{,}25S$	0

Переплата по кредиту складывается из выплаченных процентов. Отсюда получаем уравнение:

$$k \cdot S + k \cdot 0{,}75S + 2k \cdot 0{,}5S + 2k \cdot 0{,}25S = 0{,}65$$

$$k \cdot 3{,}25S = 0{,}65$$

$$k = \frac{0{,}65}{3{,}25S} = \frac{0{,}65}{3{,}25 \cdot 2} = \frac{1}{10}$$

Отсюда получаем:

$$r = 100 \cdot k = 10.$$

№16.16 #113006 (Центр, 26.05)

Строительство нового завода стоит 100 млн рублей. Затраты на производство x тысяч единиц продукции на таком заводе равны $Z = 0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене q тысяч рублей за единицу, то прибыль в млн рублей за один год составит $qx - Z$. Когда завод будет построен, планируется выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении q строительство завода окупится не более чем за 4 года?

Ответ: 9

Решение. Так как строительство завода должно окупиться не более чем за 4 года, то прибыль за 4 года должна составить не менее 100 млн рублей. Следовательно,

$$\begin{gathered}4\left(qx - \left(0{,}5x^2 + x + 7\right)\right) \geqslant 100\\ qx - 0{,}5x^2 - x - 7 \geqslant 25\end{gathered}.$$

Цена q принимает такие значения, при которых прибыль (значение выражения $qx - 0{,}5x^2 - x - 7$) будет наибольшей. Следовательно, наибольшее значение выражения $qx - 0{,}5x^2 - x - 7$ должно быть $\geqslant 25$.
Рассмотрим функцию

$$y = qx - 0{,}5x^2 - x - 7 = -0{,}5x^2 + (q-1)x - 7.$$

Она является квадратичной, ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз. Следовательно, наибольшее значение она принимает в своей вершине, то есть в точке

$$x_0 = \frac{-(q-1)}{2\cdot(-0{,}5)} = q - 1.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{gathered}-0{,}5(q-1)^2 + (q-1)(q-1) - 7 \geqslant 25\\ (q-1)^2 \geqslant 64\\ q \geqslant 9.\end{gathered}$$

Следовательно, наименьшее подходящее $q = 9$.

ШКОЛКОВО

№16.17 #12946 (Центр, 26.05)

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы в млн рублей за один год составит $px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Ответ: 4 года

Решение. Найдем такое количество производимой продукции x, при котором прибыль фирмы будет наибольшей при фиксированном p. Для этого нам мужно найти максимум выражения $px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right)$.

$$\begin{gathered} px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right) = -0{,}5x^2 + (p-2)x - 6 = \\ = -0{,}5\left(x^2 - 2(p-2)x + 12\right) = \\ = -0{,}5\left(x^2 - 2(p-2)x + (p-2)^2 - (p-2)^2 + 12\right) = \\ = -0{,}5(x-p+2)^2 + 0{,}5(p-2)^2 - 6 \end{gathered}$$

Заметим, что $-0{,}5(x-p+2)^2 \leqslant 0$, поэтому

$$-0{,}5(x-p+2)^2 + 0{,}5(p-2)^2 - 6 \leqslant 0{,}5(p-2)^2 - 6$$

Значит, максимальное значение выражения $px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right)$ равно $0{,}5(p-2)^2 - 6$ и достигается при $x - p + 2 = 0$. Отсюда $x = p - 2$, то есть за каждый год фирма будет зарабатывать $0{,}5(p-2)^2 - 6$ млн рублей.

В первый год $p = 10$. Тогда прибыль фирмы за этот год составит $0{,}5(10-2)^2 - 6 = 26 < 159$ млн рублей.

Прибыль фирмы за второй год составит $0{,}5(11-2)^2 - 6 = 34{,}5$ млн рублей, так как $p = 11$. Значит, за первые два года фирма заработает $26 + 34{,}5 = 60{,}5 < 159$ млн рублей.

Прибыль фирмы за третий год составит $0{,}5(12-2)^2 - 6 = 44$ млн рублей, так как $p = 12$. Значит, за первые три года фирма заработает $60{,}5 + 44 = 104{,}5$ млн рублей.

Прибыль фирмы за четвертый год составит $0{,}5(13-2)^2 - 6 = 54{,}5$ млн рублей, так как $p = 13$. Всего за первые четыре года фирма заработает $104{,}5 + 54{,}5 = 159$ млн рублей. Значит, строительство окупится за 4 года.

ШКОЛКОВО

№16.18 #127064 (Дальний восток, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 36 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

Ответ: 9,66 млн рублей

Решение. Составим таблицу:

Месяц	Долг до %, млн рублей	Долг после %, млн рублей	Платеж, млн рублей	Долг после платежа, млн рублей
1	18	$18+18\cdot\frac{2}{100}$	$18\cdot\frac{2}{100}+\frac{18}{36}$	$\frac{35}{36}\cdot 18$
...	...	...	...	...
12	$\frac{25}{36}\cdot 18$	$\frac{25}{36}\cdot 18+\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{2}{100}$	$\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{2}{100}+\frac{18}{36}$	$\frac{24}{36}\cdot 18$
...	...	...	...	...
24	$\frac{13}{36}\cdot 18$	$\frac{13}{36}\cdot 18+\frac{13}{36}\cdot 18\cdot\frac{2}{100}$	$\frac{13}{36}\cdot 18\cdot\frac{2}{100}+\frac{18}{36}$	$\frac{12}{36}\cdot 18$
...	...	...	...	...

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 1-го по 12-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{18\cdot\frac{2}{100}+\frac{18}{36}+\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{2}{100}+\frac{18}{36}}{2}\cdot 12=9{,}66.$$

№16.19 #127065 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 60 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2027 году составит 2508 тыс. рублей?

Ответ: 6

Решение. По условию $r\% = 2\%$. Пусть $k = \dfrac{r}{100} = \dfrac{2}{100}$.

Так как в течение всего срока кредита долг уменьшается на одну и ту же сумму, то каждый месяц выплачивается одинаковая часть долга и начисленные проценты. При этом каждый месяц долг уменьшается на $\dfrac{A}{60}$ млн рублей. Тогда можно составить следующую таблицу, отслеживающую изменения долга (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	A	$A + k\cdot A$	$\dfrac{A}{60} + k\cdot A$	$\dfrac{59A}{60}$
2	$\dfrac{59A}{60}$	$\dfrac{59A}{60} + k\cdot\dfrac{59A}{60}$	$\dfrac{A}{60} + k\cdot\dfrac{59A}{60}$	$\dfrac{58A}{60}$
...	...	...	...	...
12	$\dfrac{49A}{60}$	$\dfrac{49A}{60} + k\cdot\dfrac{49A}{60}$	$\dfrac{A}{60} + k\cdot\dfrac{49A}{60}$	$\dfrac{48A}{60}$
...	...	...	...	...
60	$\dfrac{A}{60}$	$\dfrac{A}{60} + k\cdot\dfrac{A}{60}$	$\dfrac{A}{60} + k\cdot\dfrac{A}{60}$	0

Общая сумма платежей в 2027 году, то есть с 1 по 12 месяцы кредита, по условию равна 2508 тыс. руб. = 2,508 млн руб.

Заметим, что платежи за 2027 год образуют арифметическую прогрессию из 12 членов, тогда их сумма равна:

$$\Sigma = \frac{\left(\frac{A}{60} + k\cdot A\right) + \left(\frac{A}{60} + k\cdot\frac{49A}{60}\right)}{2}\cdot 12 = \frac{A}{5} + k\cdot\frac{109A}{10}.$$

Отсюда, подставив $k = \dfrac{2}{100}$, получаем уравнение:

$$\frac{A}{5} + \frac{2}{100}\cdot\frac{109A}{10} = 2{,}508 \,\Big|\cdot 1000$$

$$200A + 218A = 2508$$

$$A = \frac{2508}{418} = 6$$

№16.20 #127066 (Сибирь, 27.05)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн рублей на срок 48 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2030 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2027 году составит 8550 тыс. рублей?

Ответ: 24

Решение. По условию $r\% = 1\%$. Пусть $k = \dfrac{r}{100} = \dfrac{1}{100}$.
Так как в течение всего срока кредита долг уменьшается на одну и ту же сумму, то каждый месяц выплачивается одинаковая часть долга и начисленные проценты. При этом каждый месяц долг уменьшается на $\dfrac{A}{48}$ млн рублей. Тогда можно составить следующую таблицу, отслеживающую изменения долга (все вычисления ведутся в млн рублей):

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	A	$A + k\cdot A$	$\dfrac{A}{48} + k\cdot A$	$\dfrac{47A}{48}$
2	$\dfrac{47A}{48}$	$\dfrac{47A}{48} + k\cdot\dfrac{47A}{48}$	$\dfrac{A}{48} + k\cdot\dfrac{47A}{48}$	$\dfrac{46A}{48}$
...	...	...	...	...
12	$\dfrac{37A}{48}$	$\dfrac{37A}{48} + k\cdot\dfrac{37A}{48}$	$\dfrac{A}{48} + k\cdot\dfrac{37A}{48}$	$\dfrac{36A}{48}$
...	...	...	...	...
48	$\dfrac{A}{48}$	$\dfrac{A}{48} + k\cdot\dfrac{A}{48}$	$\dfrac{A}{48} + k\cdot\dfrac{A}{48}$	0

Общая сумма платежей в 2027 году, то есть с 1 по 12 месяцы кредита, по условию равна 8550 тыс. руб. = 8,55 млн руб.
Заметим, что платежи за 2027 год образуют арифметическую прогрессию из 12 членов, тогда их сумма равна:

$$\Sigma = \frac{\left(\frac{A}{48} + k\cdot A\right) + \left(\frac{A}{48} + k\cdot\frac{37A}{48}\right)}{2}\cdot 12 = \frac{A}{4} + k\cdot\frac{85A}{8}.$$

Отсюда, подставив $k = \dfrac{1}{100}$, получаем уравнение:

$$\frac{A}{4} + \frac{1}{100}\cdot\frac{85A}{8} = 8{,}55 \,\Big|\cdot 800$$

$$200A + 85A = 6840$$

$$A = \frac{6840}{285} = 24$$

Задачи №17. Решения

№17.1 #125941 (Дальний восток, 27.05)

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

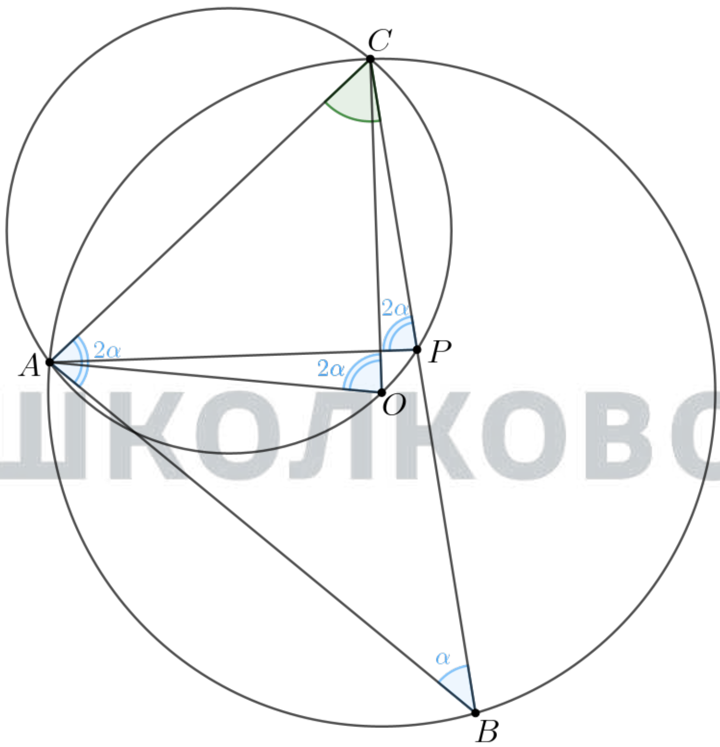
Ответ: б) 5

Решение. а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$.

Так как O — центр описанной окружности, а $\angle ABC$ является вписанным и опирается на хорду AC, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ как центральный, опирающийся на хорду AC.

Заметим, что так как $AOPC$ — вписанный, то $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$.

Тогда $\triangle ABC \sim \triangle PAC$ по двум углам ($\angle APC = \angle BAC$ и $\angle ACB$ — общий). Что и требовалось доказать.



б) Запишем отношение соответствующих сторон для $\triangle ABC \sim \triangle PAC$:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CP}{AC} \quad \Rightarrow \quad CP = \frac{AC^2}{CB} \quad \Rightarrow \quad CP = \frac{8}{3}$$

Заметим, что из подобия треугольников вытекает, что $\angle PAC = \alpha$, а значит, AP является биссектрисой $\angle BAC$. По свойству биссектрисы получаем:

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{CP} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{AC \cdot PB}{CP}$$

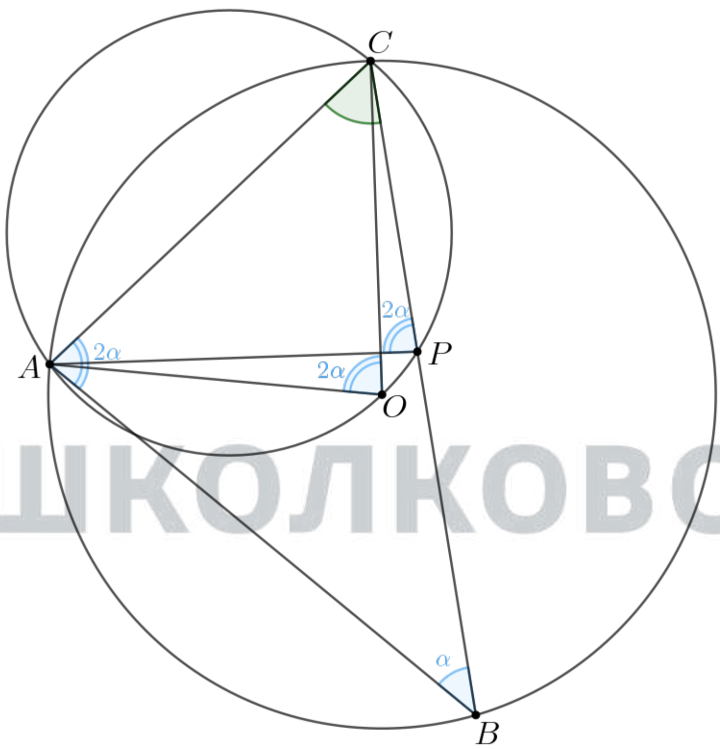
$$AB = \frac{4 \cdot \left(6 - \frac{8}{3}\right)}{\frac{8}{3}} = 5$$

№17.2 #125944 (Дальний восток, 27.05)

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.
а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.
б) Найдите AB, если $BC = \sqrt{21}$ и $AC = 3$.

Ответ: б) 4

Решение. а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$.
Так как O — центр описанной окружности, а $\angle ABC$ является вписанным и опирается на хорду AC, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ как центральный, опирающийся на хорду AC.
Заметим, что так как $AOPC$ — вписанный, то $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$.
Тогда $\triangle ABC \sim \triangle PAC$ по двум углам ($\angle APC = \angle BAC$ и $\angle ACB$ — общий). Что и требовалось доказать.



б) Запишем отношение соответствующих сторон для $\triangle ABC \sim \triangle PAC$:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CP}{AC} \quad \Rightarrow \quad CP = \frac{AC^2}{CB} \quad \Rightarrow \quad CP = \frac{9}{\sqrt{21}}$$

Заметим, что из подобия треугольников вытекает, что $\angle PAC = \alpha$, а значит, AP является биссектрисой $\angle BAC$. По свойству биссектрисы получаем:

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{CP} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{AC \cdot PB}{CP}$$

$$AB = \frac{3 \cdot \left(\sqrt{21} - \frac{9}{\sqrt{21}}\right)}{\frac{9}{\sqrt{21}}} = 4$$

№17.3 **#125947** (Сибирь, 27.05)

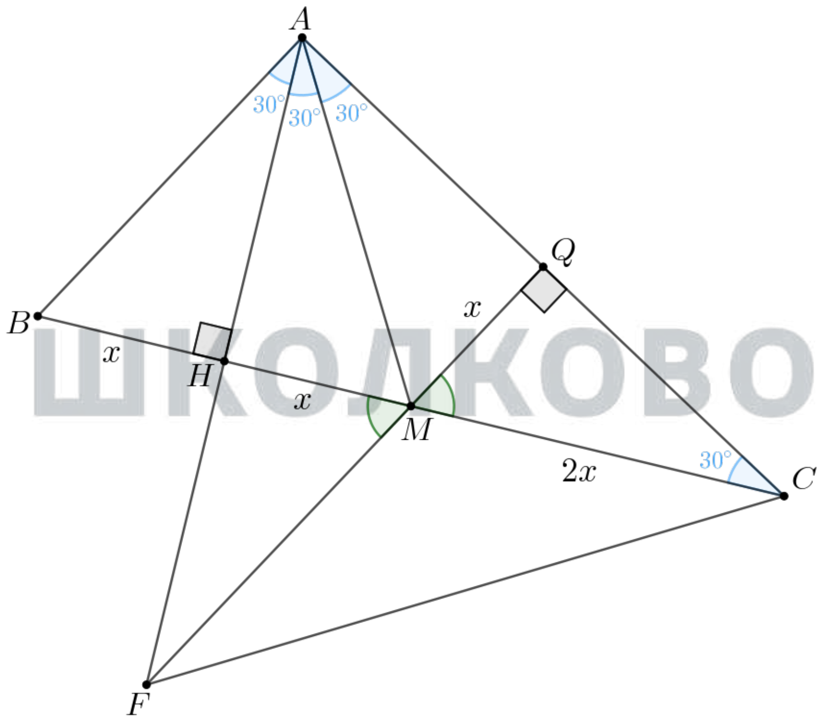
В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен 30°. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 10$.

Ответ: б) $25\sqrt{3}$

Решение. а) Пусть $MQ = x$. Тогда из прямоугольного $\triangle MQC$ с углом 30° получаем, что $MC = 2x$.
Рассмотрим прямоугольный $\triangle HAC$. Так как $\angle ACH = 30^\circ$, то $\angle HAC = 60^\circ$. В силу того, что AM — биссектриса, получаем $\angle HAM = \angle MAQ = 30^\circ$.
Заметим, что $\triangle HAM = \triangle QAM$ по острому углу и гипотенузе. Тогда $HM = x$, следовательно, в силу $BM = MC$ получаем $BH = x$.
Таким образом, получили, что высота AH треугольника BAM является и медианой, а значит, также является биссектрисой. Следовательно, $\angle BAH = \angle HAM = 30^\circ$.



Тогда имеем:

$$\angle BAC = \angle BAH + \angle HAM + \angle MAQ = 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

Что и требовалось доказать.

б) В прямоугольном треугольнике ABC катет напротив угла 30° равен половине гипотенузы, тогда из $AB = 10$ следует, что $4x = BC = 20$. Отсюда $HM = MQ = BH = x = 5$ и $MC = 2x = 10$.
Осталось найти отрезок FH, так как он является высотой к стороне MC в $\triangle FMC$.
Далее, $\angle HMF = \angle QMC$ как вертикальные. Тогда $\triangle HMF = \triangle QMC$ по острому углу и прилежащему катету. Отсюда $FM = MC = 10$.
По теореме Пифагора для $\triangle FHM$:

$$FH^2 = FM^2 - HM^2 = 100 - 25 = 75 \quad \Rightarrow \quad FH = 5\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна:

$$S_{FMC} = \frac{1}{2} \cdot FH \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3}$$

№17.4 #126139 (Сибирь, 27.05)

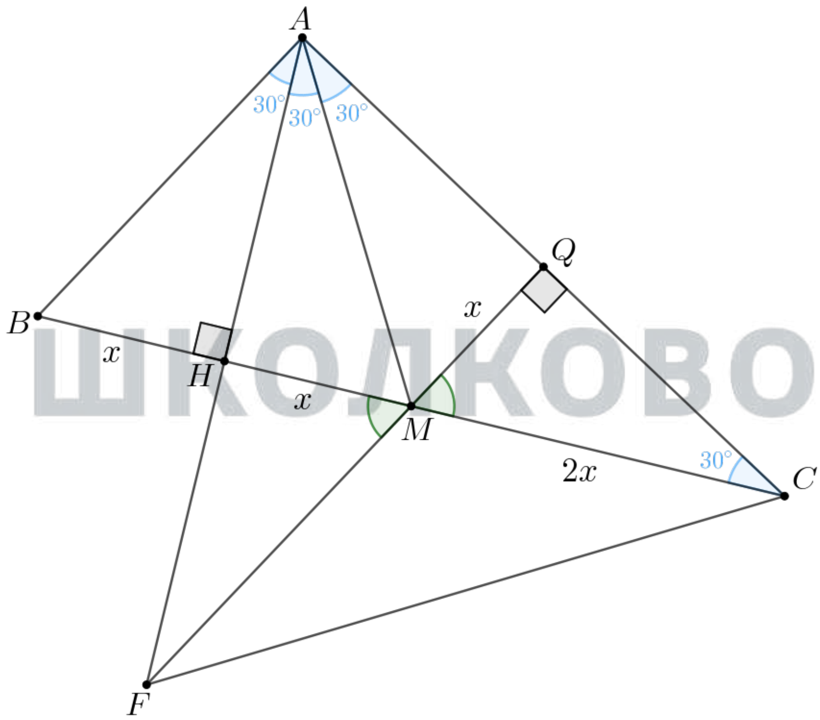
В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 8$.

Ответ: б) $16\sqrt{3}$

Решение. а) Пусть $MQ = x$. Тогда из прямоугольного $\triangle MQC$ с углом $30°$ получаем, что $MC = 2x$.
Рассмотрим прямоугольный $\triangle HAC$. Так как $\angle ACH = 30°$, то $\angle HAC = 60°$. В силу того, что AM — биссектриса, получаем $\angle HAM = \angle MAQ = 30°$.
Заметим, что $\triangle HAM = \triangle QAM$ по острому углу и гипотенузе. Тогда $HM = x$, следовательно, в силу $BM = MC$ получаем $BH = x$.
Таким образом, получили, что высота AH треугольника BAM является и медианой, а значит, также является биссектрисой. Следовательно, $\angle BAH = \angle HAM = 30°$.



Тогда имеем:

$$\angle BAC = \angle BAH + \angle HAM + \angle MAQ = 30° + 30° + 30° = 90°$$

Что и требовалось доказать.
б) В прямоугольном треугольнике ABC катет напротив угла $30°$ равен половине гипотенузы, тогда из $AB = 8$ следует, что $4x = BC = 16$. Отсюда $HM = MQ = BH = x = 4$ и $MC = 2x = 8$.
Осталось найти отрезок FH, так как он является высотой к стороне MC в $\triangle FMC$.
Далее, $\angle HMF = \angle QMC$ как вертикальные. Тогда $\triangle HMF = \triangle QMC$ по острому углу и прилежащему катету. Отсюда $FM = MC = 8$.
По теореме Пифагора для $\triangle FHM$:

$$FH^2 = FM^2 - HM^2 = 64 - 16 = 48 \quad \Rightarrow \quad FH = 4\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна:

$$S_{FMC} = \frac{1}{2} \cdot FH \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 = 16\sqrt{3}$$

№17.5 #126140 (Сибирь, 27.05)

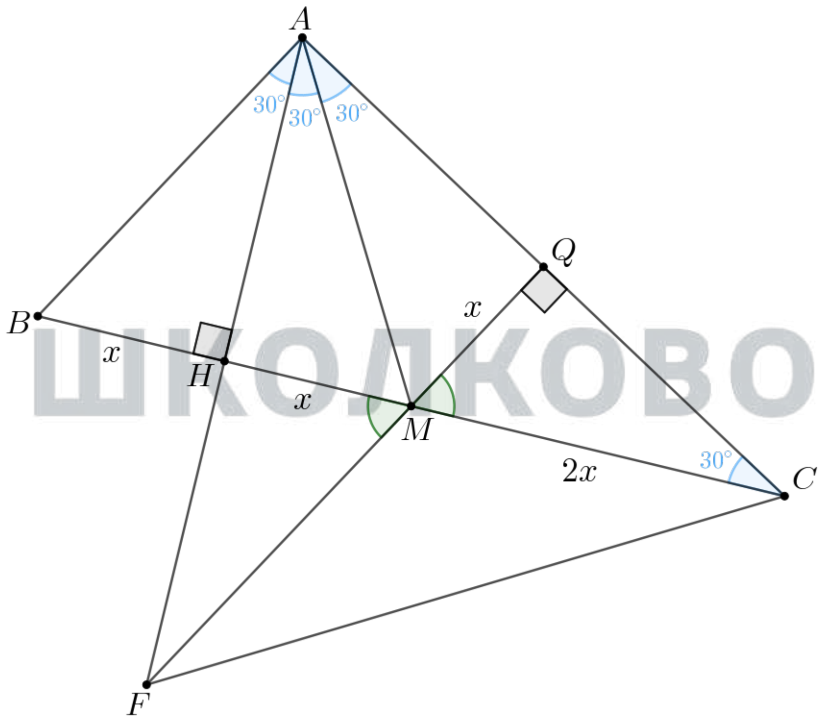
В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 12$.

Ответ: б) $36\sqrt{3}$

Решение. а) Пусть $MQ = x$. Тогда из прямоугольного $\triangle MQC$ с углом $30°$ получаем, что $MC = 2x$.
Рассмотрим прямоугольный $\triangle HAC$. Так как $\angle ACH = 30°$, то $\angle HAC = 60°$. В силу того, что AM — биссектриса, получаем $\angle HAM = \angle MAQ = 30°$.
Заметим, что $\triangle HAM = \triangle QAM$ по острому углу и гипотенузе. Тогда $HM = x$, следовательно, в силу $BM = MC$ получаем $BH = x$.
Таким образом, получили, что высота AH треугольника BAM является и медианой, а значит, также является биссектрисой. Следовательно, $\angle BAH = \angle HAM = 30°$.



Тогда имеем:

$$\angle BAC = \angle BAH + \angle HAM + \angle MAQ = 30° + 30° + 30° = 90°$$

Что и требовалось доказать.
б) В прямоугольном треугольнике ABC катет напротив угла $30°$ равен половине гипотенузы, тогда из $AB = 12$ следует, что $4x = BC = 24$. Отсюда $HM = MQ = BH = x = 6$ и $MC = 2x = 12$.
Осталось найти отрезок FH, так как он является высотой к стороне MC в $\triangle FMC$.
Далее, $\angle HMF = \angle QMC$ как вертикальные. Тогда $\triangle HMF = \triangle QMC$ по острому углу и прилежащему катету. Отсюда $FM = MC = 12$.
По теореме Пифагора для $\triangle FHM$:

$$FH^2 = FM^2 - HM^2 = 144 - 36 = 108 \quad \Rightarrow \quad FH = 6\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна:

$$S_{FMC} = \frac{1}{2} \cdot FH \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 = 36\sqrt{3}$$

№17.6 #126141 (Сибирь, 27.05)

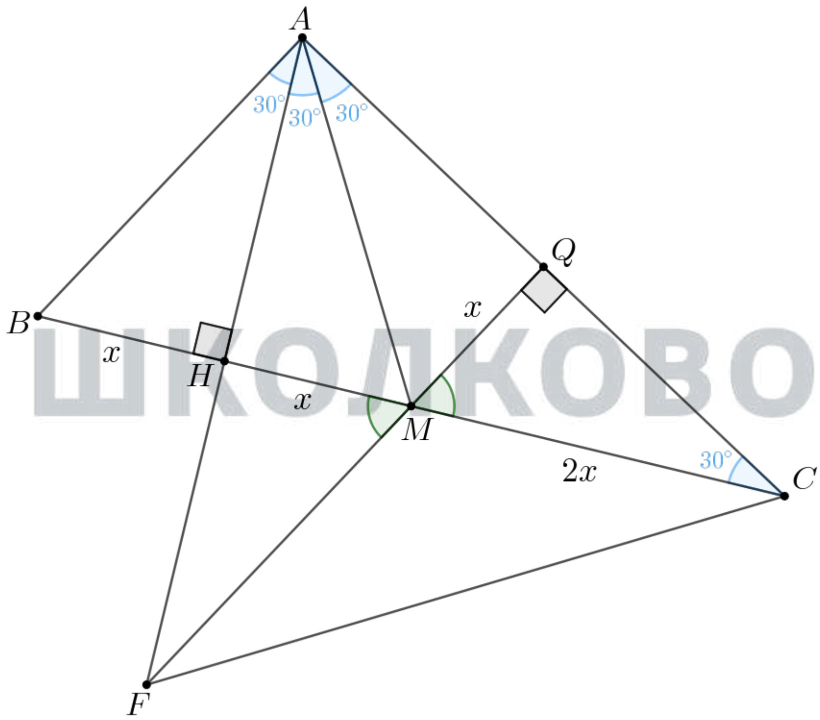
В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 6$.

Ответ: б) $9\sqrt{3}$

Решение. а) Пусть $MQ = x$. Тогда из прямоугольного $\triangle MQC$ с углом $30°$ получаем, что $MC = 2x$.
Рассмотрим $\triangle HAC$. Так как $\angle ACH = 30°$, то $\angle HAC = 60°$. В силу того, что AM — биссектриса, получаем $\angle HAM = \angle MAQ = 30°$.
Заметим, что $\triangle HAM = \triangle QAM$ по острому углу и гипотенузе. Тогда $HM = x$, следовательно, в силу $BM = MC$ получаем $BH = x$.
Таким образом, получили, что высота AH треугольника BAM является и медианой, а значит, также является биссектрисой. Следовательно, $\angle BAH = \angle HAM = 30°$.



Тогда имеем:

$$\angle BAC = \angle BAH + \angle HAM + \angle MAQ = 30° + 30° + 30° = 90°$$

Что и требовалось доказать.

б) В прямоугольном треугольнике ABC катет напротив угла $30°$ равен половине гипотенузы, тогда из $AB = 6$ следует, что $4x = BC = 12$. Отсюда $HM = MQ = BH = x = 3$ и $MC = 2x = 6$.
Осталось найти отрезок FH, так как он является высотой к стороне MC в $\triangle FMC$.
Далее, $\angle HMF = \angle QMC$ как вертикальные. Тогда $\triangle HMF = \triangle QMC$ по острому углу и прилежащему катету. Отсюда $FM = MC = 6$.
По теореме Пифагора для $\triangle FHM$:

$$FH^2 = FM^2 - HM^2 = 36 - 9 = 27 \quad \Rightarrow \quad FH = 3\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна:

$$S_{FMC} = \frac{1}{2} \cdot FH \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 = 9\sqrt{3}$$

№17.7 #125949 (Центр, 27.05)

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла, AM и CN — биссектрисы треугольников ACH и BCH соответственно,

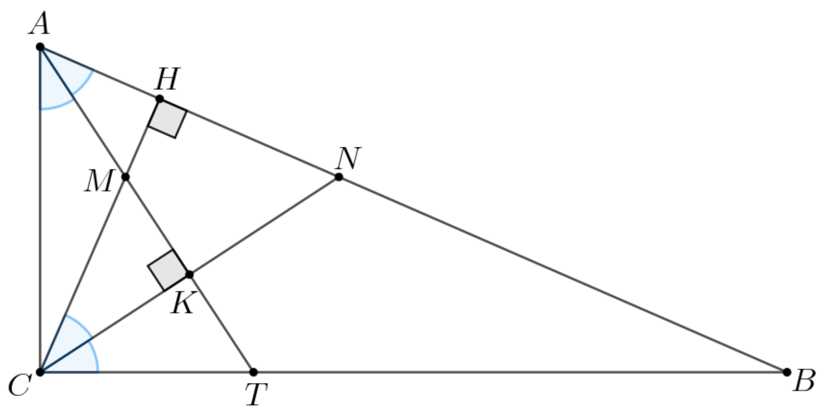
а) Докажите, что прямые AM и CN перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка MN, если $BC = 21$ и $\sin\angle ABC = \frac{2}{5}$.

Ответ: 6

Решение. а) Пусть AM и CN пересекаются в точке K.

Заметим, что $\angle CAH = \angle HCB$, а значит, и половины данных углов равны, то есть $\angle CAM = \angle MAH = \angle TCK = \angle KCM$.

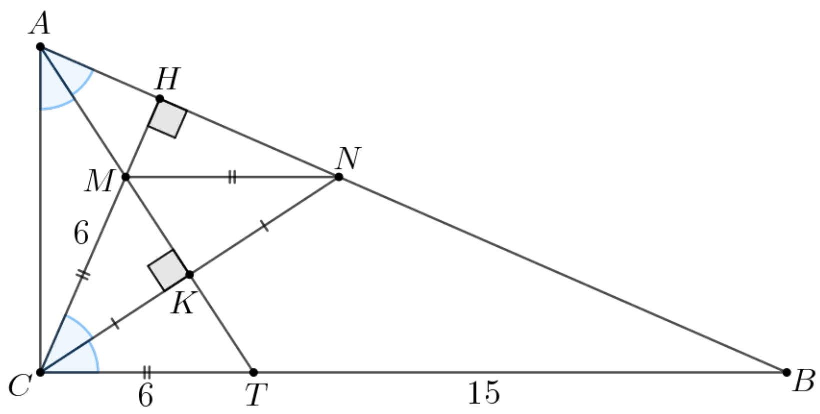


Тогда $\triangle AHM \sim \triangle CKM$ по двум углам ($\angle MAH = \angle KCM$, $\angle AMH = \angle CMK$ как вертикальные). А значит, $\angle CKM = \angle AHM = 90°$.

б) Заметим, что в $\triangle ACN$ AK является биссектрисой и высотой, а значит, $\triangle ACN$ — равнобедренный. Тогда $CK = KN$.

Получаем, что AK — серединный перпендикуляр к стороне CN, а значит, $CM = MN$.

Аналогично, замечаем, что CK — биссектриса и высота в $\triangle MCT$, следовательно, данный треугольник равнобедренный и $CM = CT$.



По свойству биссектрисы для $\triangle ABC$:

$$\frac{CT}{TB} = \frac{AC}{AB} = \sin\alpha = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad CT = 6,\ TB = 15$$

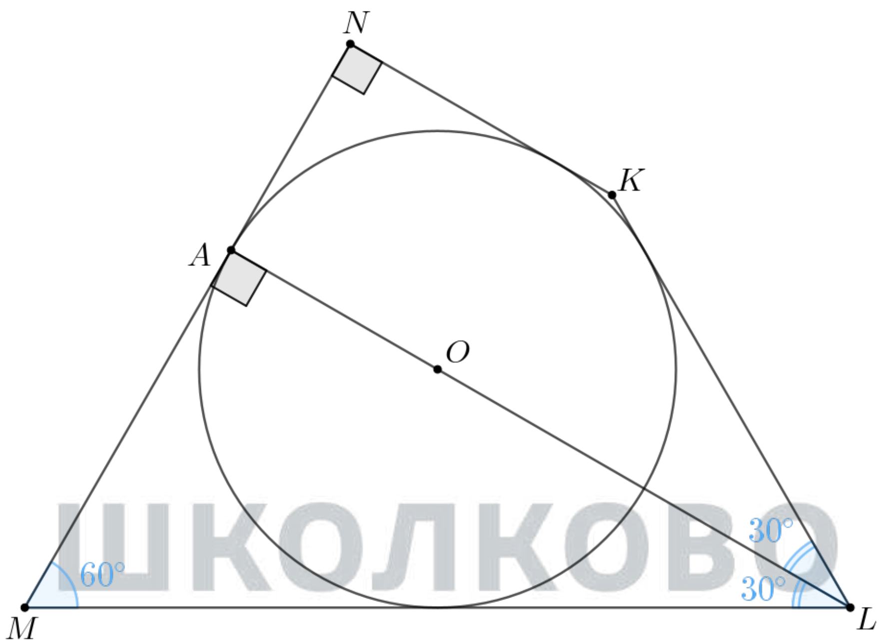
Таким образом, получаем, что $MN = CM = CT = 6$

№17.8 #125952 (Центр, 27.05)

В четырёхугольник $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 9$.

Ответ: б) $3 + 3\sqrt{3}$

Решение. а) Поскольку O — центр вписанной окружности, то он лежит на пересечении биссектрис углов четырехугольника. Значит, LO — биссектриса и $\angle OLM = \angle OLK = 30^\circ$.
Пусть OA — радиус в точку касания, тогда $OA \perp MN$.



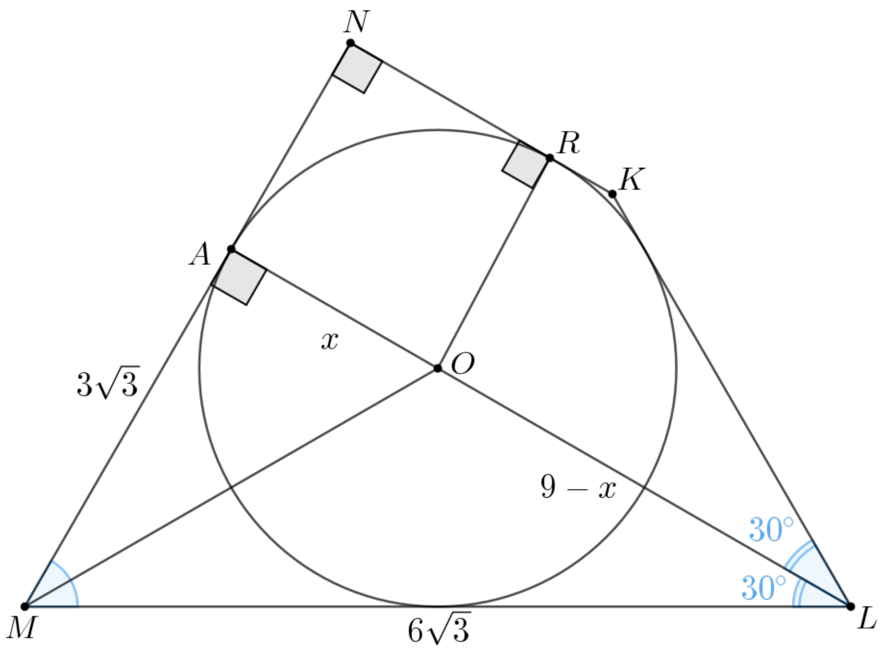
Предположим, что точка A не лежит на LO. Тогда $LMAO$ — четырехугольник и сумма его углов равна 360° :

$$\angle OLM + \angle LMA + \angle MAO + \angle AOL = 360^\circ$$
$$30^\circ + 60^\circ + 90^\circ + \angle AOL = 360^\circ$$
$$\angle AOL = 180^\circ$$

Таким образом, получили, что $\angle AOL$ — развернутый, а значит, точка A попадает на прямую LO.
б) Из прямоугольного $\triangle MAL$ имеем:

$$\frac{AL}{ML} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad ML = 9 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$
$$\frac{MA}{ML} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad MA = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}$$

Пусть $AO = x$, тогда $OL = 9 - x$. Пусть окружность касается стороны NK в точке R.
Заметим, что $ANRO$ — квадрат, поэтому $AN = AO = x$.



Поскольку MO — биссектриса, то по свойству биссектрисы получаем:

$$\frac{ML}{MA}=\frac{9-x}{x}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{9-x}{x}\quad\Rightarrow\quad 9-x=2x\quad\Rightarrow\quad x=3$$

Таким образом, имеем $MA=3\sqrt{3}$, $AN=3$. Тогда искомая длина равна

$$MN=MA+AN=3\sqrt{3}+3$$

№17.9 #126137 (Центр, 27.05)

В четырёхугольник $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.

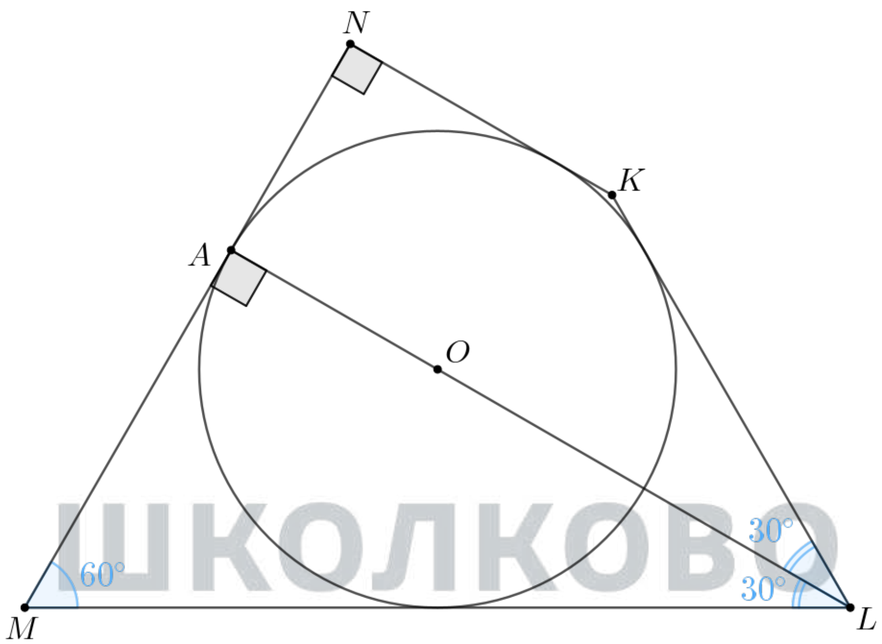
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.

б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 3\sqrt{3}$.

Ответ: б) $3+\sqrt{3}$

Решение. а) Поскольку O — центр вписанной окружности, то он лежит на пересечении биссектрис углов четырехугольника. Значит, LO — биссектриса и $\angle OLM = \angle OLK = 30^\circ$.

Пусть OA — радиус в точку касания, тогда $OA \perp MN$.



Предположим, что точка A не лежит на LO. Тогда $LMAO$ — четырехугольник и сумма его углов равна 360° :

$$\angle OLM + \angle LMA + \angle MAO + \angle AOL = 360^\circ$$
$$30^\circ + 60^\circ + 90^\circ + \angle AOL = 360^\circ$$
$$\angle AOL = 180^\circ$$

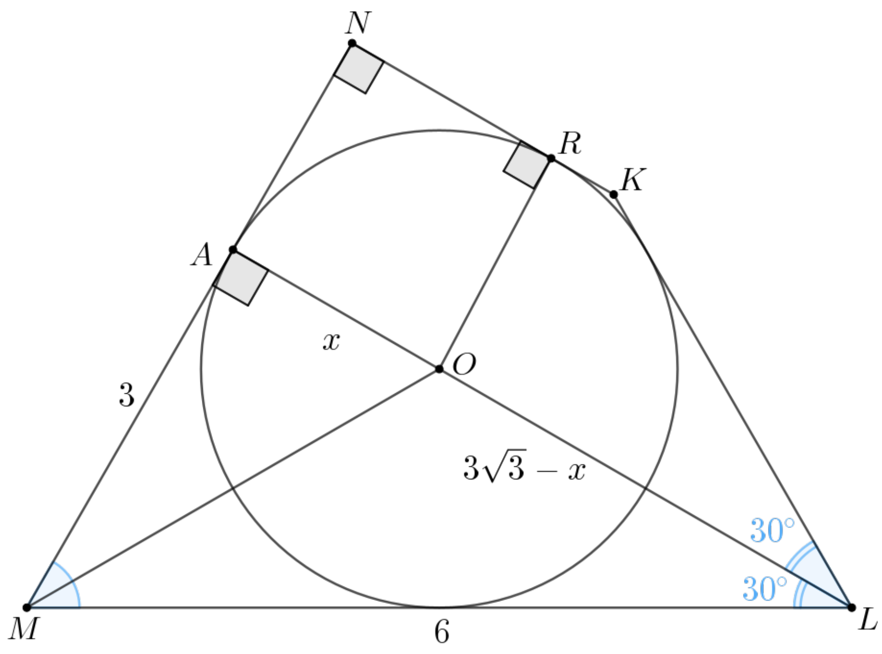
Таким образом, получили, что $\angle AOL$ — развернутый, а значит, точка A попадает на прямую LO.

б) Из прямоугольного $\triangle MAL$ имеем:

$$\frac{AL}{ML} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad ML = 3\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$
$$\frac{MA}{ML} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad MA = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Пусть $AO = x$, тогда $OL = 3\sqrt{3} - x$. Пусть окружность касается стороны NK в точке R.

Заметим, что $ANRO$ — квадрат, поэтому $AN = AO = x$.



Поскольку MO — биссектриса, то по свойству биссектрисы получаем:

$$\frac{ML}{MA} = \frac{3\sqrt{3}-x}{x}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{3\sqrt{3}-x}{x} \quad\Rightarrow\quad 3\sqrt{3}-x = 2x \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{3}$$

Таким образом, имеем $MA = 3$, $AN = \sqrt{3}$. Тогда искомая длина равна

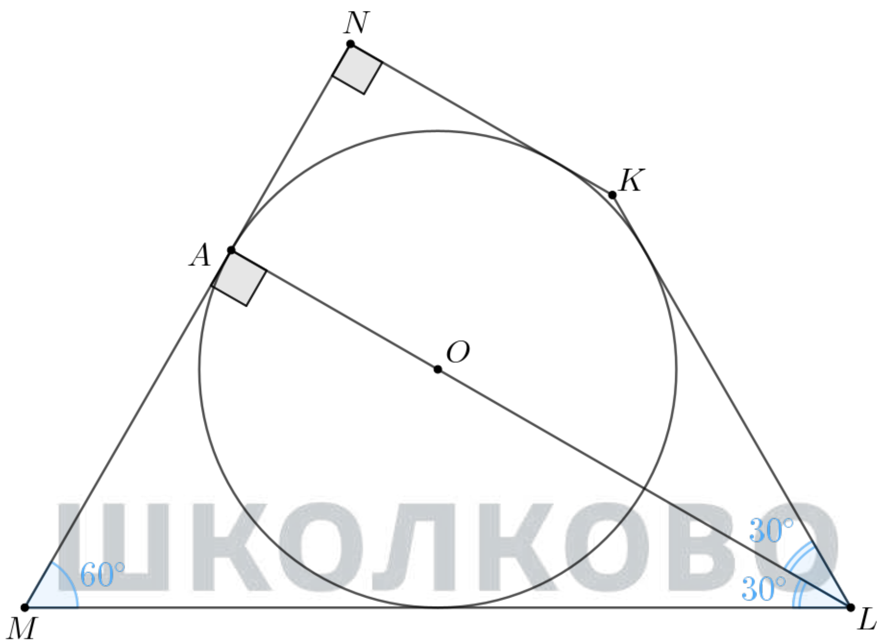
$$MN = MA + AN = 3 + \sqrt{3}$$

№17.10 #126138 (Центр, 27.05)

В четырёхугольник $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 3$.

Ответ: б) $\sqrt{3}+1$

Решение. а) Поскольку O — центр вписанной окружности, то он лежит на пересечении биссектрис углов четырехугольника. Значит, LO — биссектриса и $\angle OLM = \angle OLK = 30^\circ$.
Пусть OA — радиус в точку касания, тогда $OA \perp MN$.



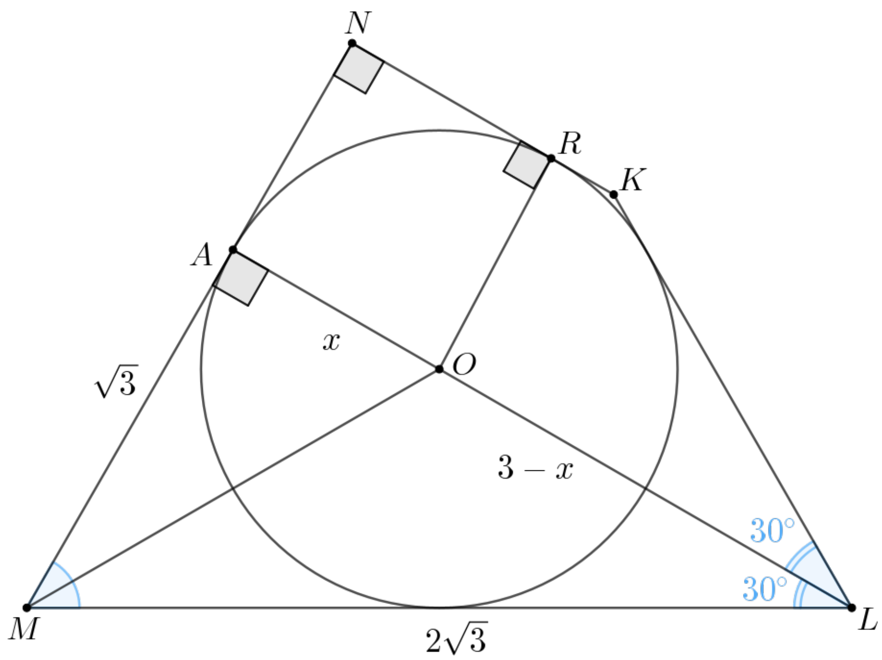
Предположим, что точка A не лежит на LO. Тогда $LMAO$ — четырехугольник и сумма его углов равна 360° :

$$\angle OLM + \angle LMA + \angle MAO + \angle AOL = 360^\circ$$
$$30^\circ + 60^\circ + 90^\circ + \angle AOL = 360^\circ$$
$$\angle AOL = 180^\circ$$

Таким образом, получили, что $\angle AOL$ — развернутый, а значит, точка A попадает на прямую LO.
б) Из прямоугольного $\triangle MAL$ имеем:

$$\frac{AL}{ML} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad ML = 3 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{MA}{ML} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad MA = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

Пусть $AO = x$, тогда $OL = 3 - x$. Пусть окружность касается стороны NK в точке R.
Заметим, что $ANRO$ — квадрат, поэтому $AN = AO = x$.



Поскольку MO — биссектриса, то по свойству биссектрисы получаем:

$$\frac{ML}{MA} = \frac{3-x}{x}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3-x}{x} \quad \Rightarrow \quad 3-x = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Таким образом, имеем $MA = \sqrt{3}$, $AN = 1$. Тогда искомая длина равна

$$MN = MA + AN = \sqrt{3} + 1$$

№17.11 #125955 (Центр, 27.05)

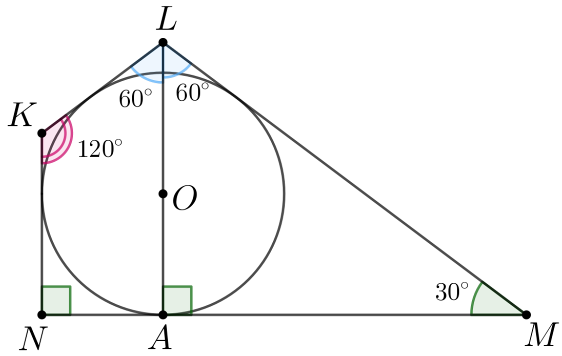
В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.

б) Найдите длину стороны MN, если $LA = \sqrt{3}$.

Ответ: б) $9 - 3\sqrt{3}$

Решение. а) Так как окружность вписана в четырёхугольник, то её центр лежит на пересечении его биссектрис. Значит, LO — биссектриса угла $\angle MLK$ и $\angle MLO = \angle KLO = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.



Так как сумма углов четырёхугольника $LMNK$ равна 360°, то

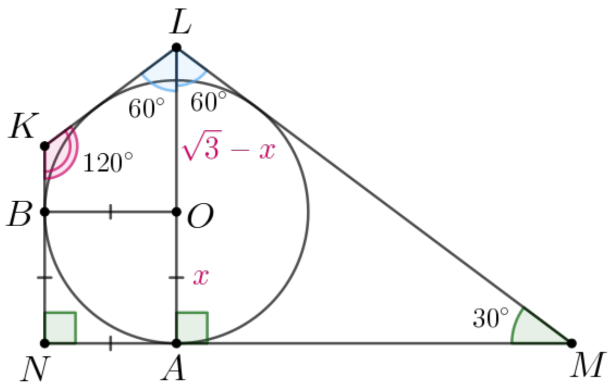
$$\angle LMN = 360^\circ - \angle MNK - \angle NKL - \angle KLM =$$
$$= 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$

Пусть OA — радиус в точку касания, тогда $\angle OAM = 90^\circ$. Пусть точка O не лежит на прямой AL. Тогда $OAML$ — четырёхугольник и сумма его углов равна 360° :

$$\angle LMA + \angle MAO + \angle AOL + \angle OLM = 360^\circ$$
$$30^\circ + 90^\circ + \angle AOL + 60^\circ = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle AOL = 180^\circ$$

Тогда так как угол $\angle AOL = 180^\circ$, то точки A, O, L лежат на одной прямой.

б)



Так как прямоугольном треугольнике катет против угла 30° равен половине гипотенузы, то в треугольнике LAM имеем $LM = 2 \cdot LA = 2\sqrt{3}$.

По теореме Пифагора для треугольника LAM :

$$MA^2 + LA^2 = LM^2$$
$$MA^2 + 3 = 12 \quad \Rightarrow \quad MA = 3$$

Обозначим OA как x. Тогда $LO = LA - x = \sqrt{3} - x$.
Так как окружность вписана в четырёхугольник, то центр окружности лежит на пересечении биссектрис и MO — биссектриса угла $\angle AML$. Воспользуемся свойством биссектрисы для треугольника AML и биссектрисы MO :

$$\frac{ML}{LO} = \frac{MA}{OA} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - x} = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{3}$$

Пусть окружность касается стороны KN в точке B. Тогда $OANB$ — квадрат и

$$AN = OA = 6 - 3\sqrt{3}$$

Тогда искомая длина равна

$$MN = MA + AN = 3 + 6 - 3\sqrt{3} = 9 - 3\sqrt{3}.$$

ШКОЛКОВО

№17.12 #126144 (Центр, 27.05)

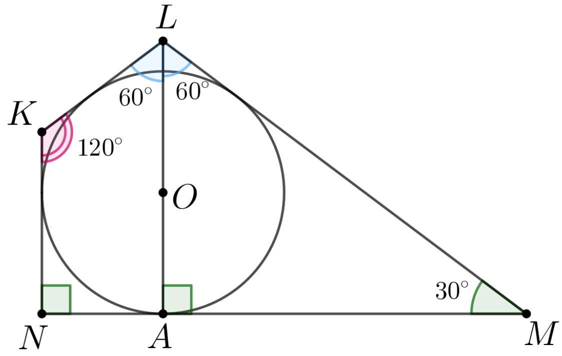
В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.

б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 3$.

Ответ: б) $9\sqrt{3} - 9$

Решение. а) Так как окружность вписана в четырёхугольник, то её центр лежит на пересечении его биссектрис. Значит, LO — биссектриса угла $\angle MLK$ и $\angle MLO = \angle KLO = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.



Так как сумма углов четырёхугольника $LMNK$ равна 360°, то

$$\angle LMN = 360^\circ - \angle MNK - \angle NKL - \angle KLM =$$
$$= 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$

ШКОЛКОВО

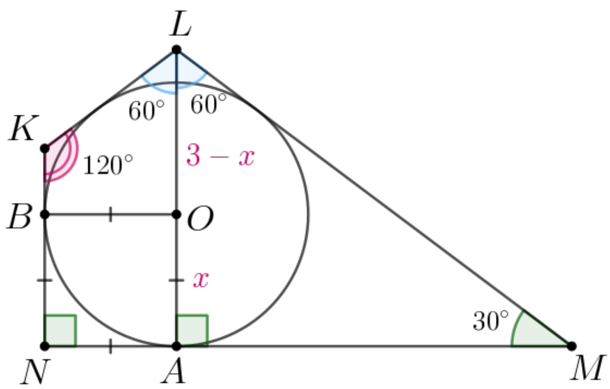
Пусть OA — радиус в точку касания, тогда $\angle OAM = 90^\circ$. Пусть точка O не лежит на прямой AL. Тогда $OAML$ — четырёхугольник и сумма его углов равна 360° :

$$\angle LMA + \angle MAO + \angle AOL + \angle OLM = 360^\circ$$

$$30^\circ + 90^\circ + \angle AOL + 60^\circ = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle AOL = 180^\circ$$

Тогда так как угол $\angle AOL = 180^\circ$, то точки A, O, L лежат на одной прямой.

б)



Так как в прямоугольном треугольнике катет напротив угла 30° равен половине гипотенузы, то в треугольнике LAM имеем $LM = 2 \cdot LA = 6$.

По теореме Пифагора для треугольника LAM :

$$MA^2 + LA^2 = LM^2$$

$$MA^2 + 3^2 = 6^2 \quad \Rightarrow \quad MA = 3\sqrt{3}$$

Обозначим OA как x. Тогда

$$LO = LA - x = 3 - x$$

Так как окружность вписана в четырёхугольник, то центр окружности лежит на пересечении биссектрис и MO — биссектриса угла $\angle AML$. Воспользуемся свойством биссектрисы для треугольника AML и биссектрисы MO :

$$\frac{ML}{LO} = \frac{MA}{OA} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{3-x} = \frac{3\sqrt{3}}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Пусть окружность касается стороны KN в точке B. Тогда $OANB$ — квадрат и

$$AN = OA = \frac{3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Тогда искомая длина равна

$$MN = MA + AN = 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$$

$$= 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3} = 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 9 = 9\sqrt{3} - 9.$$

ШКОЛКОВО

№17.13 #125957 (Запад, 27.05)

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.

а) Докажите, что $BM = PQ$.

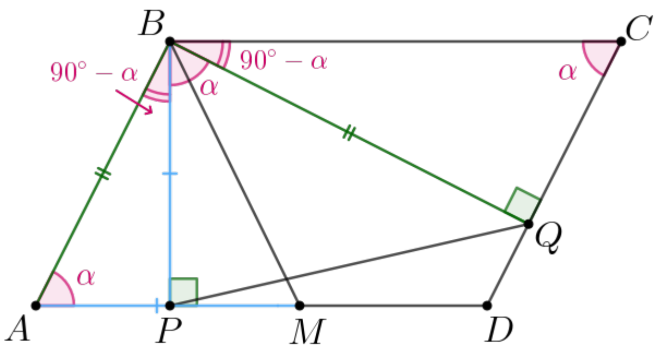
б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 12$, $AB = BQ = 15$.

Ответ: б) 13,5

Решение. а) Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$, по свойству параллелограмма $\angle A = \angle C$, откуда также $\angle QBC = 90^\circ - \alpha$. Так как $\angle A$ и $\angle ABC$ — односторонние, то $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

Тогда имеем:

$$\angle PBQ = \angle ABC - \angle ABP - \angle QBC = 180^\circ - \alpha - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$



Тогда треугольники BAM и QBP равны по двум сторонам $AB = BQ$ и $AM = BP$ и углу между ними: $\angle BAM = \angle PBQ = \alpha$. Отсюда получаем $BM = PQ$. Что и требовалось доказать.

б) По теореме Пифагора в треугольнике ABP :

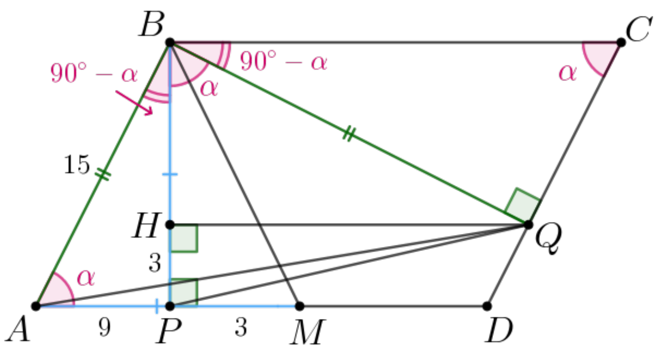
$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

Отсюда имеем:

$$PM = AM - AP = 12 - 9 = 3.$$

Проведём в треугольнике PBQ высоту QH. Так как треугольники BAM и QBP равны, то их соответственные высоты BP и QH равны, а также соответственные отрезки MP и PH равны.

Далее, так как $QH \perp HP$ и $HP \perp AM$, то $QH \parallel AM$. Тогда длина высоты из точки Q к стороне AP треугольника APQ равна длине перпендикуляра $HP = PM = 3$.



Тогда площадь треугольника APQ равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot HP = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 13{,}5.$$

№17.14 #126142 (Запад, 27.05)

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.

а) Докажите, что $BM = PQ$.

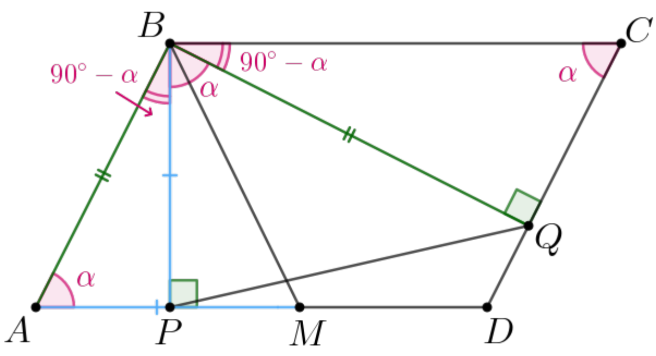
б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 8$, $AB = BQ = 10$.

Ответ: б) 6

Решение. а) Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$, по свойству параллелограмма $\angle A = \angle C$, откуда также $\angle QBC = 90^\circ - \alpha$. Так как $\angle A$ и $\angle ABC$ — односторонние, то $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

Тогда имеем:

$$\angle PBQ = \angle ABC - \angle ABP - \angle QBC = 180^\circ - \alpha - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$



Тогда треугольники BAM и QBP равны по двум сторонам $AB = BQ$ и $AM = BP$ и углу между ними: $\angle BAM = \angle PBQ = \alpha$. Отсюда получаем $BM = PQ$. Что и требовалось доказать.

б) По теореме Пифагора в треугольнике ABP :

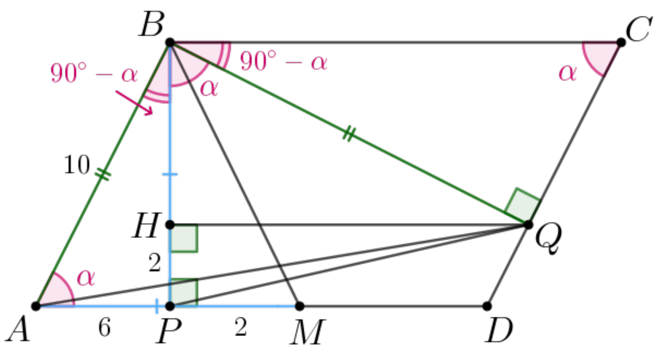
$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Отсюда имеем:

$$PM = AM - AP = 8 - 6 = 2.$$

Проведём в треугольнике PBQ высоту QH. Так как треугольники BAM и QBP равны, то их соответственные высоты BP и QH равны, а также соответственные отрезки MP и PH равны.

Далее, так как $QH \perp HP$ и $HP \perp AM$, то $QH \parallel AM$. Тогда длина высоты из точки Q к стороне AP треугольника APQ равна длине перпендикуляра $HP = PM = 2$.



Тогда площадь треугольника APQ равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot HP = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6.$$

№17.15 **#126143** (Запад, 27.05)

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.

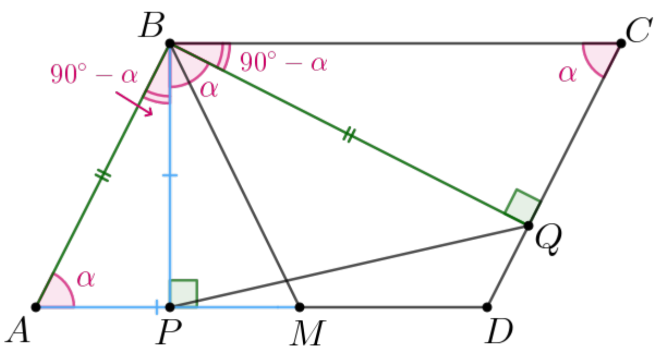
а) Докажите, что $BM = PQ$.

б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 21$, $AB = BQ = 29$.

Ответ: б) 10

Решение. а) Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$, по свойству параллелограмма $\angle A = \angle C$, откуда также $\angle QBC = 90^\circ - \alpha$. Так как $\angle A$ и $\angle ABC$ — односторонние, то $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$.
Тогда имеем:

$$\angle PBQ = \angle ABC - \angle ABP - \angle QBC = 180^\circ - \alpha - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$



Тогда треугольники BAM и QBP равны по двум сторонам $AB = BQ$ и $AM = BP$ и углу между ними: $\angle BAM = \angle PBQ = \alpha$. Отсюда получаем $BM = PQ$. Что и требовалось доказать.

б) По теореме Пифагора в треугольнике ABP :

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20.$$

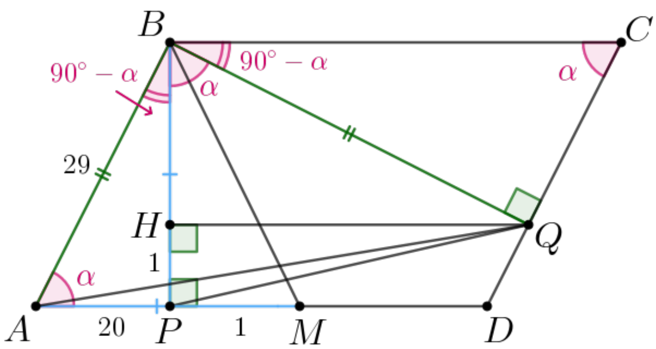
ШКОЛКОВО

Отсюда имеем:

$$PM = AM - AP = 21 - 20 = 1.$$

Проведём в треугольнике PBQ высоту QH. Так как треугольники BAM и QBP равны, то их соответственные высоты BP и QH равны, а также соответственные отрезки MP и PH равны.

Далее, так как $QH \perp HP$ и $HP \perp AM$, то $QH \parallel AM$. Тогда длина высоты из точки Q к стороне AP треугольника APQ равна длине перпендикуляра $HP = PM = 1$.



Тогда площадь треугольника APQ равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot HP = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1 = 10.$$

№17.16 #125958 (Запад, 27.05)

Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M. Диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABM, касается прямых BC и OM.

а) Докажите, что $AB \perp BD$.

б) Отрезки AC и BM пересекаются в точке K. Найдите площадь четырехугольника $KODM$, если $OM = 2$.

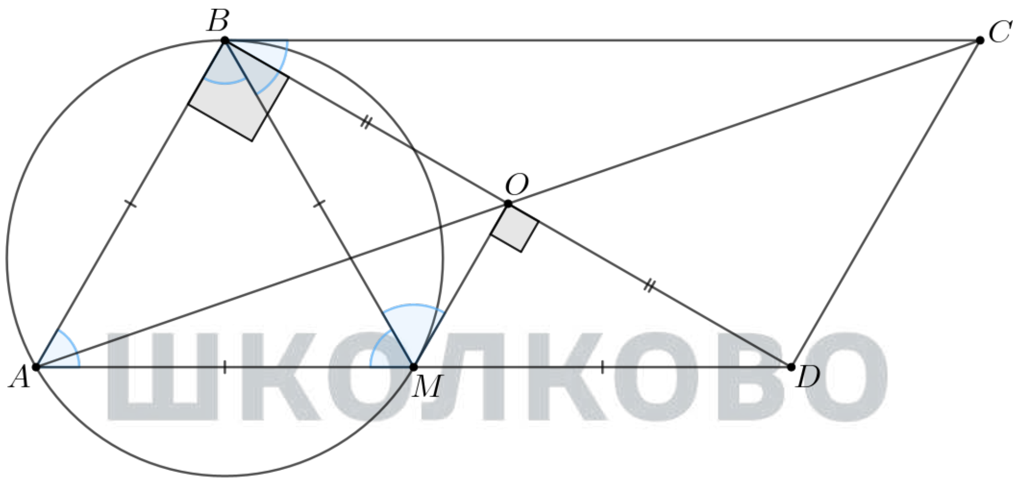
Ответ: б) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

Решение. а) Заметим, что $\angle BAM = \angle MBC$, так как оба равны половине дуги BM. Тогда в силу того, что BM — биссектриса $\angle ABC$, получаем $\angle BAM = \angle ABM$.

Более того, заметим, что $\angle BMA = \angle CBM$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$, а значит, $\triangle ABM$ — равносторонний.

Кроме того, $\angle BAM = \angle BMO$, так как оба равны половине дуги BM.

Таким образом, получаем $AB \parallel MO$, так как $\angle ABM = \angle BMO$ и являются накрест лежащими при прямых AB и MO и секущей BM.



Тогда так как O — середина BD, то MO является средней линией в $\triangle ABD$, а значит, $MD = AM = BM$. Следовательно, $\triangle BMD$ — равнобедренный и медиана MO к основанию является биссектрисой и высотой. В частности получаем $MO \perp BD$.

По итогу получаем, что $AB \perp BD$ в силу параллельности AB и MO. Что и требовалось доказать.

б) Заметим, что

$$S_{KODM} = S_{\triangle MOD} + S_{\triangle MOK}$$

Так как $\triangle MOD$ — прямоугольный и $\angle OMD = 60^\circ$, то $\angle ODM = 30^\circ$. Следовательно, $MD = 4$, так как катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.

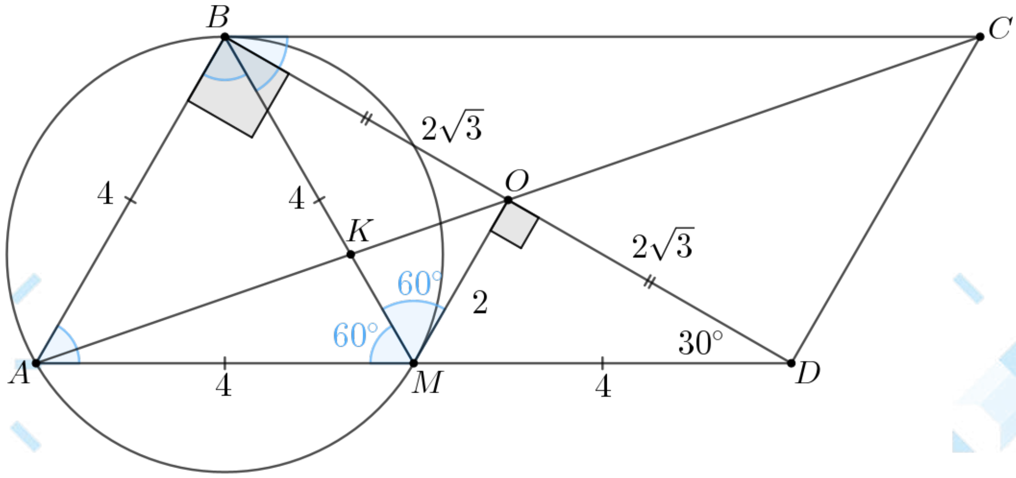
По теореме Пифагора для $\triangle MOD$:

$$OD^2 = MD^2 - OM^2$$

$$OD^2 = 16 - 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad OD = 2\sqrt{3}$$

Тогда имеем:

$$S_{\triangle MOD} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$



Заметим, что $S_{\triangle MBO} = S_{\triangle MOD} = 2\sqrt{3}$. Найдем, в каком отношении точка K делит отрезок BM, и тогда сможем найти недостающую площадь $\triangle MOK$.
По теореме Менелая для $\triangle BDM$ и прямой AC :

$$\frac{BO}{OD} \cdot \frac{DA}{AM} \cdot \frac{MK}{KB} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{MK}{KB} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{MK}{KB} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, получаем

$$S_{\triangle MOK} = \frac{S_{\triangle MBO}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

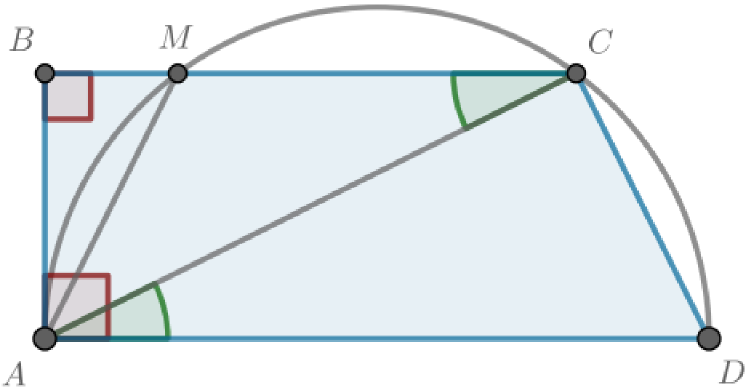
Тогда искомая площадь равна

$$S_{KODM} = S_{\triangle MOD} + S_{\triangle MOK} = 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

№17.17 #11446 (Центр, 26.05)
В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.
а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

Ответ: б) 20

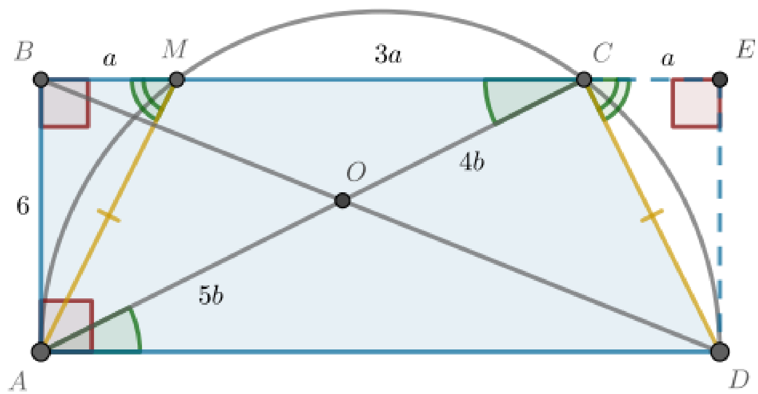
Решение. а) По условию $ABCD$ — трапеция, отсюда $BC \parallel AD$ и $\angle DAC = \angle MCA$ как накрест лежащие. Докажем равенство углов BCA и MAB. Заметим, что отрезок BA проходит через конец диаметра и перпендикулярен ему, следовательно, BA — касательная к окружности.



Угол MAB является углом между касательной BA и хордой MA, а угол MCA — вписанный, опирающийся на эту же хорду. Известно, что такие углы равны. Тогда имеем:

$$\angle DAC = \angle MCA = \angle MAB$$

Что и требовалось доказать.
б) Углы MCA и DAC — равные вписанные углы, следовательно, они опираются на равные дуги окружности и стягивающие их хорды AM и CD тоже равны. Пусть $BM = a$, тогда из условия $MC = 3a$.
Продлим отрезок BC на длину a за точку C до точки E. Так как трапеция равнобокая, то $\angle BMA = \angle ECD$ и $\triangle MBA = \triangle CED$ по углу и прилежащим к нему сторонам. Тогда угол CED — прямой и $ABED$ — прямоугольник. Далее, треугольники $\triangle ABM \sim \triangle CBA$, так как угол B общий и $\angle MAB = \angle ACB$ по пункту а).



Записав отношение подобия, получаем

$$\frac{a}{6} = \frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{4a} \quad \Rightarrow \quad 4a^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Из подобия треугольников AOD и COB имеем:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{5}{4}$$

Тогда площадь треугольника AOB равна

$$S_{AOB} = S_{ACB} \cdot \frac{AO}{AC} = \frac{AB \cdot BC}{2} \cdot \frac{AO}{AC} = \frac{6 \cdot 12}{2} \cdot \frac{5}{9} = 20$$

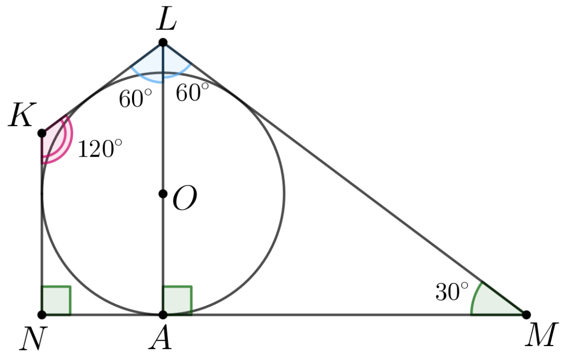
ШКОЛКОВО

№17.18 **#127068** (Центр, 27.05)

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 1$.

Ответ: б) $3\sqrt{3} - 3$

Решение. а) Так как окружность вписана в четырёхугольник, то её центр лежит на пересечении его биссектрис. Значит, LO — биссектриса угла $\angle MLK$ и $\angle MLO = \angle KLO = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.



Так как сумма углов четырёхугольника $LMNK$ равна 360°, то

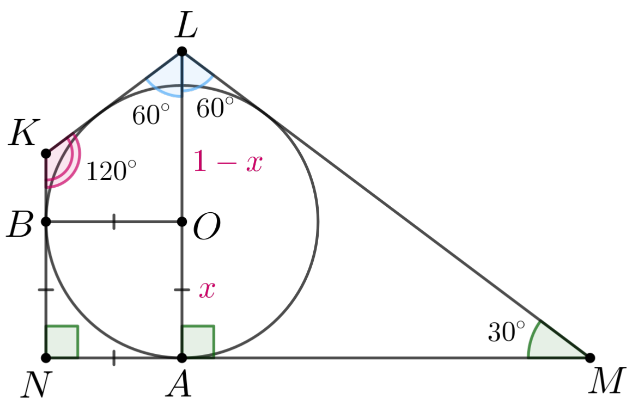
$$\angle LMN = 360^\circ - \angle MNK - \angle NKL - \angle KLM =$$
$$= 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$

Пусть OA — радиус в точку касания, тогда $\angle OAM = 90^\circ$. Пусть точка O не лежит на прямой AL. Тогда $OAML$ — четырёхугольник и сумма его углов равна 360° :

$$\angle LMA + \angle MAO + \angle AOL + \angle OLM = 360^\circ$$
$$30^\circ + 90^\circ + \angle AOL + 60^\circ = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle AOL = 180^\circ$$

Тогда так как угол $\angle AOL = 180^\circ$, то точки A, O, L лежат на одной прямой.
б) Так как в прямоугольном треугольнике катет напротив угла 30° равен половине гипотенузы, то в треугольнике LAM имеем $LM = 2 \cdot LA = 2$.
По теореме Пифагора для треугольника LAM :

$$MA^2 + LA^2 = LM^2$$
$$MA^2 + 1^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad MA = \sqrt{3}$$



Обозначим OA как x. Тогда

$$LO = LA - x = 1 - x$$

Так как окружность вписана в четырёхугольник, то центр окружности лежит на пересечении биссектрис и MO — биссектриса угла $\angle AML$. Воспользуемся свойством биссектрисы для треугольника AML и биссектрисы MO :

$$\frac{ML}{LO} = \frac{MA}{OA} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1-x} = \frac{\sqrt{3}}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Пусть окружность касается стороны KN в точке B. Тогда $OANB$ — квадрат и

$$AN = OA = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Тогда искомая длина равна

$$MN = MA + AN = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})}{4-3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} - 3.$$

ШКОЛКОВО

Задачи №18. Решения

№18.1 #125921 (Дальний Восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x-\frac{9}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{9}{x}\right)-49a+18=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left\{\frac{9\pm4\sqrt{2}}{49};0\right\}$

Решение. Сделаем замену $y=x-\frac{9}{x}$. Получим уравнение

$$ay^2-2y-49a+18=0.$$

Проанализируем замену:

$$y=x-\frac{9}{x}$$

$$yx=x^2-9$$

$$x^2-yx-9=0$$

$$D=y^2+36>0$$

Тогда дискриминант всегда положительный, то есть при любом значении y мы найдем два различных корня исходного уравнения, отличных от 0, так как $0^2-y\cdot0-9\neq0$.
Отсюда от уравнения $ay^2-2y-49a+18=0$, полученного после замены, мы требуем ровно один корень.
Это уравнение либо квадратное, если $a\neq0$, либо линейное, если $a=0$.
Рассмотрим отдельно случай $a=0$:

$$-2y+18=0$$

$$y=9$$

Значит, при $a=0$ уравнение $ay^2-2y-49a+18=0$, полученное после замены, имеет один корень. Значит, $a=0$ нам подходит.
При $a\neq0$ рассмотрим дискриминант квадратного относительно y уравнения $ay^2-2y-49a+18=0$. Чтобы это уравнение имело ровно один корень, его дискриминант должен равняться нулю:

$$D=0$$

$$4-4a\cdot(-49a+18)=0$$

$$1-a\cdot(-49a+18)=0$$

$$1+49a^2-18a=0$$

$$49a^2-18a+1=0$$

Найдем дискриминант полученного уравнения:

$$D_a=18^2-4\cdot49\cdot1=324-196=128$$

Отсюда получаем:

$$a_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{128}}{2\cdot49}=\frac{9\pm4\sqrt{2}}{49}.$$

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных корня при

$$a\in\left\{\frac{9\pm4\sqrt{2}}{49};0\right\}.$$

№18.2 #125898 (Дальний Восток, 27.05)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-9a+15=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left\{0;\frac{5}{6}\right\}\cup(1;5)$

Решение. Сделаем замену $y=x+\dfrac{1}{x}$. Получим уравнение

$$ay^2+5y-9a+15=0.$$

Проанализируем замену:

$$y=x+\frac{1}{x}$$
$$yx=x^2+1$$
$$x^2-yx+1=0$$
$$D=y^2-4$$

Таким образом, при $y=\pm2$ будет ровно одно решение по x, а при $|y|>2$ будет два решения по x. При этом решения будут отличны от 0, так как $0^2-y\cdot0+1\neq0$.
Проанализируем уравнение, получившееся после замены.
Рассмотрим отдельно случай $a=0:$

$$5y+15=0$$
$$y=-3$$

Так как $|-3|>2$, то при $a=0$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=0$ нам подходит.
При $a\neq0$ рассмотрим дискриминант квадратного относительно y уравнения $ay^2+5y-9a+15=0$.

$$\begin{aligned}D&=25-4\cdot a\cdot(-9a+15)=\\&=25+36a^2-60a=\\&=(6a)^2-2\cdot6a\cdot5+5^2=\\&=(6a-5)^2.\end{aligned}$$

- Если $D=0$, то есть $a=\dfrac{5}{6}$, то

$$y=-\frac{5}{2a}=-\frac{5}{2\cdot\frac{5}{6}}=-3.$$

Так как $|-3|>2$, то при $a=\dfrac{5}{6}$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=\dfrac{5}{6}$ нам подходит.

- Если $D>0$, то уравнение будет иметь два корня:

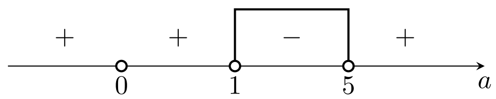
$$y_1=\frac{-5+6a-5}{2a}=\frac{3a-5}{a};$$
$$y_2=\frac{-5-6a+5}{2a}=-3.$$

Таким образом, корень $y_2=-3$ обеспечит два решения по x для уравнения $y=x+\dfrac{1}{x}$. Значит, чтобы исходное

уравнение имело ровно два решения, корень y_1 по модулю должен быть меньше 2. Следовательно,

$$|y_1| < 2$$
$$\left|\frac{3a-5}{a}\right| < 2$$
$$\left(\frac{3a-5}{a}\right)^2 < 2^2$$
$$\left(\frac{3a-5}{a}\right)^2 - 2^2 < 0$$
$$\left(\frac{3a-5}{a} - 2\right)\left(\frac{3a-5}{a} + 2\right) < 0$$
$$\frac{3a-5-2a}{a} \cdot \frac{3a-5+2a}{a} < 0$$
$$\frac{a-5}{a} \cdot \frac{5a-5}{a} < 0$$
$$\frac{(a-5)(a-1)}{a^2} < 0$$

По методу интервалов:



Таким образом,

ШКОЛКОВО

$$a \in (1; 5).$$

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left\{0; \frac{5}{6}\right\} \cup (1; 5).$$

№18.3 #125900 (Дальний восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-25a+10=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left\{0;\frac{1}{5}\right\}\cup\left(\frac{2}{9};2\right)$

Решение. Сделаем замену $y=x+\frac{4}{x}$. Получим уравнение

$$ay^2+2y-25a+10=0.$$

Проанализируем замену:

$$y=x+\frac{4}{x}$$
$$yx=x^2+4$$
$$x^2-yx+4=0$$
$$D=y^2-16$$

Таким образом, при $y=\pm4$ будет ровно одно решение по x, а при $|y|>4$ будет два решения по x. При этом решения будут отличны от 0, так как $0^2-y\cdot0+4\neq0$.

Проанализируем уравнение, получившееся после замены.

Рассмотрим отдельно случай $a=0:$

$$2y+10=0$$
$$y=-5$$

Так как $|-5|>4$, то при $a=0$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=0$ нам подходит.

При $a\neq0$ рассмотрим дискриминант квадратного относительно y уравнения $ay^2+2y-25a+10=0$.

$$\begin{aligned}D&=4-4\cdot a\cdot(-25a+10)=\\&=4+100a^2-40a=\\&=(10a)^2-2\cdot10a\cdot2+2^2=\\&=(10a-2)^2.\end{aligned}$$

- Если $D=0$, то есть $a=\frac{1}{5}$, то

$$y=-\frac{2}{2a}=-\frac{1}{a}=-5.$$

  Так как $|-5|>4$, то при $a=\frac{1}{5}$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=\frac{1}{5}$ нам подходит.

- Если $D>0$, то уравнение будет иметь два корня:

$$y_1=\frac{-2+10a-2}{2a}=\frac{5a-2}{a};$$
$$y_2=\frac{-2-10a+2}{2a}=-5.$$

  Таким образом, корень $y_2=-5$ обеспечит два решения по x для уравнения $y=x+\frac{4}{x}$. Значит, чтобы исходное

уравнение имело ровно два решения, корень y_1 по модулю должен быть меньше 4. Следовательно,

$$|y_1| < 4$$

$$\left|\frac{5a-2}{a}\right| < 4$$

$$\left(\frac{5a-2}{a}\right)^2 < 4^2$$

$$\left(\frac{5a-2}{a}\right)^2 - 4^2 < 0$$

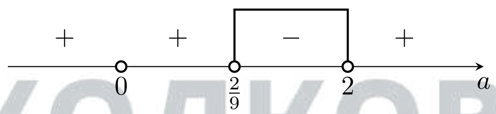
$$\left(\frac{5a-2}{a} - 4\right)\left(\frac{5a-2}{a} + 4\right) < 0$$

$$\frac{5a-2-4a}{a} \cdot \frac{5a-2+4a}{a} < 0$$

$$\frac{a-2}{a} \cdot \frac{9a-2}{a} < 0$$

$$\frac{(a-2)\left(a-\frac{2}{9}\right)}{a^2} < 0$$

По методу интервалов:



Таким образом,

$$a \in \left(\frac{2}{9}; 2\right).$$

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left\{0; \frac{1}{5}\right\} \cup \left(\frac{2}{9}; 2\right).$$

№18.4 #125903 (Дальний восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left\{0;\frac{1}{7}\right\}\cup\left(\frac{2}{11};\frac{2}{3}\right)$

Решение. Сделаем замену $y=x+\frac{4}{x}$. Получим уравнение

$$ay^2+2y-49a+14=0.$$

Проанализируем замену:

$$y=x+\frac{4}{x}$$
$$yx=x^2+4$$
$$x^2-yx+4=0$$
$$D=y^2-16$$

Таким образом, при $y=\pm4$ будет ровно одно решение по x, а при $|y|>4$ будет два решения по x. При этом решения будут отличны от 0, так как $0^2-y\cdot0+4\neq0$.

Проанализируем уравнение, получившееся после замены.

Рассмотрим отдельно случай $a=0:$

$$2y+14=0$$
$$y=-7$$

Так как $|-7|>4$, то при $a=0$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=0$ нам подходит.

При $a\neq0$ рассмотрим дискриминант квадратного относительно y уравнения $ay^2+2y-49a+14=0$.

$$\begin{aligned}D&=4-4\cdot a\cdot(-49a+14)=\\&=4+4\cdot49a^2-56a=\\&=(14a)^2-2\cdot14a\cdot2+2^2=\\&=(14a-2)^2.\end{aligned}$$

- Если $D=0$, то есть $a=\frac{1}{7}$, то

$$y=-\frac{2}{2a}=-\frac{1}{a}=-7.$$

  Так как $|-7|>4$, то при $a=\frac{1}{7}$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=\frac{1}{7}$ нам подходит.

- Если $D>0$, то уравнение будет иметь два корня:

$$y_1=\frac{-2+14a-2}{2a}=\frac{7a-2}{a};$$
$$y_2=\frac{-2-14a+2}{2a}=-7.$$

  Таким образом, корень $y_2=-7$ обеспечит два решения по x для уравнения $y=x+\frac{4}{x}$. Значит, чтобы исходное

уравнение имело ровно два решения, корень y_1 по модулю должен быть меньше 4. Следовательно,

$$|y_1| < 4$$

$$\left|\frac{7a-2}{a}\right| < 4$$

$$\left(\frac{7a-2}{a}\right)^2 < 4^2$$

$$\left(\frac{7a-2}{a}\right)^2 - 4^2 < 0$$

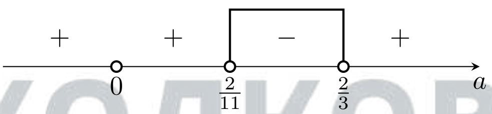
$$\left(\frac{7a-2}{a} - 4\right)\left(\frac{7a-2}{a} + 4\right) < 0$$

$$\frac{7a-2-4a}{a} \cdot \frac{7a-2+4a}{a} < 0$$

$$\frac{3a-2}{a} \cdot \frac{11a-2}{a} < 0$$

$$\frac{\left(a-\frac{2}{3}\right)\left(a-\frac{2}{11}\right)}{a^2} < 0$$

По методу интервалов:



ШКОЛКОВО

Таким образом,

$$a \in \left(\frac{2}{11}; \frac{2}{3}\right).$$

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left\{0; \frac{1}{7}\right\} \cup \left(\frac{2}{11}; \frac{2}{3}\right).$$

№18.5 #125970 (Дальний восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{9}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{9}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left\{0;\frac{1}{7}\right\}\cup\left(\frac{2}{13};2\right)$

Решение. Сделаем замену $y=x+\frac{9}{x}$. Получим уравнение

$$ay^2-2y-49a+14=0.$$

Проанализируем замену:

$$y=x+\frac{9}{x}$$
$$yx=x^2+9$$
$$x^2-yx+9=0$$
$$D=y^2-36$$

Таким образом, при $y=\pm6$ будет ровно одно решение по x, а при $|y|>6$ будет два решения по x. При этом решения будут отличны от 0, так как $0^2-y\cdot0+9\neq0$.

Проанализируем уравнение, получившееся после замены.

Рассмотрим отдельно случай $a=0:$

$$-2y+14=0$$
$$y=7$$

Так как $|7|>6$, то при $a=0$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=0$ нам подходит.

При $a\neq0$ рассмотрим дискриминант квадратного относительно y уравнения $ay^2-2y-49a+14=0$.

$$\begin{aligned}D&=4-4\cdot a\cdot(-49a+14)=\\&=4+4\cdot49a^2-56a=\\&=(14a)^2-2\cdot14a\cdot2+2^2=\\&=(14a-2)^2.\end{aligned}$$

- Если $D=0$, то есть $a=\frac{1}{7}$, то

$$y=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}=7.$$

Так как $|7|>6$, то при $a=\frac{1}{7}$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=\frac{1}{7}$ нам подходит.

- Если $D>0$, то уравнение будет иметь два корня:

$$y_1=\frac{2+14a-2}{2a}=7;$$
$$y_2=\frac{2-14a+2}{2a}=\frac{2-7a}{a}.$$

Таким образом, корень $y_1=7$ обеспечит два решения по x для уравнения $y=x+\frac{9}{x}$. Значит, чтобы исходное

уравнение имело ровно два решения, корень y_2 по модулю должен быть меньше 6. Следовательно,

$$|y_2| < 6$$

$$\left|\frac{2-7a}{a}\right| < 6$$

$$\left(\frac{2-7a}{a}\right)^2 < 6^2$$

$$\left(\frac{2-7a}{a}\right)^2 - 6^2 < 0$$

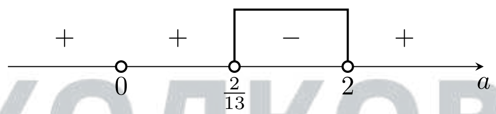
$$\left(\frac{2-7a}{a} - 6\right)\left(\frac{2-7a}{a} + 6\right) < 0$$

$$\frac{2-7a-6a}{a} \cdot \frac{2-7a+6a}{a} < 0$$

$$\frac{2-13a}{a} \cdot \frac{2-a}{a} < 0$$

$$\frac{\left(a - \frac{2}{13}\right)(a-2)}{a^2} < 0$$

По методу интервалов:



ШКОЛКОВО

Таким образом,

$$a \in \left(\frac{2}{13}; 2\right).$$

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left\{0; \frac{1}{7}\right\} \cup \left(\frac{2}{13}; 2\right).$$

№18.6 #126232 (Дальний восток, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{9}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{9}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left\{0;\frac{1}{7}\right\}\cup\left(\frac{2}{13};2\right)$

Решение. Сделаем замену $y=x+\frac{9}{x}$. Получим уравнение

$$ay^2+2y-49a+14=0.$$

Проанализируем замену:

$$y=x+\frac{9}{x}$$
$$yx=x^2+9$$
$$x^2-yx+9=0$$
$$D=y^2-36$$

Таким образом, при $y=\pm6$ будет ровно одно решение по x, а при $|y|>6$ будет два решения по x. При этом решения будут отличны от 0, так как $0^2-y\cdot0+9\neq0$.

Проанализируем уравнение, получившееся после замены.

Рассмотрим отдельно случай $a=0:$

$$2y+14=0$$
$$y=-7$$

Так как $|-7|>6$, то при $a=0$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=0$ нам подходит.

При $a\neq0$ рассмотрим дискриминант квадратного относительно y уравнения $ay^2+2y-49a+14=0$.

$$\begin{aligned}D&=4-4\cdot a\cdot(-49a+14)=\\&=4+4\cdot49a^2-56a=\\&=(14a)^2-2\cdot14a\cdot2+2^2=\\&=(14a-2)^2.\end{aligned}$$

- Если $D=0$, то есть $a=\frac{1}{7}$, то

$$y=-\frac{2}{2a}=-\frac{1}{a}=-7.$$

  Так как $|-7|>6$, то при $a=\frac{1}{7}$ исходное уравнение имеет два корня. Следовательно, $a=\frac{1}{7}$ нам подходит.

- Если $D>0$, то уравнение будет иметь два корня:

$$y_1=\frac{-2+14a-2}{2a}=\frac{7a-2}{a};$$
$$y_2=\frac{-2-14a+2}{2a}=-7.$$

  Таким образом, корень $y_2=-7$ обеспечит два решения по x для уравнения $y=x+\frac{9}{x}$. Значит, чтобы исходное

уравнение имело ровно два решения, корень y_1 по модулю должен быть меньше 6. Следовательно,

$$|y_1| < 6$$

$$\left|\frac{7a-2}{a}\right| < 6$$

$$\left(\frac{7a-2}{a}\right)^2 < 6^2$$

$$\left(\frac{7a-2}{a}\right)^2 - 6^2 < 0$$

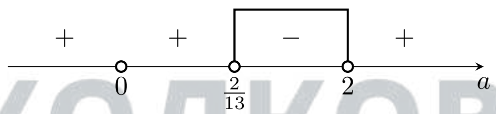
$$\left(\frac{7a-2}{a} - 6\right)\left(\frac{7a-2}{a} + 6\right) < 0$$

$$\frac{7a-2-6a}{a} \cdot \frac{7a-2+6a}{a} < 0$$

$$\frac{a-2}{a} \cdot \frac{13a-2}{a} < 0$$

$$\frac{(a-2)\left(a - \frac{2}{13}\right)}{a^2} < 0$$

По методу интервалов:



ШКОЛКОВО

Таким образом,

$$a \in \left(\frac{2}{13}; 2\right).$$

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left\{0; \frac{1}{7}\right\} \cup \left(\frac{2}{13}; 2\right).$$

№18.7 #125938 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2\right)^2-(a+1)\left(4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2\right)+4=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in(-\infty;-5)\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$

Решение. Пусть

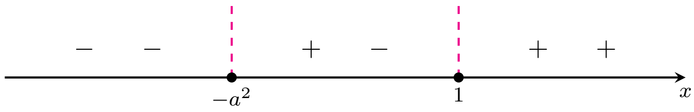
$$y=4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x+a^2=0 & x-1=0 \\ x=-a^2 & x=1 \end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что $-a^2\leqslant 0$, поэтому при любом значении параметра a верно, что $-a^2<1$.

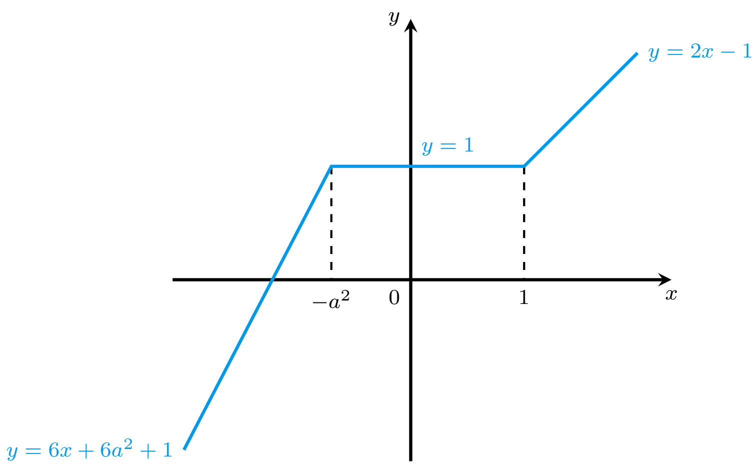
У выражения $4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant -a^2$, то
$$y=4x+3x+3a^2-x+1+3a^2=6x+6a^2+1.$$
- Если $-a^2<x<1$, то
$$y=4x-3x-3a^2-x+1+3a^2=1.$$
- Если $1\leqslant x$, то
$$y=4x-3x-3a^2+x-1+3a^2=2x-1.$$

ШКОЛКОВО

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

- если $y=1$, то у уравнения $y=4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2$ бесконечно много решений;
- если $y\neq 1$, то у уравнения $y=4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2$ ровно одно решение.

Тогда от уравнения $y^2-(a+1)y+4=0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, ни одно из которых не равно 1.

Пусть $f(y) = y^2 - (a+1)y + 4$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)^2 - 4^2 > 0 \\ 1 - (a+1) \cdot 1 + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-3)(a+5) > 0 \\ -a + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty) \\ a \neq 4 \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при

$$a \in (-\infty; -5) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty).$$

ШКОЛКОВО

№18.8 #125963 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(4x+|x+a|+|3x-a+2|)^2+a\,(4x+|x+a|+|3x-a+2|)+a^2-64=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{16\sqrt{3}}{3};1-\sqrt{61}\right)$

Решение. Пусть

$$y=4x+|x+a|+|3x-a+2|.$$

Исследуем полученную функцию. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x+a=0 & 3x-a+2=0\\ x=-a & 3x=a-2\\ & x=\dfrac{a-2}{3}\end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a :

$$-a\leqslant\frac{a-2}{3}$$

$$-3a\leqslant a-2$$

$$-4a\leqslant -2$$

$$a\geqslant 0{,}5$$

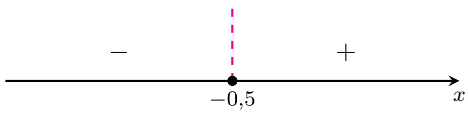
Рассмотрим три случая: $a>0{,}5$, $a=0{,}5$ и $a<0{,}5$.

ШКОЛКОВО

- При $a=0{,}5$ получаем, что $-a=\dfrac{a-2}{3}$. Тогда имеем

$$y=4x+|x+0{,}5|+|3x+1{,}5|=4x+4|x+0{,}5|.$$

Раскроем модуль:



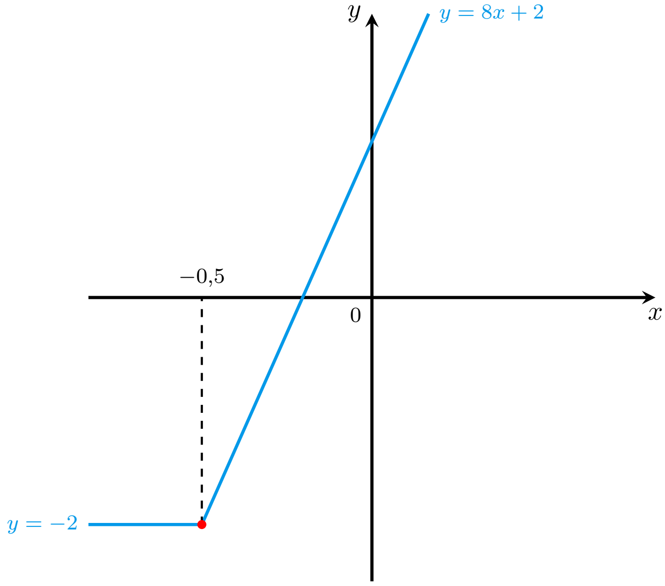
- Если $x\geqslant -0{,}5$, то получаем

$$y=4x+4x+2=8x+2.$$

- Если $x<-0{,}5$, то получаем

$$y=4x-4x-2=-2.$$

Построим эскиз графика этой функции при $a=\dfrac{1}{2}$:



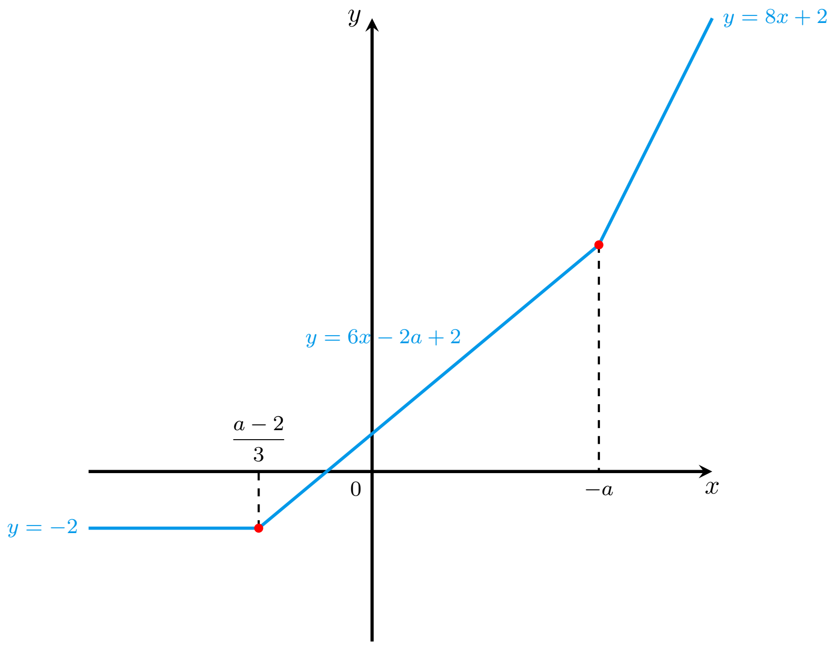
Таким образом,

- если $y < -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ нет решений;
- если $y = -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ бесконечно много решений;
- если $y > -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ ровно одно решение.

- При $a < 0{,}5$ получаем, что $\dfrac{a-2}{3} < -a$. Тогда у выражения $4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:

- Если $x \leqslant \dfrac{a-2}{3}$, то
$$y = 4x - x - a - 3x + a - 2 = -2.$$
- Если $\dfrac{a-2}{3} < x < -a$, то
$$y = 4x - x - a + 3x - a + 2 = 6x - 2a + 2.$$
- Если $-a \leqslant x$, то
$$y = 4x + x + a + 3x - a + 2 = 8x + 2.$$

Построим эскиз графика этой функции:



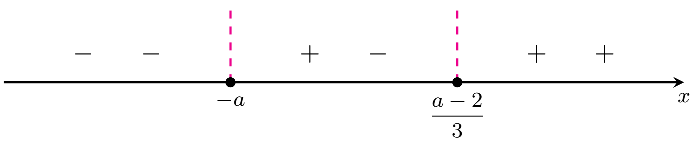
Таким образом,

– если $y < -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ нет решений;

– если $y = -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ бесконечно много решений;

– если $y > -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ ровно одно решение.

- при $a > 0{,}5$ получаем, что $-a < \dfrac{a-2}{3}$. Тогда у выражения $4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:

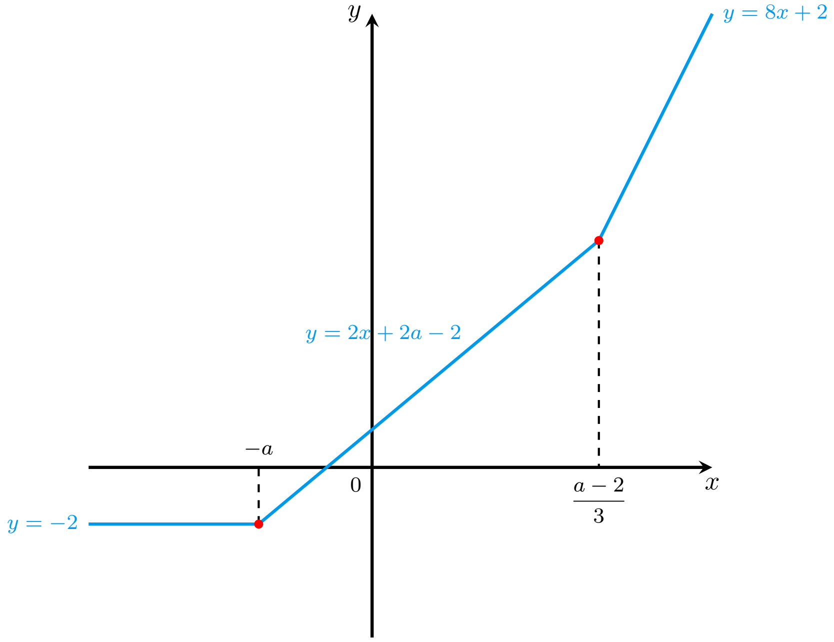


– Если $x \leqslant -a$, то
$$y = 4x - x - a - 3x + a - 2 = -2.$$

– Если $-a < x < \dfrac{a-2}{3}$, то
$$y = 4x + x + a - 3x + a - 2 = 2x + 2a - 2.$$

– Если $\dfrac{a-2}{3} \leqslant x$, то
$$y = 4x + x + a + 3x - a + 2 = 8x + 2.$$

Построим эскиз графика этой функции:

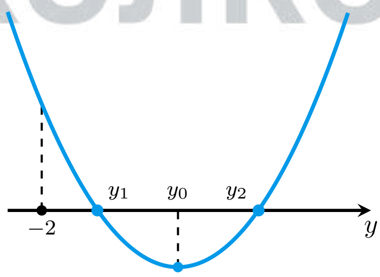


Таким образом,

– если $y < -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ нет решений;
– если $y = -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ бесконечно много решений;
– если $y > -2$, то у уравнения $y = 4x + |x + a| + |3x - a + 2|$ ровно одно решение.

Следовательно, можем сделать аналогичный вывод для любого значения параметра a. Тогда от уравнения $y^2 + ay + a^2 - 64 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, которые оба больше -2.

ШКОЛКОВО



Пусть $f(y) = y^2 + ay + a^2 - 64$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-2) > 0 \\ y_0 > -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 4a^2 + 4 \cdot 64 > 0 \\ 4 - 2a + a^2 - 64 > 0 \\ \dfrac{-a}{2} > -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 < 16^2 \\ a^2 - 2a - 60 > 0 \\ a < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{16\sqrt{3}}{3} < a < \dfrac{16\sqrt{3}}{3} \\ a \in \left(-\infty; 1 - \sqrt{61}\right) \cup \left(1 + \sqrt{61}; +\infty\right) \\ a < 4 \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(-\frac{16\sqrt{3}}{3}; 1-\sqrt{61}\right).$$

ШКОЛКОВО

№18.9 #125971 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(4x+|x-a|-|3x+1|)^2-(a+1)(4x+|x-a|-|3x+1|)+1=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in(-\infty;-3)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

Решение. Пусть

$$y=4x+|x-a|-|3x+1|.$$

Исследуем полученную функцию. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

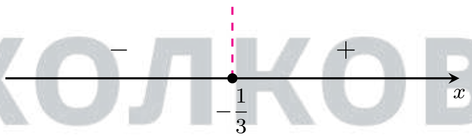
$$x-a=0 \qquad 3x+1=0$$
$$x=a \qquad x=-\frac{1}{3}$$

Раскроем модули. Для этого рассмотрим три случая: $a=-\frac{1}{3}$, $a<-\frac{1}{3}$ и $a>-\frac{1}{3}$.

- При $a=-\frac{1}{3}$ имеем

$$y=4x+\left|x+\frac{1}{3}\right|-|3x+1|=4x-2\left|x+\frac{1}{3}\right|.$$

Раскроем модуль:



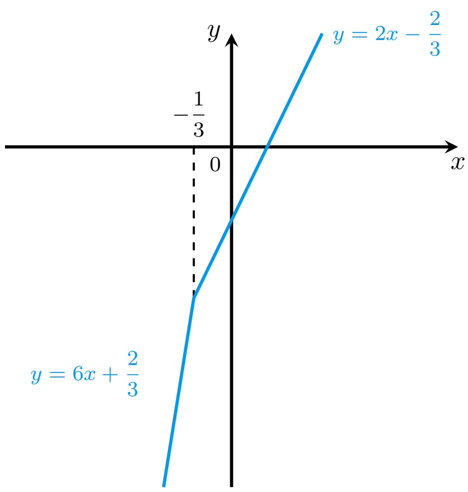
– Если $x\geqslant-\frac{1}{3}$, то получаем

$$y=4x-2x-\frac{2}{3}=2x-\frac{2}{3}.$$

– Если $x<-\frac{1}{3}$, то получаем

$$y=4x+2x+\frac{2}{3}=6x+\frac{2}{3}.$$

Построим эскиз графика этой функции при $a=-\frac{1}{3}$:



Таким образом, в данном случае у уравнения $y = 4x + |x - a| - |3x + 1|$ ровно одно решение при любом y. Тогда от уравнения $y^2 - (a+1)y + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, то есть $D > 0$:

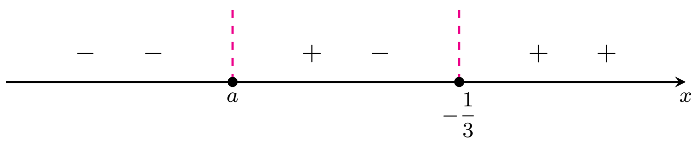
$$(a+1)^2 - 4 \vee 0$$

$$\left(-\frac{1}{3} + 1\right)^2 - 4 \vee 0$$

$$\frac{4}{9} - 4 < 0$$

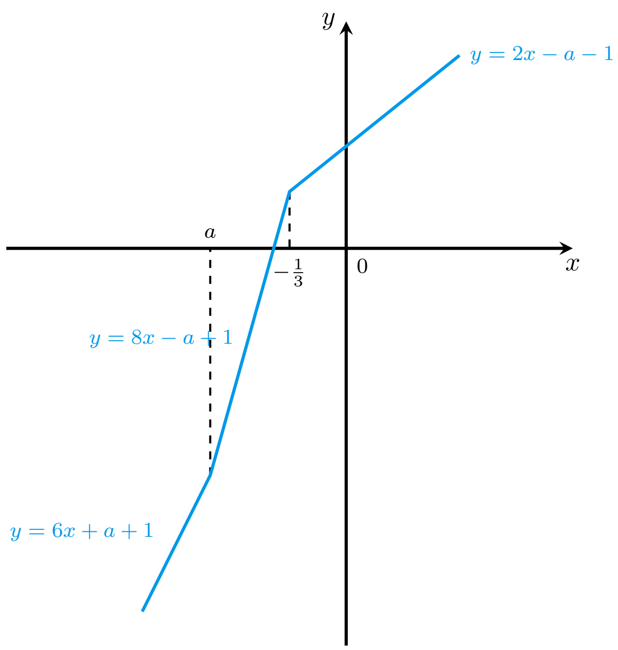
Следовательно, $a = -\frac{1}{3}$ не подходит.

- Пусть $a < -\frac{1}{3}$. Тогда у выражения $4x + |x - a| - |3x + 1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



  – Если $x \leqslant a$, то
$$y = 4x - x + a + 3x + 1 = 6x + a + 1.$$
  – Если $a < x < -\frac{1}{3}$, то
$$y = 4x + x - a + 3x + 1 = 8x - a + 1.$$
  – Если $-\frac{1}{3} \leqslant x$, то
$$y = 4x + x - a - 3x - 1 = 2x - a - 1.$$

Построим эскиз графика этой функции:



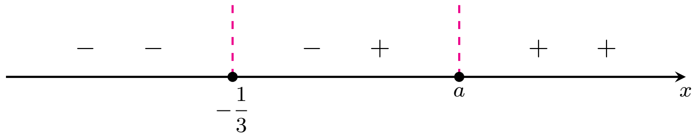
Таким образом, в данном случае у уравнения $y = 4x + |x - a| - |3x + 1|$ ровно одно решение при любом y. Тогда от уравнения $y^2 - (a+1)y + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, то есть $D > 0$:

$$(a+1)^2 - 4 > 0$$
$$(a+1)^2 - 2^2 > 0$$
$$(a-1)(a+3) > 0$$
$$a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$$

Так как мы рассматриваем случай $a < -\dfrac{1}{3}$, получаем:

$$a \in (-\infty; -3).$$

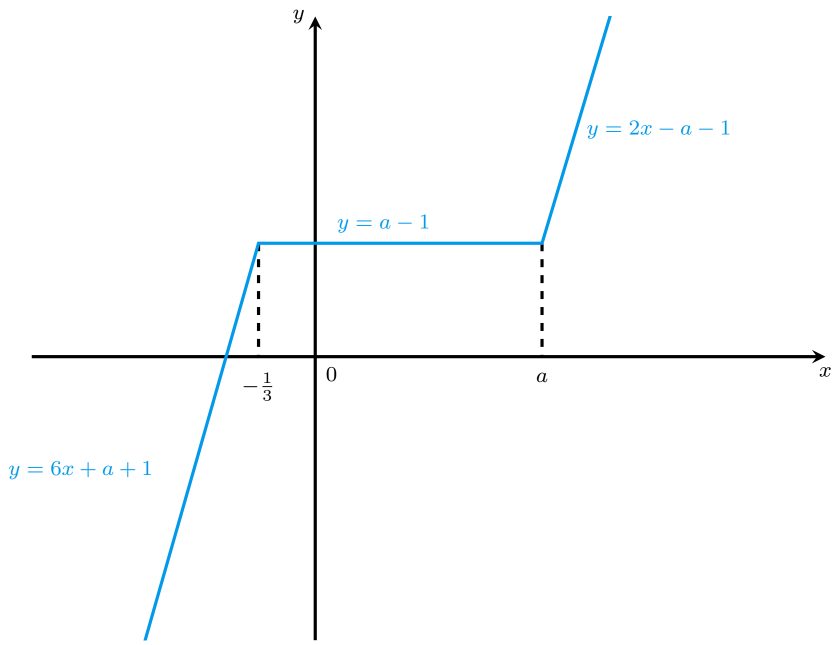
- Пусть $a > -\dfrac{1}{3}$. Тогда у выражения $4x + |x-a| - |3x+1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



  – Если $x \leqslant -\dfrac{1}{3}$, то
  $$y = 4x - x + a + 3x + 1 = 6x + a + 1.$$
  – Если $-\dfrac{1}{3} < x < a$, то
  $$y = 4x - x + a - 3x - 1 = a - 1.$$
  – Если $a \leqslant x$, то
  $$y = 4x + x - a - 3x - 1 = 2x - a - 1.$$

ШКОЛКОВО

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом, в данном случае имеем:

– если $y = a - 1$, то у уравнения $y = 4x + |x-a| - |3x+1|$ бесконечно много решений;

– если $y \neq a - 1$, то у уравнения $y = 4x + |x-a| - |3x+1|$ ровно одно решение.

Тогда от уравнения $y^2 - (a+1)y + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, отличных от $a - 1$.

Пусть $f(y)=y^2-(a+1)y+1$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} D>0\\ f(a-1)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)^2-4>0\\ (a-1)^2-(a+1)(a-1)+1\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)^2-2^2>0\\ a^2-2a+1-a^2+1+1\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)(a+3)>0\\ a\neq \dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$$a\in(-\infty;-3)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$$

Так как мы рассматриваем случай $a>-\dfrac{1}{3}$, получаем:

$$a\in\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right).$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a\in(-\infty;-3)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right).$$

ШКОЛКОВО

№18.10 #125929 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a)^2 - a(7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a) + 1 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\dfrac{26}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{26}{5}; -2\right) \cup (2; +\infty)$

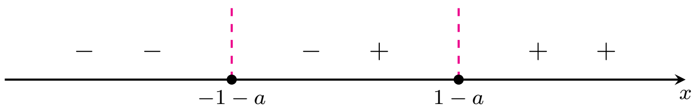
Решение. Пусть

$$y = 7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y = 7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x + a - 1 = 0 & x + a + 1 = 0 \\ x = 1 - a & x = -1 - a \end{array}$$

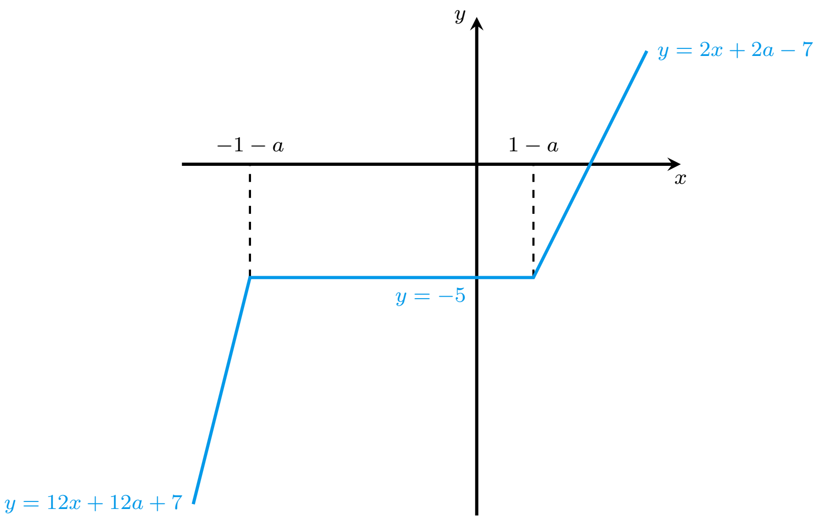
Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что при любом значении параметра a верно, что $-1 - a < 1 - a$. У выражения $7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x \leqslant -1 - a$, то
$$y = 7x - x - a + 1 + 6x + 6a + 6 + 7a = 12x + 12a + 7.$$
- Если $-1 - a < x < 1 - a$, то
$$y = 7x - x - a + 1 - 6x - 6a - 6 + 7a = -5.$$
- Если $1 - a \leqslant x$, то
$$y = 7x + x + a - 1 - 6x - 6a - 6 + 7a = 2x + 2a - 7.$$

ШКОЛКОВО

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

- если $y = -5$, то у уравнения $y = 7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a$ бесконечно много решений;
- если $y \neq -5$, то у уравнения $y = 7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a$ ровно одно решение.

Тогда от уравнения $y^2 - ay + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, ни одно из которых не равно -5.
Пусть $f(y) = y^2 - ay + 1$. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-5) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 4 > 0 \\ 25 + 5a + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)(a+2) > 0 \\ 5a \neq -26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ a \neq -\dfrac{26}{5} \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при

$$a \in \left(-\infty; -\frac{26}{5}\right) \cup \left(-\frac{26}{5}; -2\right) \cup (2; +\infty).$$

ШКОЛКОВО

№18.11 #125967 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(7x+|x+a|-|6x|)^2+(a+1)(7x+|x+a|-|6x|)-a-1=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in(-\infty;-5)\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Решение. Пусть

$$y=7x+|x+a|-|6x|.$$

Исследуем полученную функцию. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

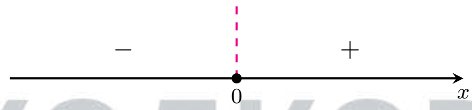
$$\begin{array}{cc} x+a=0 & 6x=0 \\ x=-a & x=0 \end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений $-a$ и 0 в зависимости от значений параметра.

1. При $a=0$ получаем

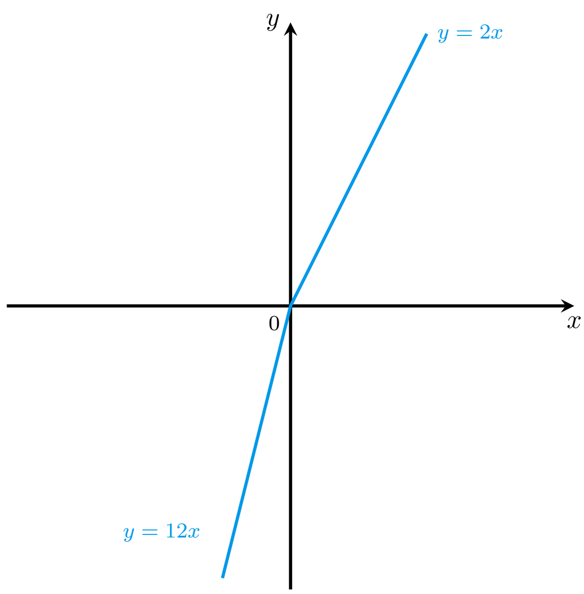
$$y=7x+|x|-|6x|=7x-|5x|.$$

Раскроем модуль:



- Если $x\geqslant 0$, то получаем
$$y=7x-5x=2x.$$
- Если $x<0$, то получаем
$$y=7x+5x=12x.$$

Построим эскиз графика этой функции:

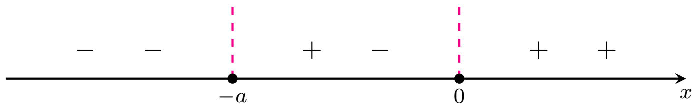


Таким образом, в данном случае у уравнения $y=7x+|x+a|-|6x|$ ровно одно решение при любом y. Тогда от уравнения $y^2+(a+1)y-a-1=0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, то есть $D > 0$:

$$(a+1)^2 + 4(a+1) > 0$$
$$1^2 + 4 > 0$$

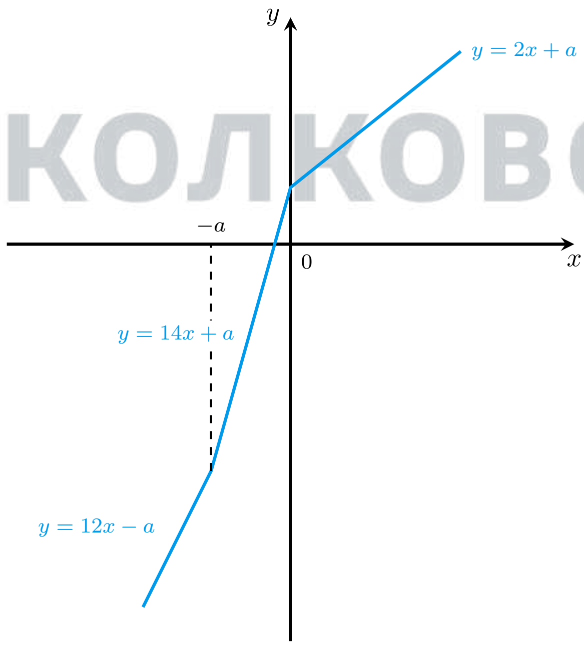
Следовательно, $a = 0$ подходит.

2. При $a > 0$ получаем, что $-a < 0$. Тогда у выражения $7x + |x + a| - |6x|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x \leqslant -a$, то
$$y = 7x - x - a + 6x = 12x - a.$$
- Если $-a < x < 0$, то
$$y = 7x + x + a + 6x = 14x + a.$$
- Если $0 \leqslant x$, то
$$y = 7x + x + a - 6x = 2x + a.$$

Построим эскиз графика этой функции:



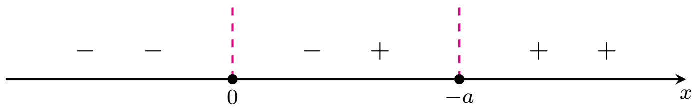
Таким образом, в данном случае у уравнения $y = 7x + |x + a| - |6x|$ также ровно одно решение при любом y. Тогда от уравнения $y^2 + (a+1)y - a - 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно также потребовать два различных решения:

$$(a+1)^2 + 4(a+1) > 0$$
$$(a+1)(a+5) > 0$$
$$a \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$$

Так как мы рассматриваем случай $a > 0$, получаем:

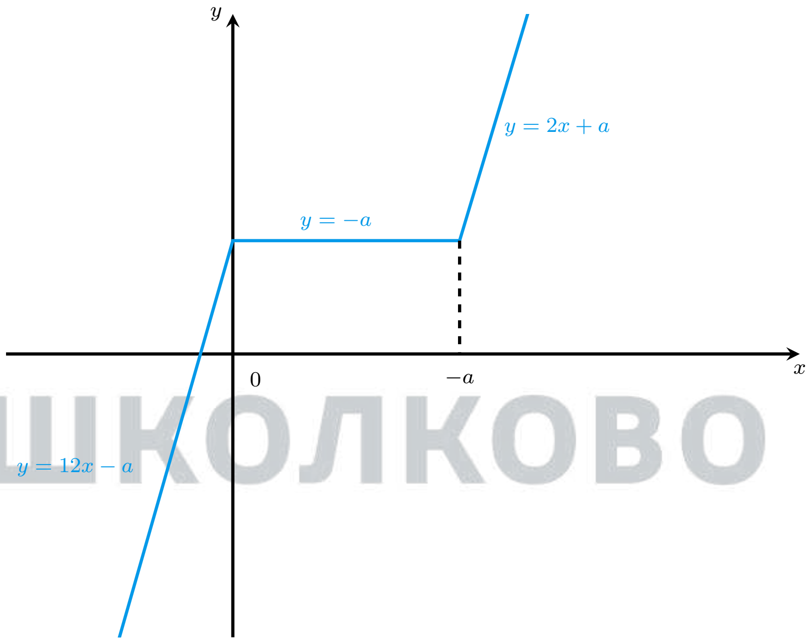
$$a \in (0; +\infty).$$

3. При $a < 0$ получаем, что $0 < -a$. Тогда у выражения $7x + |x + a| - |6x|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x \leqslant 0$, то
$$y = 7x - x - a + 6x = 12x - a.$$
- Если $0 < x < -a$, то
$$y = 7x - x - a - 6x = -a.$$
- Если $-a \leqslant x$, то
$$y = 7x + x + a - 6x = 2x + a.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом, в данном случае имеем:

- если $y = -a$, то у уравнения $y = 7x + |x + a| - |6x|$ бесконечно много решений;
- если $y \neq -a$, то у уравнения $y = 7x + |x + a| - |6x|$ ровно одно решение.

Тогда от уравнения $y^2 + (a+1)y - a - 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, отличных от $-a$.

Пусть $f(y) = y^2 + (a+1)y - a - 1$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)^2 + 4(a+1) > 0 \\ a^2 - (a+1)a - a - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)(a+5) > 0 \\ a \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -5) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Так как мы рассматриваем случай $a < 0$, получаем:

$$a \in (-\infty; -5) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

Таким образом, объединяя результаты всех трех случаев, получаем, что исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in (-\infty; -5) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

ШКОЛКОВО

№18.12 #125925 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2\right)^2+(a+2)\left(5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2\right)+1=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in(-\infty;-4)\cup\left(0;\dfrac{9}{4}\right)\cup\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$

Решение. Пусть

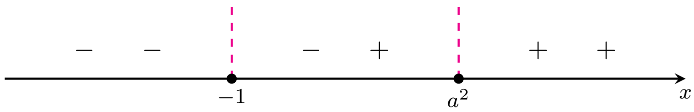
$$y=5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-a^2=0 & x+1=0\\ x=a^2 & x=-1\end{array}$$

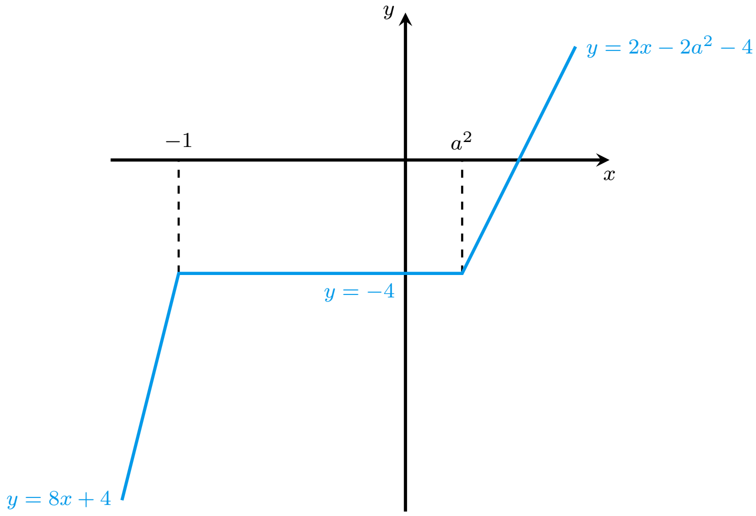
Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что $a^2\geqslant 0$, тогда при любом значении параметра a верно, что $a^2>-1$.

У выражения $5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant -1$, то
$$y=5x-x+a^2+4x+4-a^2=8x+4.$$
- Если $-1<x<a^2$, то
$$y=5x-x+a^2-4x-4-a^2=-4.$$
- Если $a^2\leqslant x$, то
$$y=5x+x-a^2-4x-4-a^2=2x-2a^2-4.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

- если $y=-4$, то у уравнения $y=5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2$ бесконечно много решений;
- если $y\neq -4$, то у уравнения $y=5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2$ ровно одно решение.

Тогда от уравнения $y^2+(a+2)y+1=0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, ни одно из которых не равно -4.
Пусть $f(y)=y^2+(a+2)y+1$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} D>0 \\ f(-4)\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2)^2-4>0 \\ 16-4(a+2)+1\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2-2)(a+2+2)>0 \\ 4a\neq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a+4)>0 \\ a\neq \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty) \\ a\neq \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a\in(-\infty;-4)\cup\left(0;\frac{9}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right).$$

ШКОЛКОВО

№18.13 #126317 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(5x+2|x-a|-|3x|)^2+(a-1)\,(5x+2|x-a|-|3x|)+1=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

Решение. Пусть

$$y=5x+2|x-a|-|3x|.$$

Исследуем полученную функцию. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

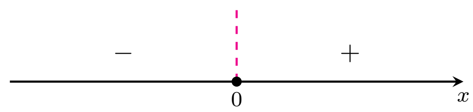
$$\begin{array}{cc} x-a=0 & 3x=0 \\ x=a & x=0 \end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений a и 0 в зависимости от значений параметра.

1. При $a=0$ получаем

$$y=5x+2|x|-|3x|=5x-|x|.$$

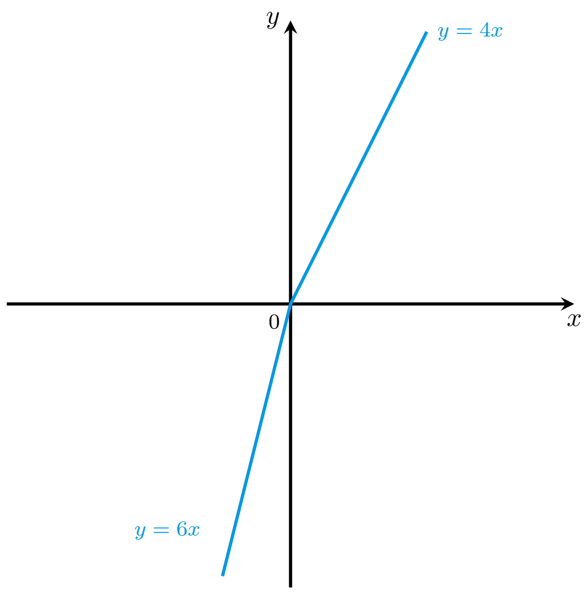
Раскроем модуль:



ШКОЛКОВО

- Если $x\geqslant 0$, то получаем
$$y=5x-x=4x.$$
- Если $x<0$, то получаем
$$y=5x+x=6x.$$

Построим эскиз графика этой функции:

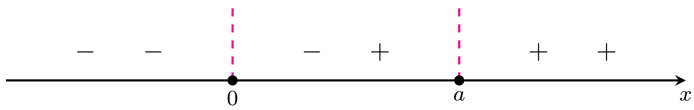


Таким образом, в данном случае у уравнения $y=5x+2|x-a|-|3x|$ ровно одно решение при любом y. Тогда от уравнения $y^2+(a-1)y+1=0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, то есть $D>0$. Но

$$D=(a-1)^2-4=1^2-4=-3<0$$

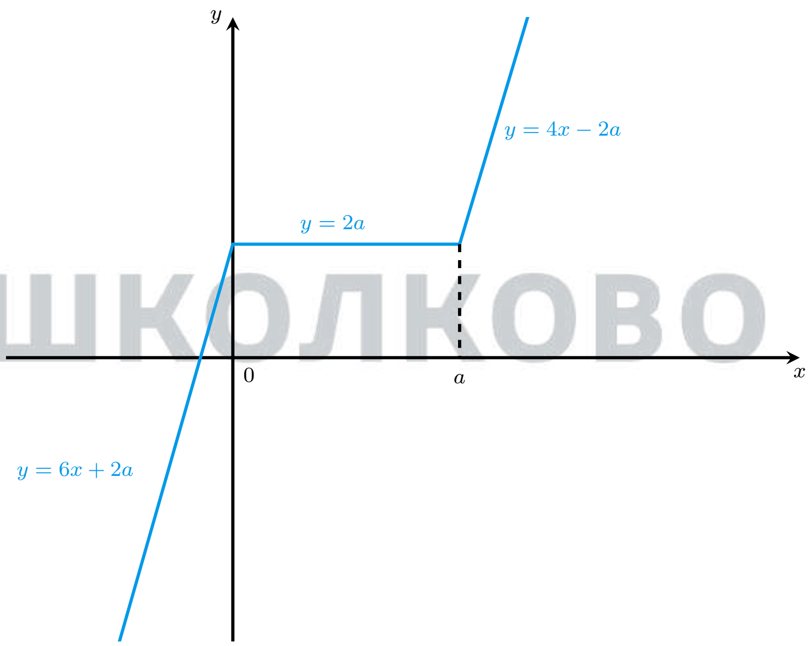
Следовательно, $a = 0$ не подходит.

2. Пусть $a > 0$. Тогда у выражения $5x + 2|x - a| - |3x|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x \leqslant 0$, то
$$y = 5x - 2x + 2a + 3x = 6x + 2a.$$
- Если $0 < x < a$, то
$$y = 5x - 2x + 2a - 3x = 2a.$$
- Если $\frac{a}{2} \leqslant x$, то
$$y = 5x + 2x - 2a - 3x = 4x - 2a.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом, в данном случае имеем:

- если $y = 2a$, то у уравнения $y = 5x + 2|x - a| - |3x|$ бесконечно много решений;
- если $y \neq 2a$, то у уравнения $y = 5x + 2|x - a| - |3x|$ ровно одно решение.

Тогда от уравнения $y^2 + (a - 1)y + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, отличных от $2a$.

Пусть $f(y) = y^2 + (a-1)y + 1$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(2a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)^2 - 4 > 0 \\ 4a^2 + 2(a-1)a + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 - 4 > 0 \\ 4a^2 + 2a^2 - 2a + 1 \neq 0 \end{cases}$$

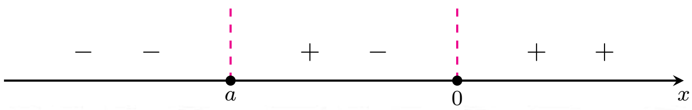
$$\begin{cases} (a+1)(a-3) > 0 \\ 6a^2 - 2a + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$$

Так как мы рассматриваем случай $a > 0$, то получаем:

$$a \in (3; +\infty)\,.$$

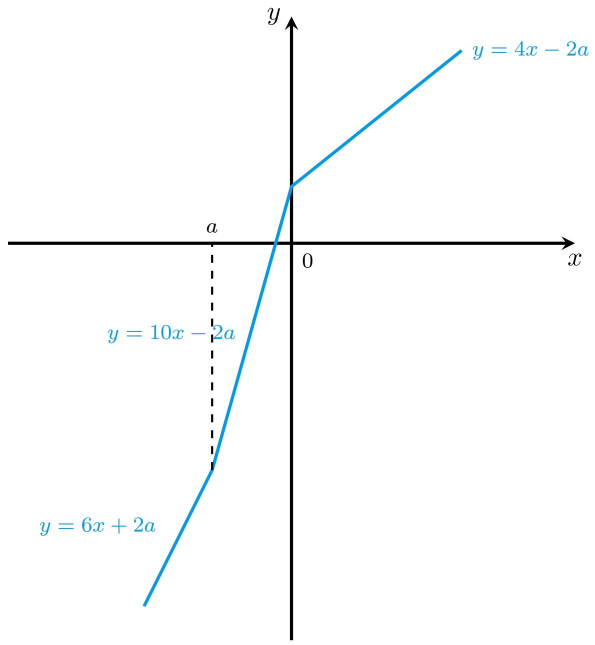
3. Пусть $a < 0$. Тогда у выражения $5x + 2|x-a| - |3x|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



ШКОЛКОВО

- Если $x \leqslant a$, то
$$y = 5x - 2x + 2a + 3x = 6x + 2a.$$
- Если $a < x < 0$, то
$$y = 5x + 2x - 2a + 3x = 10x - 2a.$$
- Если $0 \leqslant x$, то
$$y = 5x + 2x - 2a - 3x = 4x - 2a.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом, в данном случае у уравнения $y = 5x + 2|x - a| - |3x|$ ровно одно решение при любом y. Тогда от уравнения $y^2 + (a - 1)y + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения:

$$D > 0$$
$$(a - 1)^2 - 4 > 0$$
$$a^2 - 2a + 1 - 4 > 0$$
$$a^2 - 2a - 3 > 0$$
$$(a + 1)(a - 3) > 0$$
$$a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$$

Так как мы рассматриваем случай $a < 0$, получаем:

$$a \in (-\infty; -1).$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty).$$

ШКОЛКОВО

№18.14 #125966 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(5x + |2x - a| - |3x|)^2 - (a+2)(5x + |2x - a| - |3x|) + 1 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a \in (-\infty; -4) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Решение. Пусть

$$y = 5x + |2x - a| - |3x|.$$

Исследуем полученную функцию. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

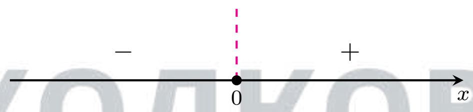
$$2x - a = 0 \qquad 3x = 0$$
$$x = \frac{a}{2} \qquad x = 0$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений $\frac{a}{2}$ и 0 в зависимости от значений параметра.

1. При $a = 0$ получаем

$$y = 5x + |2x| - |3x| = 5x - |x|.$$

Раскроем модуль:



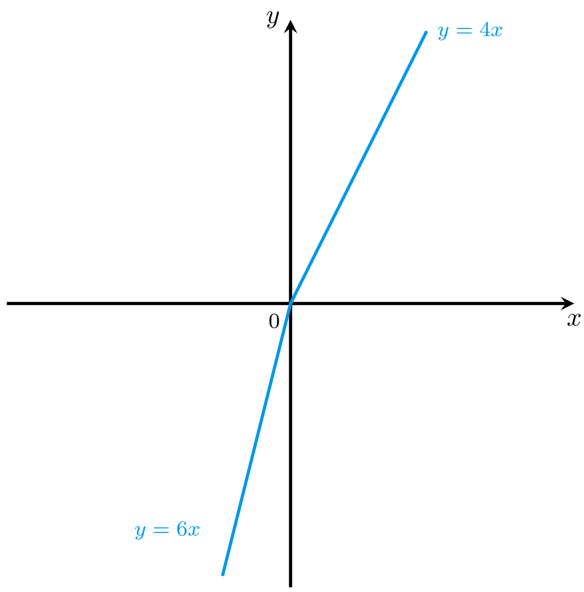
- Если $x \geqslant 0$, то получаем

$$y = 5x - x = 4x.$$

- Если $x < 0$, то получаем

$$y = 5x + x = 6x.$$

Построим эскиз графика этой функции:

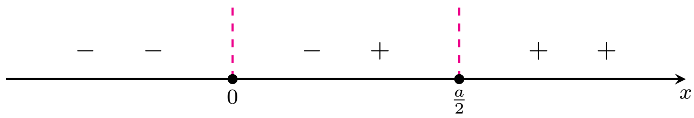


Таким образом, в данном случае у уравнения $y = 5x + |2x - a| - |3x|$ ровно одно решение при любом y. Тогда от уравнения $y^2 - (a+2)y + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, то есть $D > 0:$

$$(a+2)^2 - 4 > 0$$
$$2^2 - 4 = 0$$

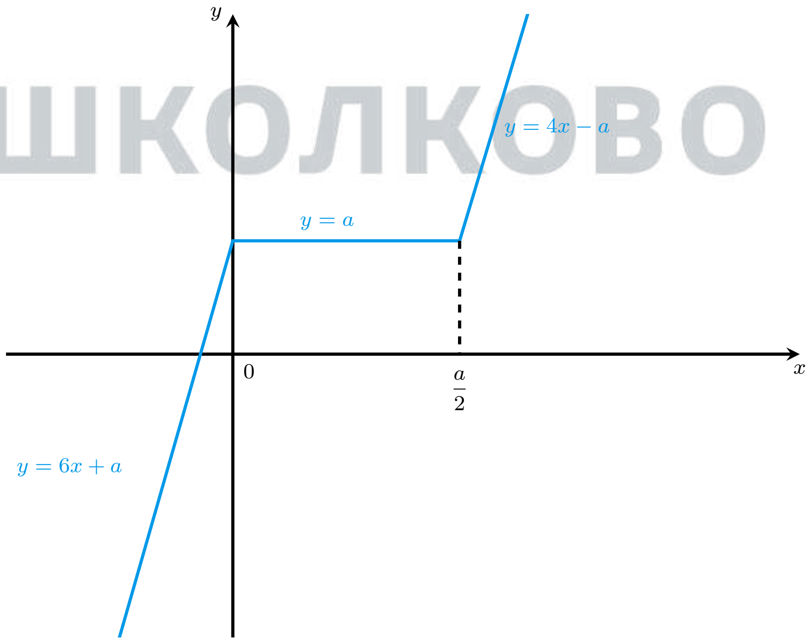
Следовательно, $a = 0$ не подходит.

2. При $a > 0$ получаем, что $\frac{a}{2} > 0$. Тогда у выражения $5x + |2x-a| - |3x|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x \leqslant 0$, то
$$y = 5x - 2x + a + 3x = 6x + a.$$
- Если $0 < x < \frac{a}{2}$, то
$$y = 5x - 2x + a - 3x = a.$$
- Если $\frac{a}{2} \leqslant x$, то
$$y = 5x + 2x - a - 3x = 4x - a.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом, в данном случае имеем:

- если $y = a$, то у уравнения $y = 5x + |2x-a| - |3x|$ бесконечно много решений;
- если $y \neq a$, то у уравнения $y = 5x + |2x-a| - |3x|$ ровно одно решение.

Тогда от уравнения $y^2 - (a+2)y + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения, отличных от a.

Пусть $f(y) = y^2 - (a+2)y + 1$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2)^2 - 4 > 0 \\ a^2 - (a+2)a + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 4a + 4 - 4 > 0 \\ a^2 - a^2 - 2a + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a+4) > 0 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -4) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Так как мы рассматриваем случай $a > 0$, получаем:

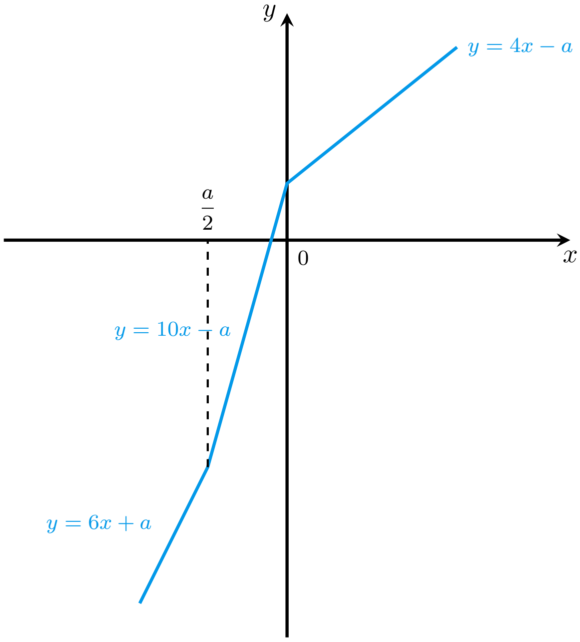
$$a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

3. При $a < 0$ получаем, что $\dfrac{a}{2} < 0$. Тогда у выражения $5x + |2x - a| - |3x|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:

ШКОЛКОВО

- Если $x \leqslant \dfrac{a}{2}$, то
$$y = 5x - 2x + a + 3x = 6x + a.$$
- Если $\dfrac{a}{2} < x < 0$, то
$$y = 5x + 2x - a + 3x = 10x - a.$$
- Если $0 \leqslant x$, то
$$y = 5x + 2x - a - 3x = 4x - a.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом, в данном случае у уравнения $y = 5x + |2x - a| - |3x|$ ровно одно решение при любом y. Тогда от уравнения $y^2 - (a+2)y + 1 = 0$, которое мы получили после замены, нужно потребовать два различных решения:

$$D > 0$$
$$(a+2)^2 - 4 > 0$$
$$a^2 + 4a + 4 - 4 > 0$$
$$a^2 + 4a > 0$$
$$a(a+4) > 0$$
$$a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$$

Так как мы рассматриваем случай $a < 0$, получаем:

$$a \in (-\infty; -4).$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in (-\infty; -4) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

№18.15 #125962 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a^2|+|x+2|)^2-11\cdot(|x-a^2|+|x+2|)+2a^2+24=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left(-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)\cup\left\{\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right\}$

Решение. Пусть

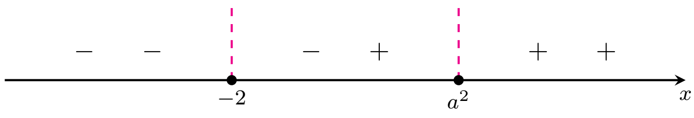
$$y=|x-a^2|+|x+2|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=|x-a^2|+|x+2|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-a^2=0 & x+2=0\\ x=a^2 & x=-2\end{array}$$

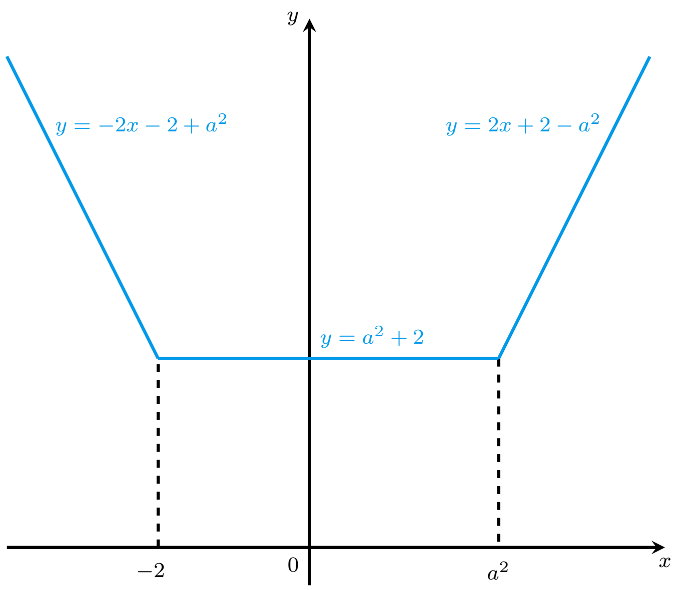
Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что $a^2\geqslant 0$, поэтому при любом значении параметра a верно, что $a^2>-2$.

У выражения $|x-a^2|+|x+2|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant -2$, то
$$y=-x+a^2-x-2=-2x+a^2-2.$$
- Если $-2<x<a^2$, то
$$y=-x+a^2+x+2=a^2+2.$$
- Если $a^2\leqslant x$, то
$$y=x-a^2+x+2=2x-a^2+2.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

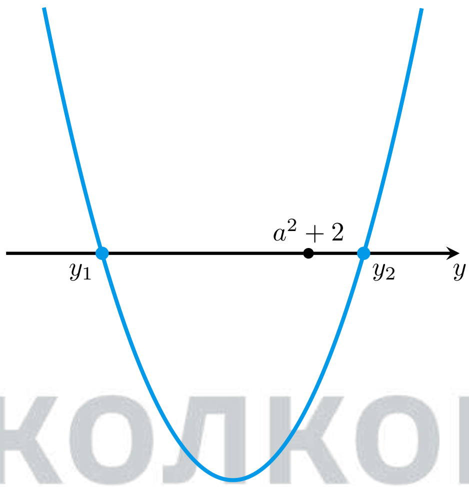
- если $y>a^2+2$, то у уравнения $y=|x-a^2|+|x+2|$ ровно два решения;

- если $y = a^2 + 2$, то у уравнения $y = |x - a^2| + |x + 2|$ бесконечно много решений;
- если $y < a^2 + 2$, то у уравнения $y = |x - a^2| + |x + 2|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решений, либо не дает вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 - 11y + 2a^2 + 24 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее $a^2 + 2$, и при этом никакое решение не равнялось $a^2 + 2$.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < a^2 + 2 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > a^2 + 2$.

Пусть $f(y) = y^2 - 11y + 2a^2 + 24$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение $a^2 + 2$ расположено между ними, равносильно условию $f\left(a^2+2\right) < 0:$

$$f\left(a^2+2\right) = \left(a^2+2\right)^2 - 11\left(a^2+2\right) + 2a^2 + 24 < 0$$
$$a^4 + 4a^2 + 4 - 11a^2 - 22 + 2a^2 + 24 < 0$$
$$a^4 - 5a^2 + 6 < 0$$
$$\left(a^2-2\right)\left(a^2-3\right) < 0$$
$$\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a-\sqrt{3}\right)\left(a+\sqrt{3}\right) < 0$$

Отсюда получаем $a \in \left(-\sqrt{3}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение имело один корень, необходимо потребовать $D = 0:$

$$121 - 4\left(2a^2+24\right) = 0$$
$$8a^2 = 25$$
$$a^2 = \frac{25}{8}$$
$$y_0 = \frac{11}{2} > a^2 + 2 = \frac{25}{8} + 2$$

Значит, $a = \pm\frac{5\sqrt{2}}{4}$ тоже подходит.
Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(-\sqrt{3}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right) \cup \left\{\pm\frac{5\sqrt{2}}{4}\right\}.$$

№18.16 #125961 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)^2-7\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)+4a^2+4=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup \left\{\pm\dfrac{\sqrt{33}}{4}\right\}$

Решение. Пусть

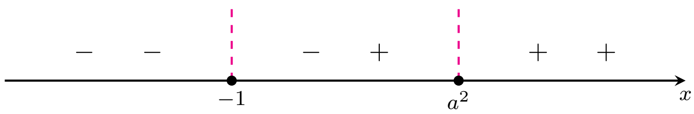
$$y=\left|x-a^2\right|+|x+1|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=\left|x-a^2\right|+|x+1|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-a^2=0 & \quad x+1=0 \\ x=a^2 & \quad x=-1 \end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что $a^2 \geqslant 0$, поэтому при любом значении параметра a верно, что $a^2>-1$:

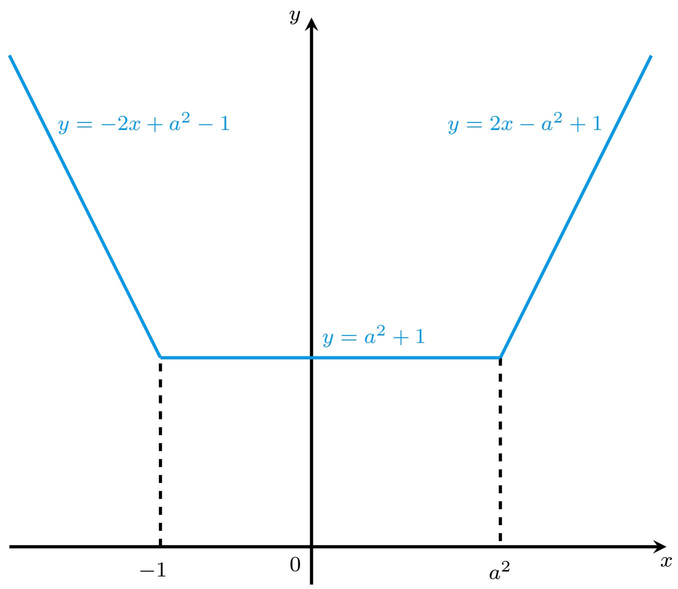
У выражения $\left|x-a^2\right|+|x+1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x \leqslant -1$, то
$$y=-x+a^2-x-1=-2x+a^2-1.$$
- Если $-1<x<a^2$, то
$$y=a^2-x+x+1=a^2+1.$$
- Если $a^2 \leqslant x$, то
$$y=x-a^2+x+1=2x-a^2+1.$$

ШКОЛКОВО

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

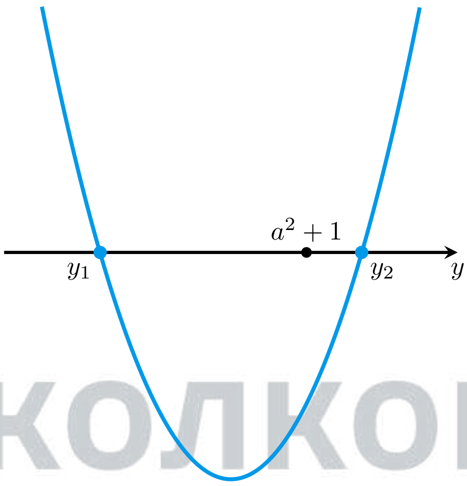
- если $y>a^2+1$, то у уравнения $y=\left|x-a^2\right|+|x+1|$ ровно два решения;

- если $y = a^2 + 1$, то у уравнения $y = |x - a^2| + |x + 1|$ бесконечно много решений;
- если $y < a^2 + 1$, то у уравнения $y = |x - a^2| + |x + 1|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решения, либо не дает их вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее $a^2 + 1$, и никакое решение уравнения не было бы равно $a^2 + 1$.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < a^2 + 1 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > a^2 + 1$.

Пусть $f(y) = y^2 - 7y + 4a^2 + 4$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение $a^2 + 1$ расположено между ними, равносильно условию $f\left(a^2 + 1\right) < 0:$

$$f\left(a^2+1\right) < 0$$
$$\left(a^2+1\right)^2 - 7\left(a^2+1\right) + 4a^2 + 4 < 0$$
$$a^4 + 2a^2 + 1 - 7a^2 - 7 + 4a^2 + 4 < 0$$
$$a^4 - a^2 - 2 < 0$$
$$\left(a^2 - 2\right)\left(a^2 + 1\right) < 0$$

Так как $a^2 + 1 > 0$ для всех a, то

$$a^2 - 2 < 0$$
$$\left(a - \sqrt{2}\right)\left(a + \sqrt{2}\right) < 0$$

Отсюда получаем $a \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$ имело один корень, необходимо потребовать $D = 0:$

$$49 - 4\left(4a^2 + 4\right) = 0$$
$$-16a^2 - 16 + 49 = 0$$
$$a^2 = \frac{33}{16}$$
$$a = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$$
$$y_0 = \frac{7}{2} > a^2 + 1 = \frac{33}{16} + 1 = \frac{49}{16}$$

Убедимся, что $\dfrac{7}{2} > \dfrac{49}{16}$:

$$\frac{7}{2} \vee \frac{49}{16}$$
$$7 \cdot 16 \vee 49 \cdot 2$$
$$112 > 98$$

Тогда $a = \pm\dfrac{\sqrt{33}}{4}$ подходят, так как при данных значениях параметра единственный корень уравнения будет больше, чем $a^2 + 1$.
Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup \left\{\pm\frac{\sqrt{33}}{4}\right\}.$$

ШКОЛКОВО

№18.17 #125959 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)^2-8\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)-a^2+17=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a \in \left(-\sqrt{5};-\sqrt{2}\right) \cup \{-1;1\} \cup \left(\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$

Решение. Пусть

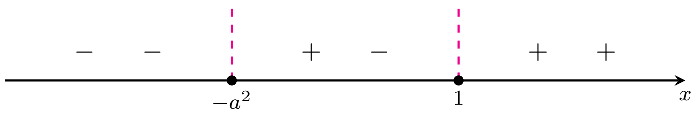
$$y=\left|x+a^2\right|+|x-1|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=\left|x+a^2\right|+|x-1|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x+a^2=0 & \qquad x-1=0 \\ x=-a^2 & \qquad x=1 \end{array}$$

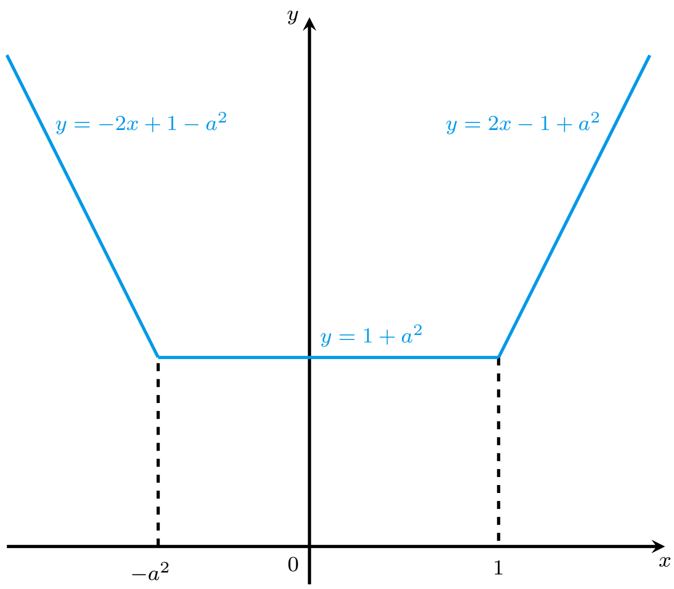
Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что $-a^2 \leqslant 0$, поэтому при любом значении параметра a верно, что $-a^2<1$:

У выражения $\left|x+a^2\right|+|x-1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x \leqslant -a^2$, то
$$y=-x-a^2-x+1=-2x+1-a^2.$$
- Если $-a^2<x<1$, то
$$y=x+a^2-x+1=1+a^2.$$
- Если $1 \leqslant x$, то
$$y=x+a^2+x-1=2x-1+a^2.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

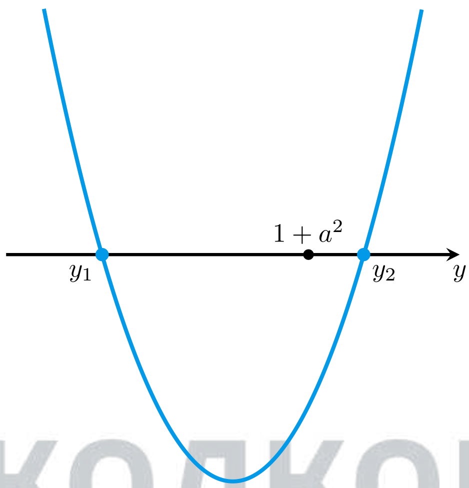
- если $y>1+a^2$, то у уравнения $y=\left|x+a^2\right|+|x-1|$ ровно два решения;
- если $y=1+a^2$, то у уравнения $y=\left|x+a^2\right|+|x-1|$ бесконечно много решений;

- если $y < 1 + a^2$, то у уравнения $y = \left|x + a^2\right| + |x - 1|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решений, либо не дает их вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 - 8y - a^2 + 17 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее $1 + a^2$, и никакое решение уравнения не было бы равно $1 + a^2$.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < 1 + a^2 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > 1 + a^2$.

Пусть $f(y) = y^2 - 8y - a^2 + 17$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение $1 + a^2$ расположено между ними, равносильно условию $f\left(1 + a^2\right) < 0:$

$$f\left(1 + a^2\right) < 0$$

$$\left(1 + a^2\right)^2 - 8\left(1 + a^2\right) - a^2 + 17 < 0$$

$$a^4 + 2a^2 + 1 - 8 - 8a^2 - a^2 + 17 < 0$$

$$a^4 - 7a^2 + 10 < 0$$

$$\left(a^2 - 2\right)\left(a^2 - 5\right) < 0$$

$$\left(a - \sqrt{2}\right)\left(a + \sqrt{2}\right)\left(a - \sqrt{5}\right)\left(a + \sqrt{5}\right) < 0$$

Отсюда получаем $a \in \left(-\sqrt{5}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{5}\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение $y^2 - 8y - a^2 + 17 = 0$ имело один корень, необходимо потребовать $D = 0:$

$$64 - 4(-a^2 + 17) = 0$$

$$4a^2 + 64 - 4 \cdot 17 = 0$$

$$a^2 = \frac{4 \cdot 17 - 64}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1$$

$$y_0 = \frac{8}{2} = 4 > 1 + a^2 = 2$$

Тогда $a = \pm 1$ подходят, так как при данных значениях параметра единственный корень уравнения будет больше, чем $1 + a^2$.
Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(-\sqrt{5}; -\sqrt{2}\right) \cup \{-1; 1\} \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{5}\right).$$

№18.18 #126315 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)^2-8\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)-a^2+17=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left(-\sqrt{5};-\sqrt{2}\right)\cup\{-1;1\}\cup\left(\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$

Решение. Пусть

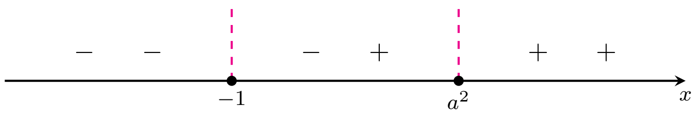
$$y=\left|x-a^2\right|+|x+1|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=\left|x-a^2\right|+|x+1|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-a^2=0 & x+1=0 \\ x=a^2 & x=-1 \end{array}$$

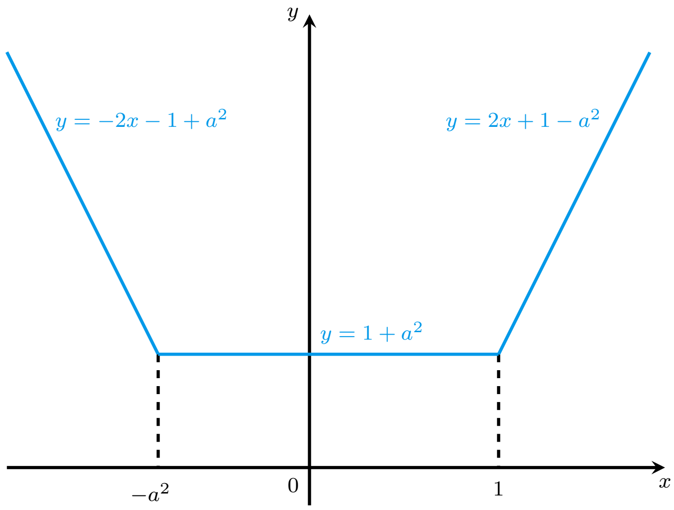
Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что $a^2\geqslant 0$, поэтому при любом значении параметра a верно, что $a^2>-1$:

У выражения $\left|x-a^2\right|+|x+1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant -1$, то
$$y=-x+a^2-x-1=-2x-1+a^2.$$
- Если $-1<x<a^2$, то
$$y=-x+a^2+x+1=1+a^2.$$
- Если $a^2\leqslant x$, то
$$y=x-a^2+x+1=2x+1-a^2.$$

Построим эскиз графика этой функции:



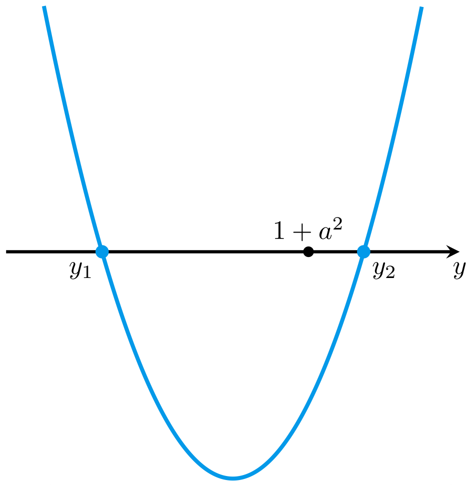
Таким образом,

- если $y>1+a^2$, то у уравнения $y=\left|x-a^2\right|+|x+1|$ ровно два решения;
- если $y=1+a^2$, то у уравнения $y=\left|x-a^2\right|+|x+1|$ бесконечно много решений;
- если $y<1+a^2$, то у уравнения $y=\left|x-a^2\right|+|x+1|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решения, либо не дает их вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 - 8y - a^2 + 17 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее $1 + a^2$, и никакое решение уравнения не было бы равно $1 + a^2$.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < 1 + a^2 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > 1 + a^2$.

Пусть $f(y) = y^2 - 8y - a^2 + 17$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение $1 + a^2$ расположено между ними, равносильно условию $f\left(1 + a^2\right) < 0:$

$$f\left(1+a^2\right) < 0$$
$$\left(1+a^2\right)^2 - 8\left(1+a^2\right) - a^2 + 17 < 0$$
$$a^4 + 2a^2 + 1 - 8 - 8a^2 - a^2 + 17 < 0$$
$$a^4 - 7a^2 + 10 < 0$$
$$\left(a^2-2\right)\left(a^2-5\right) < 0$$
$$\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right) < 0$$

Отсюда получаем $a \in \left(-\sqrt{5}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{5}\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение $y^2 - 8y - a^2 + 17 = 0$ имело один корень, необходимо потребовать $D = 0:$

$$64 - 4(-a^2 + 17) = 0$$
$$4a^2 + 64 - 4 \cdot 17 = 0$$
$$a^2 = \frac{4 \cdot 17 - 64}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1$$
$$y_0 = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4 > 1 + a^2 = 2$$

Тогда $a = \pm 1$ подходят, так как при данных значениях параметра единственный корень уравнения будет больше, чем $1 + a^2$.
Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(-\sqrt{5}; -\sqrt{2}\right) \cup \{-1; 1\} \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{5}\right).$$

№18.19 #126316 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)^2-8\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)+a^2-17=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$

Решение. Пусть

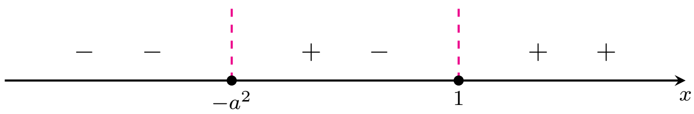
$$y=\left|x+a^2\right|+|x-1|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=\left|x+a^2\right|+|x-1|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x+a^2=0 & x-1=0 \\ x=-a^2 & x=1 \end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что $-a^2\leqslant 0$, поэтому при любом значении параметра a верно, что $-a^2<1$:

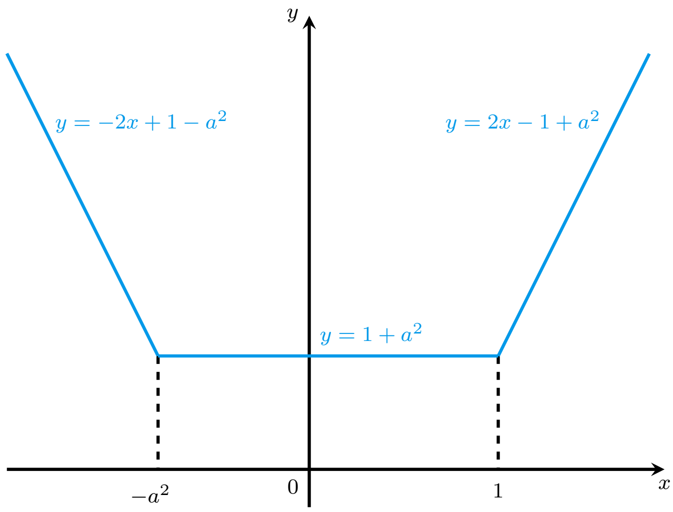
У выражения $\left|x+a^2\right|+|x-1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant -a^2$, то
$$y=-x-a^2-x+1=-2x+1-a^2.$$
- Если $-a^2<x<1$, то
$$y=x+a^2-x+1=1+a^2.$$
- Если $1\leqslant x$, то
$$y=x+a^2+x-1=2x-1+a^2.$$

ШКОЛКОВО

Построим эскиз графика этой функции:



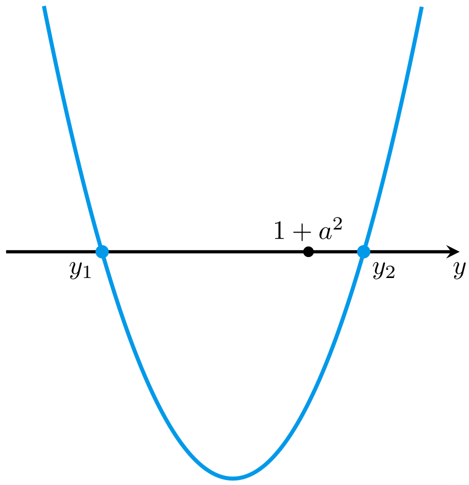
Таким образом,

- если $y>1+a^2$, то у уравнения $y=\left|x+a^2\right|+|x-1|$ ровно два решения;
- если $y=1+a^2$, то у уравнения $y=\left|x+a^2\right|+|x-1|$ бесконечно много решений;
- если $y<1+a^2$, то у уравнения $y=\left|x+a^2\right|+|x-1|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решений, либо не дает их вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 - 8y + a^2 - 17 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее $1 + a^2$, и никакое решение уравнения не было бы равно $1 + a^2$.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < 1 + a^2 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > 1 + a^2$.

Пусть $f(y) = y^2 - 8y + a^2 - 17$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение $1 + a^2$ расположено между ними, равносильно условию $f\left(1 + a^2\right) < 0:$

$$f\left(1+a^2\right) < 0$$

$$\left(1+a^2\right)^2 - 8\left(1+a^2\right) + a^2 - 17 < 0$$

$$a^4 + 2a^2 + 1 - 8 - 8a^2 + a^2 - 17 < 0$$

$$a^4 - 5a^2 - 24 < 0$$

$$\left(a^2+3\right)\left(a^2-8\right) < 0$$

$$\left(a - 2\sqrt{2}\right)\left(a + 2\sqrt{2}\right) < 0$$

Отсюда получаем $a \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение $y^2 - 8y - a^2 + 17 = 0$ имело один корень, необходимо потребовать $D = 0:$

$$64 - 4(a^2 - 17) = 0$$

$$-4a^2 + 64 + 4 \cdot 17 = 0$$

$$a^2 = \frac{4 \cdot 17 + 64}{4} = \frac{4 \cdot 33}{4} = 33 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{33}$$

$$y_0 = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4 < 1 + a^2 = 34$$

Тогда $a = \pm\sqrt{33}$ не подходят, так как при данных значениях параметра единственный корень уравнения будет менее $1 + a^2$.
Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right).$$

№18.20 #125968 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-2a-1|+|x-2a+1|)^2+a\,(|x-2a-1|+|x-2a+1|)+a^2-48=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left(-1-3\sqrt{5};-1+3\sqrt{5}\right)\cup\{-8\}$

Решение. Пусть

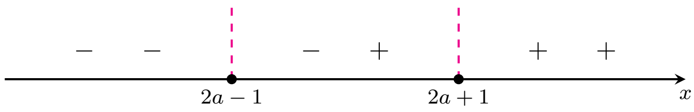
$$y=|x-2a-1|+|x-2a+1|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=|x-2a-1|+|x-2a+1|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-2a-1=0 & x-2a+1=0 \\ x=2a+1 & x=2a-1 \end{array}$$

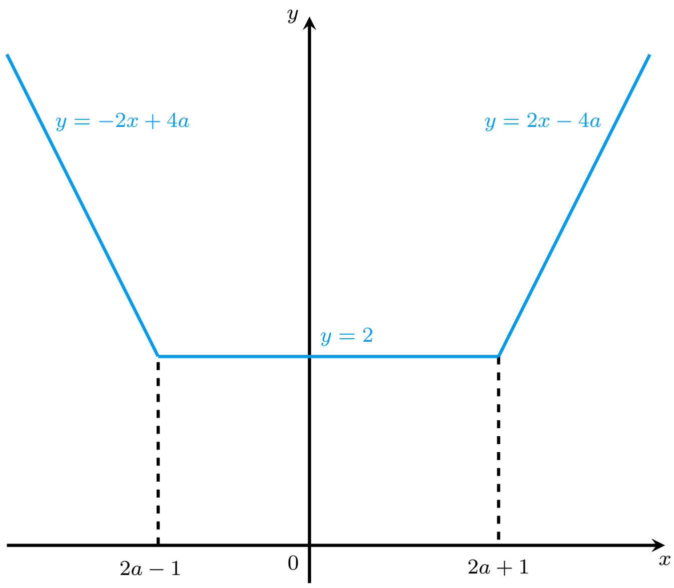
Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что $2a+1>2a-1$ при любом значении параметра a.

У выражения $|x-2a-1|+|x-2a+1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant 2a-1$, то
$$y=-x+2a+1-x+2a-1=-2x+4a.$$
- Если $2a-1<x<2a+1$, то
$$y=-x+2a+1+x-2a+1=2.$$
- Если $2a+1\leqslant x$, то
$$y=x-2a-1+x-2a+1=2x-4a.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

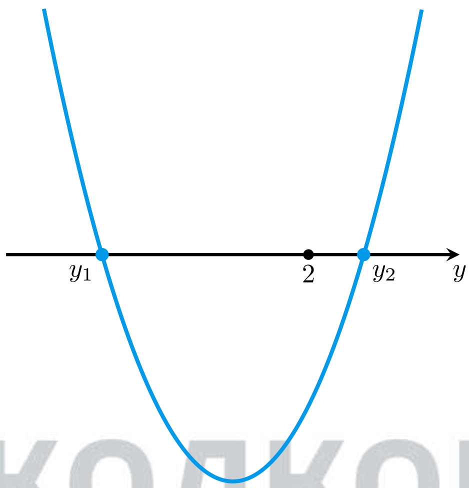
- если $y>2$, то у уравнения $y=|x-2a-1|+|x-2a+1|$ ровно два решения;
- если $y=2$, то у уравнения $y=|x-2a-1|+|x-2a+1|$ бесконечно много решений;

- если $y < 2$, то у уравнения $y = |x - 2a - 1| + |x - 2a + 1|$ нет решений.

По условию требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решений, либо не дает вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 + ay + a^2 - 48 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее 2, и при этом никакое решение не равнялось 2.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < 2 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > 2$.

Пусть $f(y) = y^2 + ay + a^2 - 48$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение 2 расположено между ними, равносильно условию $f(2) < 0:$

$$f(2) = 4 + 2a + a^2 - 48 = a^2 + 2a - 44 < 0$$
$$\left(a + 1 + 3\sqrt{5}\right)\left(a + 1 - 3\sqrt{5}\right) < 0$$

Отсюда получаем $a \in \left(-1 - 3\sqrt{5}; -1 + 3\sqrt{5}\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение имело один корень, необходимо потребовать $D = 0:$

$$a^2 - 4\left(a^2 - 48\right) = 0$$
$$3a^2 = 4 \cdot 48$$
$$a^2 = 64$$

$$\begin{array}{cc} a = 8 & a = -8 \\ y_0 = \dfrac{-8}{2} = -4 < 2 & y_0 = \dfrac{8}{2} = 4 > 2 \end{array}$$

Значит, $a = -8$ тоже подходит.
Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(-1 - 3\sqrt{5}; -1 + 3\sqrt{5}\right) \cup \{-8\}.$$

№18.21 #125960 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-2|+|x-a+2|)^2 - a\cdot(|x-a-2|+|x-a+2|)+a^2-48=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in(-4;8)$

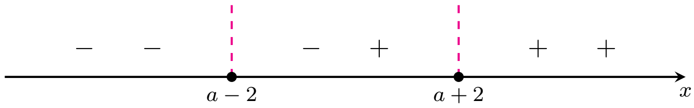
Решение. Пусть

$$y=|x-a-2|+|x-a+2|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=|x-a-2|+|x-a+2|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-a-2=0 & x-a+2=0 \\ x=a+2 & x=a-2 \end{array}$$

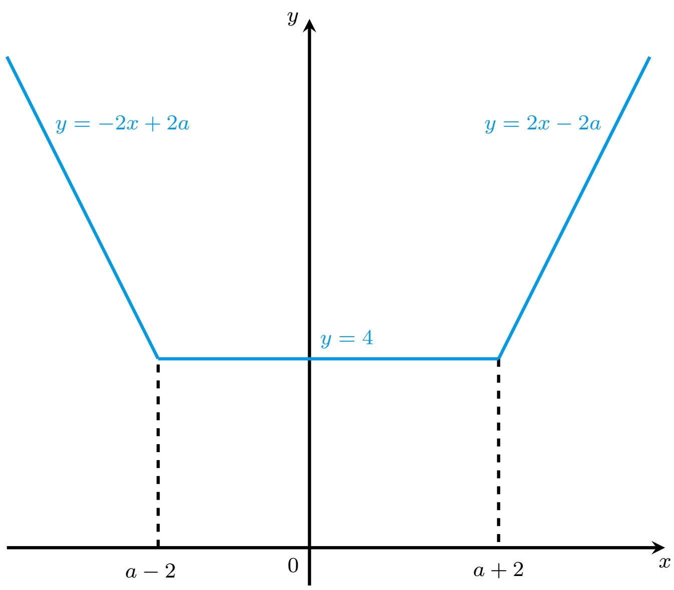
Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что при любом значении параметра a верно, что $a+2\geqslant a-2:$ У выражения $|x-a-2|+|x-a+2|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant a-2$, то
$$y=-x+a+2-x+a-2=-2x+2a.$$
- Если $a-2<x<a+2$, то
$$y=-x+a+2+x-a+2=4.$$
- Если $a+2\leqslant x$, то
$$y=x-a-2+x-a+2=2x-2a.$$

ШКОЛКОВО

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

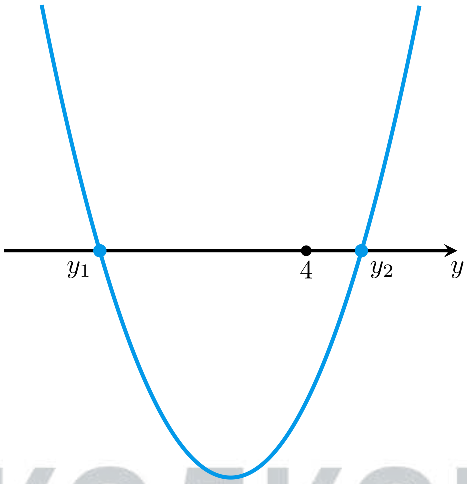
- если $y>4$, то у уравнения $y=|x-a-2|+|x-a+2|$ ровно два решения;
- если $y=4$, то у уравнения $y=|x-a-2|+|x-a+2|$ бесконечно много решений;

- если $y < 4$, то у уравнения $y = |x - a - 2| + |x - a + 2|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решения, либо не дает их вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 - ay + a^2 - 48 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее 4, и при этом никакое решение уравнения не было бы равно 4.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < 4 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > 4$.

Пусть $f(y) = y^2 - ay + a^2 - 48$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение 4 расположено между ними, равносильно условию $f(4) < 0$:

$$f(4) < 0$$
$$4^2 - 4a + a^2 - 48 < 0$$
$$16 - 4a + a^2 - 48 < 0$$
$$a^2 - 4a - 32 < 0$$
$$(a + 4)(a - 8) < 0$$

Отсюда получаем $a \in (-4; 8)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение имело один корень, необходимо потребовать $D = 0$:

$$a^2 - 4\left(a^2 - 48\right) = 0$$
$$-3a^2 + 4 \cdot 48 = 0$$
$$a^2 = \frac{4 \cdot 48}{3}$$
$$a^2 = 64$$
$$a = \pm 8$$
$$y_0 = \frac{a}{2}$$

- Если $a = 8$, то $y_0 = 4$, тогда условие $y_0 > 4$ не выполняется, $a = 8$ не подходит.
- Если $a = -8$, то $y_0 = -4$, тогда условие $y_0 > 4$ не выполняется, $a = -8$ не подходит.

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in (-4; 8).$$

№18.22 **#125956** (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-2|+|x-a+2|)^2 - a\cdot(|x-a-2|+|x-a+2|) + a^2 - 64 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a \in \left(2-2\sqrt{13}; 2+2\sqrt{13}\right) \cup \left\{\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\right\}$

Решение. Пусть

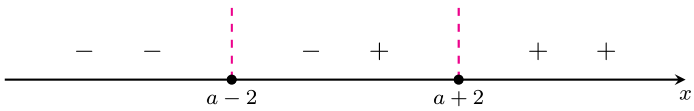
$$y = |x-a-2| + |x-a+2|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y = |x-a-2|+|x-a+2|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-a-2=0 & \qquad x-a+2=0 \\ x=a+2 & \qquad x=a-2 \end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что при любом значении параметра a верно $a-2 < a+2$.

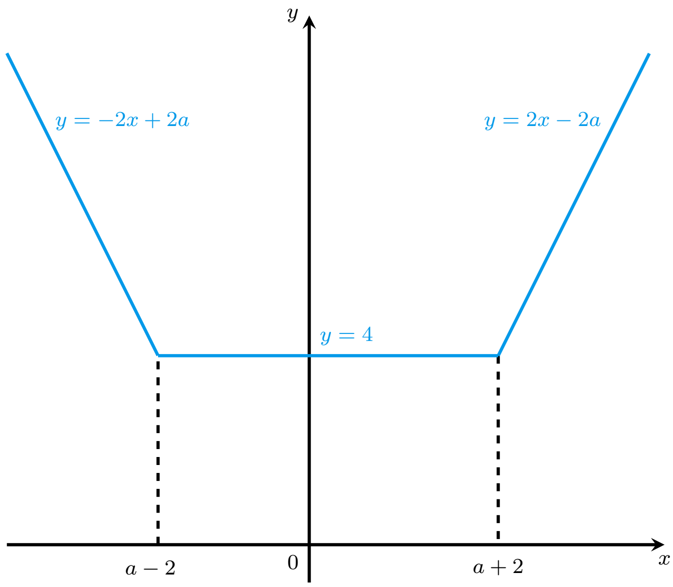
У выражения $|x-a-2|+|x-a+2|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x \leqslant a-2$, то
$$y = -x+a+2-x+a-2 = -2x+2a$$
- Если $a-2 < x < a+2$, то
$$y = -x+a+2+x-a+2 = 4.$$
- Если $a+2 \leqslant x$, то
$$y = x-a-2+x-a+2 = 2x-2a.$$

ШКОЛКОВО

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

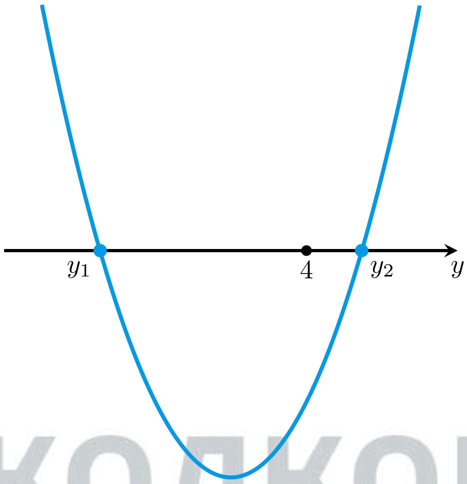
- если $y > 4$, то у уравнения $y = |x-a-2|+|x-a+2|$ ровно два решения;
- если $y = 4$, то у уравнения $y = |x-a-2|+|x-a+2|$ бесконечно много решений;

- если $y < 4$, то у уравнения $y = |x - a - 2| + |x - a + 2|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решения, либо не дает их вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 - ay + a^2 - 64 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее 4, и никакое решение уравнения не было бы равно 4.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < 4 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > 4$.

Пусть $f(y) = y^2 - ay + a^2 - 64$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение 4 расположено между ними, равносильно условию $f(4) < 0$:

$$f(4) < 0$$
$$4^2 - 4a + a^2 - 64 < 0$$
$$16 - 4a + a^2 - 64 < 0$$
$$a^2 - 4a - 48 < 0$$
$$\left(a - \left(2 - 2\sqrt{13}\right)\right)\left(a - \left(2 + 2\sqrt{13}\right)\right) < 0$$

Отсюда получаем $a \in \left(2 - 2\sqrt{13}; 2 + 2\sqrt{13}\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение имело один корень, необходимо потребовать $D = 0$:

$$a^2 - 4(a^2 - 64) = 0$$
$$-3a^2 + 4 \cdot 64 = 0$$
$$a^2 = \frac{4 \cdot 64}{3}$$
$$a = \pm\frac{16\sqrt{3}}{3}$$
$$y_0 = \frac{a}{2}$$

- Если $a = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$, тогда $y_0 = \dfrac{a}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} > 4$, так как:

$$\begin{gathered}\frac{8\sqrt{3}}{3} > 4\\ \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1\\ 2\sqrt{3} > 3\\ 4\cdot 3 > 9\\ 12 > 9\end{gathered}$$

  То есть $a = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ подходит.

- Если $a = -\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$, тогда $y_0 = \dfrac{a}{2} = -\dfrac{8\sqrt{3}}{3} < 4$, тогда $a = -\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ не подходит.

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(2 - 2\sqrt{13}; 2 + 2\sqrt{13}\right) \cup \left\{\frac{16\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

ШКОЛКОВО

№18.23 #125946 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-2|+|x-a+2|)^2-a(|x-a-2|+|x-a+2|)+a-64=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in(-16;+\infty)$

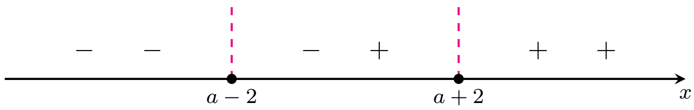
Решение. Пусть

$$y=|x-a-2|+|x-a+2|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=|x-a-2|+|x-a+2|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-a-2=0 & x-a+2=0\\ x=a+2 & x=a-2 \end{array}$$

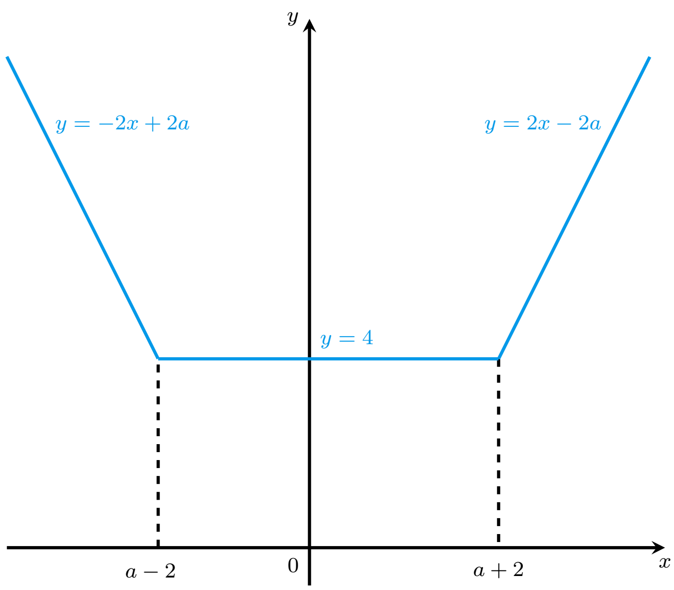
Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что при любом значении параметра a верно $a-2<a+2$.
У выражения $|x-a-2|+|x-a+2|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant a-2$, то
$$y=-x+a+2-x+a-2=-2x+2a$$
- Если $a-2<x<a+2$, то
$$y=-x+a+2+x-a+2=4.$$
- Если $a+2\leqslant x$, то
$$y=x-a-2+x-a+2=2x-2a.$$

ШКОЛКОВО

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

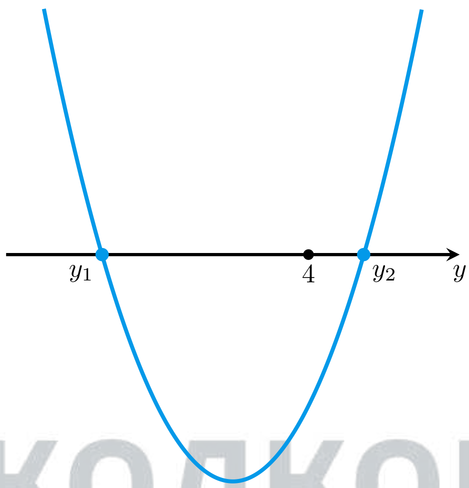
- если $y>4$, то у уравнения $y=|x-a-2|+|x-a+2|$ ровно два решения;
- если $y=4$, то у уравнения $y=|x-a-2|+|x-a+2|$ бесконечно много решений;

- если $y < 4$, то у уравнения $y = |x-a-2| + |x-a+2|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решения, либо не дает их вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 - ay + a - 64 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее 4, и никакое решение уравнения не было бы равно 4.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < 4 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > 4$.

Пусть $f(y) = y^2 - ay + a - 64$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение 4 расположено между ними, равносильно условию $f(4) < 0$:

$$\begin{gathered} f(4) < 0 \\ 4^2 - 4a + a - 64 < 0 \\ 16 - 3a - 64 < 0 \\ -48 < 3a \\ a > -16 \end{gathered}$$

Отсюда получаем $a \in (-16; +\infty)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение $y^2 - ay + a - 64 = 0$ имело один корень, необходимо потребовать $D = 0$. Найдем его дискриминант:

$$D = a^2 - 4(a-64) = a^2 - 4a + 256 = (a-2)^2 + 252 > 0.$$

Значит, полученное уравнение имеет два корня при любом значении a.
Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных корня при

$$a \in (-16; +\infty).$$

№18.24 #125942 (Центр, 27.05)

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-8|-|x-a|)^2-7a(|x-8|-|x-a|)+10a^2+6a-4=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

Решение. Сделаем замену

$$y=|x-8|-|x-a|.$$

Тогда уравнение примет вид

$$y^2-7ay+10a^2+6a-4=0$$
$$D=49a^2-40a^2-24a+16$$
$$D=9a^2-24a+16=(3a-4)^2$$
$$y_{1,2}=\frac{7a\pm\sqrt{(3a-4)^2}}{2}=\frac{7a\pm(3a-4)}{2}$$
$$y_1=5a-2,\qquad y_2=2a+2$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}|x-8|-|x-a|=5a-2\\|x-8|-|x-a|=2a+2\end{array}\right.$$

Исследуем функцию

$$y=|x-8|-|x-a|.$$

ШКОЛКОВО

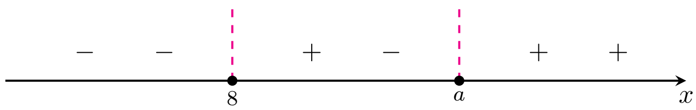
Чтобы раскрыть модули, необходимо понять, как располагаются на числовой оси значения 8 и a.

1. Рассмотрим сначала случай $a=8:$

$$\left[\begin{array}{l}0=5\cdot8-2\\0=2\cdot8+2\end{array}\right.$$

Как видим, при $a=8$ ни одно из уравнений совокупности не имеет решений, то есть $a=8$ нам не подходит.

2. При $a>8$ модули раскрываются следующим образом:



- Если $x\leqslant 8$, то

$$y=-x+8+x-a=8-a.$$

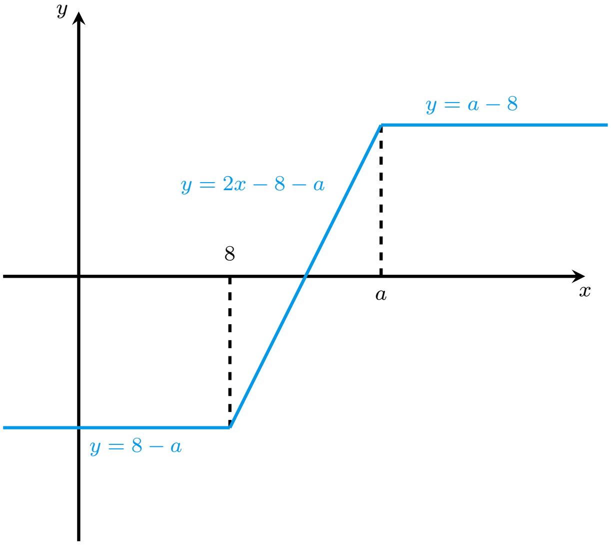
- Если $8<x<a$, то

$$y=x-8+x-a=2x-8-a.$$

- Если $a\leqslant x$, то

$$y=x-8-x+a=a-8.$$

Нарисуем эскиз графика этой функции. Обратим внимание, что $a>8$, то есть $8-a<0$, $a-8>0$.



Таким образом, в данном случае имеем:

- если $8 - a < y < a - 8$, то у уравнения $y = |x - 8| - |x - a|$ ровно одно решение;
- если $y = 8 - a$ или $y = a - 8$, то у уравнения $y = |x - 8| - |x - a|$ бесконечно много решений;
- если $y < 8 - a$ или $y > a - 8$, то у уравнения $y = |x - 8| - |x - a|$ нет решений.

Тогда полученная совокупность будет иметь ровно два решения только в случае, когда оба уравнения совокупности дают по одному решению.

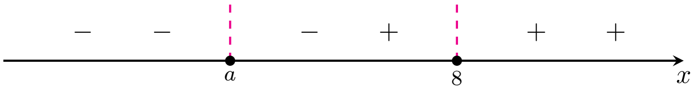
Отсюда получаем систему:

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}8 - a < 5a - 2\\ 5a - 2 < a - 8\end{cases}\\ \begin{cases}8 - a < 2a + 2\\ 2a + 2 < a - 8\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}6a > 10\\ 4a < -6\\ 3a > 6\\ a < -10\end{cases}$$

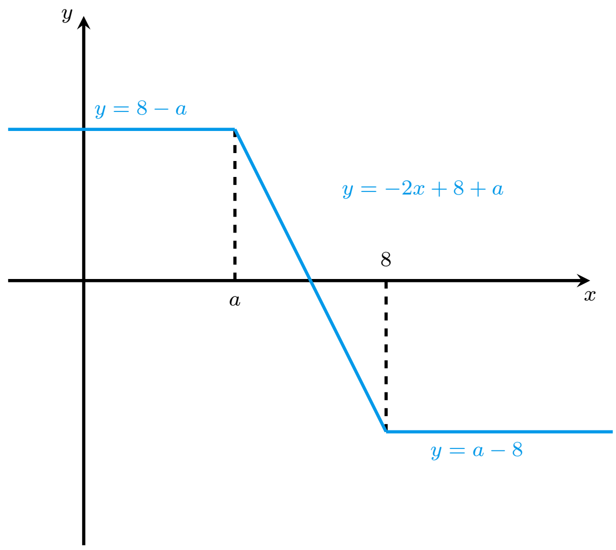
$$a \in \varnothing$$

3. При $a < 8$ модули раскрываются следующим образом:



- Если $x \leqslant a$, то
$$y = -x + 8 + x - a = 8 - a.$$
- Если $a < x < 8$, то
$$y = -x + 8 - x + a = -2x + 8 + a.$$
- Если $8 \leqslant x$, то
$$y = x - 8 - x + a = a - 8.$$

Нарисуем эскиз графика этой функции. Обратим внимание, что $a < 8$, то есть $8 - a > 0$, $a - 8 < 0$.



Таким образом, в данном случае имеем:

- если $a-8<y<8-a$, то у уравнения $y=|x-8|-|x-a|$ ровно одно решение;
- если $y=8-a$ или $y=a-8$, то у уравнения $y=|x-8|-|x-a|$ бесконечно много решений;
- если $y<a-8$ или $y>8-a$, то у уравнения $y=|x-8|-|x-a|$ нет решений.

Тогда полученная совокупность будет иметь ровно два решения только в случае, когда оба уравнения совокупности дают по одному решению.

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases}\begin{cases}a-8<5a-2\\5a-2<8-a\end{cases}\\\begin{cases}a-8<2a+2\\2a+2<8-a\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}4a>-6\\6a<10\\a>-10\\3a<6\end{cases}$$

$$a\in\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right)$$

Полученный промежуток полностью удовлетворяет условию $a<8$, поэтому получаем из данного случая

$$a\in\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right).$$

Проверим теперь случай совпадения корней:

$$5a-2=2a+2$$
$$3a=4$$
$$a=\frac{4}{3}$$

То есть при $a=\dfrac{4}{3}$ решения совпадут и этот случай нам не подходит.
Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a\in\left(-\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right).$$

№18.25 #126231 (Центр, 26.05)

При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt[4]{a^4+x^4}=\cos\frac{x}{2}+a^2-2a+1$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a\in\{1;2\}$

Решение. Заметим, что так как x^4 и $\cos\frac{x}{2}$ — четные функции, то если уравнение будет иметь корень x_0, оно также будет иметь и корень $-x_0$.

Таким образом, если $x_0\neq 0$, то уравнение уже будет иметь как минимум два корня. Следовательно, $x_0=0$. Тогда имеем:

$$\begin{gathered}\sqrt[4]{a^4}=\cos 0+a^2-2a+1\\ |a|=a^2-2a+2\end{gathered}$$

Раскроем модуль по определению.

1. При $a\geqslant 0$ получаем:

$$\begin{gathered}a=a^2-2a+2\\ a^2-3a+2=0\\ (a-1)(a-2)=0\\ a_1=1;\quad a_2=2\end{gathered}$$

2. При $a<0$ получаем:

$$\begin{gathered}-a=a^2-2a+2\\ a^2-a+2=0\\ D=1-8<0\\ a\in\varnothing\end{gathered}$$

ШКОЛКОВО

Мы получили два значения параметра a. Заметим, что мы использовали то, что $x=0$ точно является корнем исходного уравнения. Но мы нигде не использовали то, что он единственный. Следовательно, нужно подставить получившиеся значения параметра a в исходное уравнение и проверить, при каких именно a корень $x=0$ действительно будет единственным.

1. При $a=1$ получаем:

$$\sqrt[4]{1+x^4}=\cos\frac{x}{2}$$

   Так как $x^4\geqslant 0$, то $\sqrt[4]{1+x^4}\geqslant 1$. При этом $\cos\frac{x}{2}\leqslant 1$. Следовательно, равенство может выполняться только в случае, если обе его части равны 1:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{1+x^4}=1\\ \cos\frac{x}{2}=1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ \cos\frac{x}{2}=1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ 1=1\end{cases}$$

   Таким образом, при $a=1$ уравнение действительно имеет один корень $x=0$.

2. При $a=2$ получаем:

$$\sqrt[4]{16+x^4}=\cos\frac{x}{2}+1$$

   Так как $x^4\geqslant 0$, то $\sqrt[4]{16+x^4}\geqslant\sqrt[4]{16}=2$. При этом $\cos\frac{x}{2}+1\leqslant 2$. Следовательно, равенство может выполняться только в случае, если обе его части равны 2:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{16+x^4}=2\\ \cos\frac{x}{2}+1=2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ \cos\frac{x}{2}=1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ 1=1\end{cases}$$

   Таким образом, при $a=2$ уравнение также имеет один корень $x=0$.

№18.26 #2645 (Центр, 26.05)

При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2 + a\operatorname{tg}(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a \in \{-\operatorname{tg} 1; 0\}$

Решение. Заметим, что так как x^2 и $\cos x$ — четные функции, то если уравнение будет иметь корень x_0, оно также будет иметь и корень $-x_0$.
Действительно, пусть x_0 — корень, то есть равенство $2x_0^2 + a\operatorname{tg}(\cos x_0) + a^2 = 0$ верно. Подставим $-x_0$:

$$2(-x_0)^2 + a\operatorname{tg}(\cos(-x_0)) + a^2 = 2x_0^2 + a\operatorname{tg}(\cos x_0) + a^2 = 0$$

Таким образом, если $x_0 \neq 0$, то уравнение уже будет иметь как минимум два корня. Следовательно, $x_0 = 0$. Тогда имеем:

$$2\cdot 0 + a\operatorname{tg}(\cos 0) + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 + a\operatorname{tg} 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &a = 0\\ &a = -\operatorname{tg} 1\end{aligned}\right.$$

Мы получили два значения параметра a. Заметим, что мы использовали то, что $x = 0$ точно является корнем исходного уравнения. Но мы нигде не использовали то, что он единственный. Следовательно, нужно подставить получившиеся значения параметра a в исходное уравнение и проверить, при каких именно a корень $x = 0$ действительно будет единственным.
1) Если $a = 0$, то уравнение примет вид $2x^2 = 0$. Очевидно, что это уравнение имеет лишь один корень $x = 0$. Следовательно, значение $a = 0$ нам подходит.
2) Если $a = -\operatorname{tg} 1$, то уравнение примет вид

$$2x^2 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x) + \operatorname{tg}^2 1 = 0$$

Перепишем уравнение в виде

$$2x^2 + \operatorname{tg}^2 1 = \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x) \qquad (*)$$

Так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то

$$-\operatorname{tg} 1 \leqslant \operatorname{tg}(\cos x) \leqslant \operatorname{tg} 1$$

Следовательно, значения правой части уравнения (*) принадлежат отрезку $[-\operatorname{tg}^2 1; \operatorname{tg}^2 1]$.
Так как $x^2 \geqslant 0$, то левая часть уравнения (*) больше или равна $0 + \operatorname{tg}^2 1$.
Таким образом, равенство (*) может выполняться только тогда, когда обе части уравнения равны $\operatorname{tg}^2 1$. Это значит, что

$$\begin{cases} 2x^2 + \operatorname{tg}^2 1 = \operatorname{tg}^2 1\\ \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x) = \operatorname{tg}^2 1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0\\ \operatorname{tg}(\cos x) = \operatorname{tg} 1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Следовательно, значение $a = -\operatorname{tg} 1$ нам подходит.

№18.27 #126321 (Центр, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-1|+|x-a+1|)^2+a(|x-a-1|+|x-a+1|)+a^2-16=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left\{-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right\}\cup\left(-\sqrt{13}-1;\sqrt{13}-1\right)$

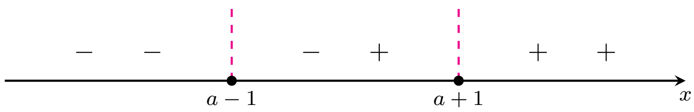
Решение. Пусть

$$y=|x-a-1|+|x-a+1|.$$

Исследуем замену, то есть функцию $y=|x-a-1|+|x-a+1|$. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

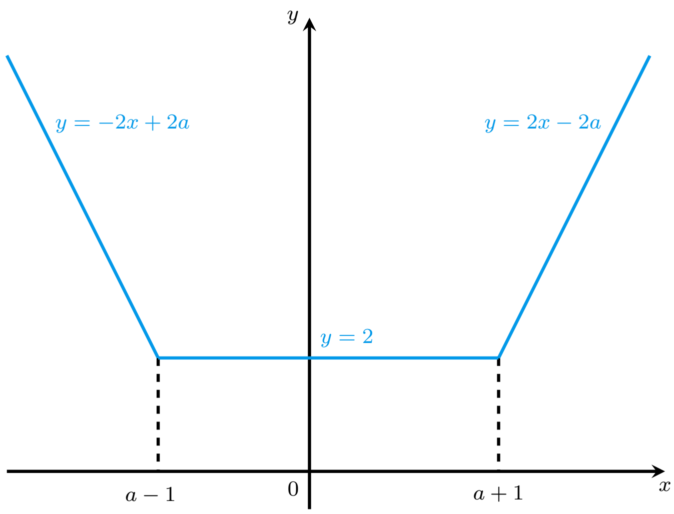
$$\begin{array}{cc} x-a-1=0 & x-a+1=0 \\ x=a+1 & x=a-1 \end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a. Заметим, что при любом значении параметра a верно, что $a+1\geqslant a-1$: У выражения $|x-a-1|+|x-a+1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:



- Если $x\leqslant a-1$, то
$$y=-x+a+1-x+a-1=-2x+2a.$$
- Если $a-1<x<a+1$, то
$$y=-x+a+1+x-a+1=2.$$
- Если $a+1\leqslant x$, то
$$y=x-a-1+x-a+1=2x-2a.$$

Построим эскиз графика этой функции:



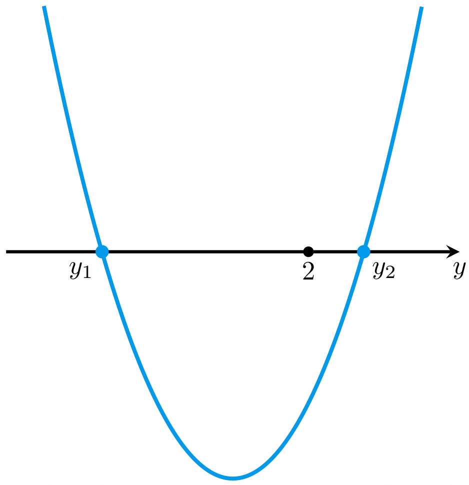
Таким образом,

- если $y>2$, то у уравнения $y=|x-a-1|+|x-a+1|$ ровно два решения;
- если $y=2$, то у уравнения $y=|x-a-1|+|x-a+1|$ бесконечно много решений;
- если $y<2$, то у уравнения $y=|x-a-1|+|x-a+1|$ нет решений.

По условию от исходного уравнения требуется ровно два решения. Так как замена либо дает два и более решений, либо не дает их вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее 2, и при этом никакое решение уравнения не было бы равно 2.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < 2 < y_2$;
- уравнение имеет один корень $y_0 > 2$.

Пусть $f(y) = y^2 + ay + a^2 - 16$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение 2 расположено между ними, равносильно условию $f\left(2\right) < 0:$

$$
\begin{gathered}
f\left(2\right) < 0 \\
2^2 + 2a + a^2 - 16 < 0 \\
4 + 2a + a^2 - 16 < 0 \\
a^2 + 2a - 12 < 0 \\
a^2 + 2a + 1 - 13 < 0 \\
(a+1)^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2 < 0 \\
\left(a + 1 - \sqrt{13}\right)\left(a + 1 + \sqrt{13}\right) < 0
\end{gathered}
$$

Отсюда получаем $a \in \left(-\sqrt{13} - 1; \sqrt{13} - 1\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.
Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$ имело один корень, необходимо потребовать $D = 0:$

$$
\begin{gathered}
a^2 - 4\left(a^2 - 16\right) = 0 \\
-3a^2 + 4 \cdot 16 = 0 \\
a^2 = \frac{4 \cdot 16}{3} \\
a = \pm\frac{8\sqrt{3}}{3} \\
y_0 = -\frac{a}{2}
\end{gathered}
$$

- Если $a = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, то $y_0 = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, тогда условие $y_0 > 2$ не выполняется.

  Значит, $a = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ не подходит.

- Если $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$, то $y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, тогда условие $y_0 > 2$ выполняется:

$$y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} > \frac{4}{\sqrt{4}} = 2.$$

  Значит, $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$ подходит.

Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left\{-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right\} \cup \left(-\sqrt{13} - 1; \sqrt{13} - 1\right).$$

ШКОЛКОВО

№18.28 #127069 (Сибирь, 27.05)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(3x+|x-a|+|2x+a+1|)^2+a\,(3x+|x-a|+|2x+a+1|)+a^2-16=0$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a\in\left(\dfrac{1-\sqrt{61}}{2};\dfrac{1+\sqrt{61}}{2}\right)\cup\left\{-\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right\}$

Решение. Пусть

$$y=3x+|x-a|+|2x+a+1|.$$

Исследуем полученную функцию. Для этого найдем нули подмодульных выражений:

$$\begin{array}{cc} x-a=0 & 2x+a+1=0\\ x=a & 2x=-a-1\\ & x=\dfrac{-a-1}{2}\end{array}$$

Раскроем модули. Для этого поймем, как располагаются на числовой оси нули подмодульных выражений в зависимости от значений параметра a :

$$a\leqslant\frac{-a-1}{2}$$

$$2a\leqslant -a-1$$

$$3a\leqslant -1$$

$$a\leqslant -\frac{1}{3}$$

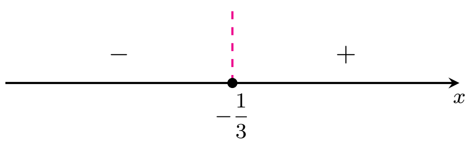
ШКОЛКОВО

Рассмотрим три случая: $a=-\dfrac{1}{3}$, $a>-\dfrac{1}{3}$ и $a<-\dfrac{1}{3}$.

- При $a=-\dfrac{1}{3}$ получаем, что $a=\dfrac{-a-1}{2}$. Тогда имеем

$$y=3x+\left|x+\frac{1}{3}\right|+\left|2x+\frac{2}{3}\right|=3x+3\left|x+\frac{1}{3}\right|.$$

  Раскроем модуль:



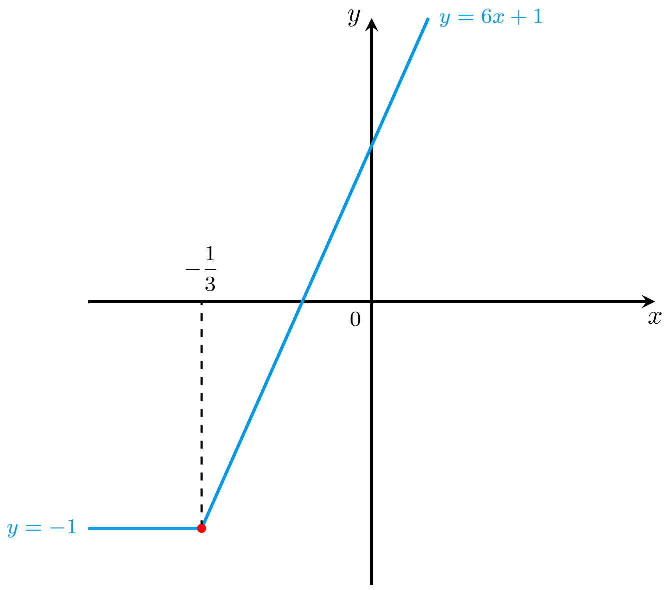
  – Если $x\geqslant -\dfrac{1}{3}$, то получаем

$$y=3x+3x+1=6x+1.$$

  – Если $x<-\dfrac{1}{3}$, то получаем

$$y=3x-3x-1=-1.$$

  Построим эскиз графика этой функции при $a=-\dfrac{1}{3}$:



Таким образом,

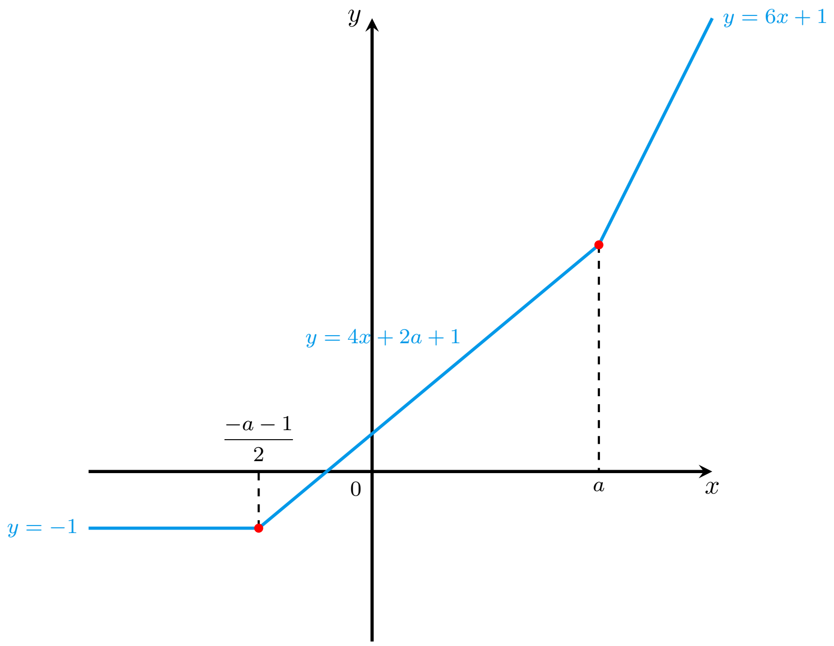
- если $y < -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ нет решений;
- если $y = -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ бесконечно много решений;
- если $y > -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ ровно одно решение.

- При $a > -\frac{1}{3}$ получаем, что $\frac{-a-1}{2} < a$. Тогда у выражения $3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:

ШКОЛКОВО

- Если $x \leqslant \frac{-a-1}{2}$, то
$$y = 3x - x + a - 2x - a - 1 = -1.$$
- Если $\frac{-a-1}{2} < x < a$, то
$$y = 3x - x + a + 2x + a + 1 = 4x + 2a + 1.$$
- Если $a \leqslant x$, то
$$y = 3x + x - a + 2x + a + 1 = 6x + 1.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

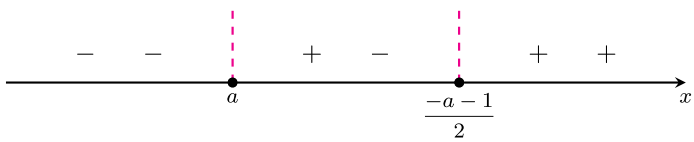
– если $y < -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ нет решений;

– если $y = -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ бесконечно много решений;

– если $y > -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ ровно одно решение.

ШКОЛКОВО

• при $a < -\dfrac{1}{3}$ получаем, что $a < \dfrac{-a-1}{2}$. Тогда у выражения $3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ есть три возможных случая раскрытия модулей:

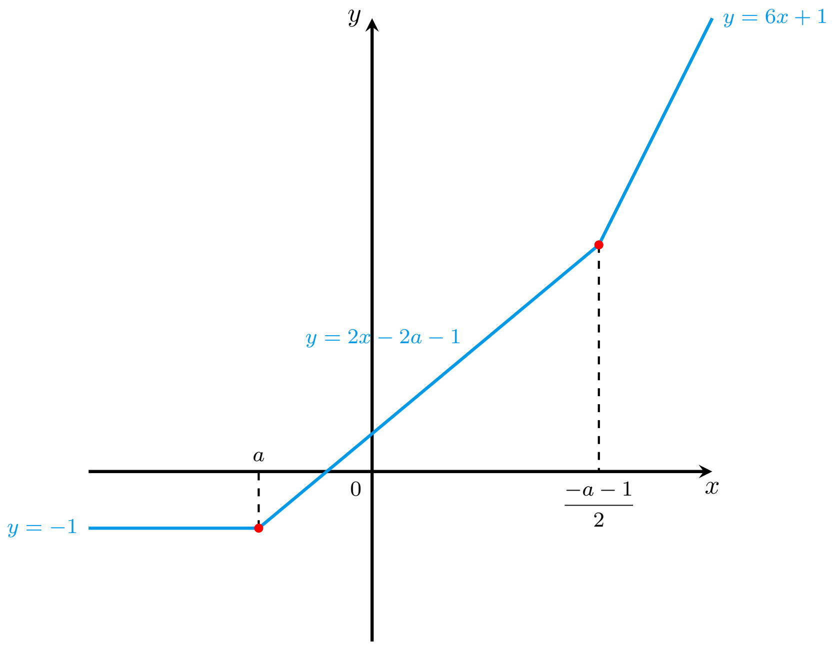


– Если $x \leqslant a$, то
$$y = 3x - x + a - 2x - a - 1 = -1.$$

– Если $a < x < \dfrac{-a-1}{2}$, то
$$y = 3x + x - a - 2x - a - 1 = 2x - 2a - 1.$$

– Если $\dfrac{-a-1}{2} \leqslant x$, то
$$y = 3x + x - a + 2x + a + 1 = 6x + 1.$$

Построим эскиз графика этой функции:



Таким образом,

– если $y < -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ нет решений;

– если $y = -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ бесконечно много решений;

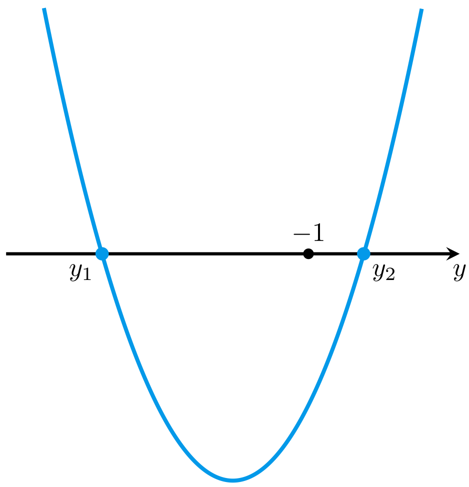
– если $y > -1$, то у уравнения $y = 3x + |x - a| + |2x + a + 1|$ ровно одно решение.

По условию от исходного уравнения требуется ровно одно решение. Так как замена либо дает одно и более решений, либо не дает вовсе, то необходимо, чтобы уравнение $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$, которое мы получили после замены, имело ровно одно решение, большее -1, и при этом никакое решение не равнялось -1.
Тогда от уравнения нужно потребовать одно из следующих условий:

- уравнение имеет два корня y_1 и y_2 такие, что $y_1 < -1 < y_2$;

- уравнение имеет ровно один корень $y_0 > -1$.

Пусть $f(y) = y^2 + ay + a^2 - 16$.
Рассмотрим первый случай. Так как коэффициент перед y^2 положителен, то функция f задает параболу с ветвями вверх.



Тогда то, что уравнение имеет два корня, а значение -1 расположено между ними, равносильно условию $f(-1) < 0$:

$$f(-1) = (-1)^2 + a(-1) + a^2 - 16 < 0$$
$$1 - a + a^2 - 16 < 0$$
$$a^2 - a - 15 < 0$$
$$\left(a - \frac{1-\sqrt{61}}{2}\right)\left(a - \frac{1+\sqrt{61}}{2}\right) < 0$$

Отсюда получаем $a \in \left(\frac{1-\sqrt{61}}{2}; \frac{1+\sqrt{61}}{2}\right)$, при этом условие $D > 0$ заведомо выполнено.

Рассмотрим второй случай. Чтобы уравнение имело ровно один корень, необходимо потребовать $D = 0$:

$$a^2 - 4\left(a^2 - 16\right) = 0$$
$$3a^2 = 64$$
$$a^2 = \frac{64}{3}$$
$$a = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$$

При $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$ имеем:

$$y_0 = \frac{-\frac{8}{\sqrt{3}}}{2} = -\frac{4}{\sqrt{3}} < -1$$

Значит, $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$ не подходит.

При $a = -\frac{8}{\sqrt{3}}$ имеем:

$$y_0 = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} > -1$$

Значит, $a = -\frac{8}{\sqrt{3}}$ подходит.

Тогда исходное уравнение имеет ровно одно решение при

$$a \in \left(\frac{1-\sqrt{61}}{2}; \frac{1+\sqrt{61}}{2}\right) \cup \left\{-\frac{8}{\sqrt{3}}\right\}.$$

ШКОЛКОВО

Задачи №19. Решения

№19.1 #125976 (Дальний восток, 27.05)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: а) Да, могло

б) Нет, не могло

в) 139

Решение. а) Приведем пример. Пусть записаны числа от 23 до 92 включительно. Среди них 4 числа, кратных 23: это 23, 46, 69, 92. При этом кратных 20 чисел ровно 3: 40, 60, 80. Данный набор соответствует условию.

б) Предположим, что среди чисел действительно нашлось 10, кратных 20. Тогда кратных 23 чисел среди них не менее 11. Тогда всего чисел не менее чем $23 \cdot 10 + 1 = 231$, поскольку среди 23 подряд идущих чисел ровно одно число может быть кратно 23.

Тогда наименьшее значение k, при котором возможно наличие 11 чисел, кратных 23, достижимо, только если имеется 10 полных отрезков по 23 числа и одно число, кратное 23.

Но среди 231 подряд идущих чисел не менее $\dfrac{231-19}{20} = 10{,}6 > 10$ чисел, кратных 20. Разберемся, откуда взялась оценка на $\dfrac{231-19}{20}$. Разобьем числа, начиная с самого первого, на блоки по 20 чисел. В каждом таком блоке ровно одно число, кратное 20. Тогда таких полных блоков не менее 11 и вне блоков может остаться не более 19 чисел.

Примечание для лучшего понимания оценки.

Пронумеруем числа a_1, a_2, a_3..., a_k. Выделим блоки $a_1 - a_{20}$, $a_{21} - a_{40}$ и так далее. Поймем, что в каждом таком блоке ровно одно число, кратное 20, так как среди подряд идущих 20 чисел однозначно встречается ровно 1 число, кратное 20. Тогда попробуем понять, сколько чисел останется в конце, когда мы поделим все на блоки.

На самом деле, в конце не может остаться более 19 чисел, так как иначе мы сможем добавить еще один блок размера 20. Тогда получается, что блоков будет $\dfrac{k-a}{20}$, где $a \leqslant 19$. Тогда чисел, кратных 20, будет не менее чем $\dfrac{k-19}{20}$. Здесь мы подставили нашу оценку на 231 число вместо k и получили $\dfrac{231-19}{20}$.

в) Пусть чисел, кратных 20, a штук. Тогда аналогично предыдущему пункту чисел, кратных 23, не менее чем $a+1$, а $k \geqslant 23 \cdot a + 1$. Причем чисел, кратных 20, не менее

$$\frac{23 \cdot a + 1 - 19}{20} = \frac{23 \cdot a - 18}{20}.$$

Тогда имеем неравенство

$$\begin{aligned} &a \geqslant \frac{23a-18}{20} \\ &20a \geqslant 23a - 18 \\ &18 \geqslant 3a \\ &a \leqslant 6. \end{aligned}$$

Тогда чисел, кратных 20, не более 6 штук. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям пункта б), получаем, что

$$k \leqslant 20 \cdot a + 19 \leqslant 20 \cdot 6 + 19 = 139.$$

Приведем пример. Пусть последовательность начинается с числа 161 и заканчивается числом 299. Чисел в последовательности ровно

$$299 - 161 + 1 = 139.$$

Числа, кратные 23 — это числа вида $23 \cdot n$, где n лежит в промежутке от 7 до 13 (числам 7 и 13 соответствуют «граничные» числа 161 и 299). Этих чисел ровно

$$13 - 7 + 1 = 7.$$

При этом числа, кратные 20, — это числа 180, 200, …, 280. Они имеют вид $20 \cdot m$, где m лежит в промежутке от 9 то 14. Этих чисел ровно

$$14 - 9 + 1 = 6.$$

Условие выполняется. Тогда максимально возможное значение k равняется 139.

ШКОЛКОВО

№19.2 #125977 (Дальний восток, 27.05)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 25, меньше, чем чисел, делящихся на 29.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 25?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 25?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: а) Да, могло

б) Нет, не могло

в) 149

Решение. а) Приведем пример. Пусть записаны числа от 29 до 116 включительно. Среди них 4 числа, кратных 29: это 29, 58, 87, 116. При этом кратных 25 чисел ровно 3: 50, 75, 100. Данный набор соответствует условию.

б) Предположим, что среди чисел действительно нашлось 10, кратных 25. Тогда кратных 29 чисел среди них не менее 11. Тогда всего чисел не менее чем $29 \cdot 10 + 1 = 291$, поскольку среди 29 подряд идущих чисел ровно одно число может быть кратно 29.

Тогда наименьшее значение k, при котором возможно наличие 11 чисел, кратных 29, достижимо, только если имеется 10 полных отрезков по 29 чисел и одно число, кратное 29.

Но среди 291 подряд идущих чисел не менее $\dfrac{291-24}{25} = 10{,}68 > 10$ чисел, кратных 25. Разберемся, откуда взялась оценка на $\dfrac{291-24}{25}$. Разобьем числа, начиная с самого первого, на блоки по 25 чисел. В каждом таком блоке ровно одно число, кратное 25. Тогда таких полных блоков не менее 11 и вне блоков может остаться не более 24 чисел.

Примечание для лучшего понимания оценки.

Пронумеруем числа a_1, a_2, a_3..., a_k. Выделим блоки $a_1 - a_{25}$, $a_{26} - a_{50}$ и так далее. Поймем, что в каждом таком блоке ровно одно число, кратное 25, так как среди подряд идущих 25 чисел однозначно встречается ровно 1 число, кратное 25. Тогда попробуем понять, сколько чисел останется в конце, когда мы поделим все на блоки.

На самом деле, в конце не может остаться более 24 чисел, так как иначе мы сможем добавить еще один блок размера 25. Тогда получается, что блоков будет $\dfrac{k-a}{25}$, где $a \leqslant 24$. Тогда чисел, кратных 25, будет не менее чем $\dfrac{k-24}{25}$. Здесь мы подставили нашу оценку на 291 число вместо k и получили $\dfrac{291-24}{25}$.

в) Пусть чисел, кратных 25, a штук. Тогда аналогично предыдущему пункту чисел, кратных 29, не менее чем $a+1$, а $k \geqslant 29 \cdot a + 1$. Причем чисел, кратных 25, не менее

$$\frac{29 \cdot a + 1 - 24}{25} = \frac{29 \cdot a - 23}{25}.$$

Тогда имеем неравенство

$$\begin{aligned} &a \geqslant \frac{29a-23}{25} \\ &25a \geqslant 29a - 23 \\ &23 \geqslant 4a \\ &a \leqslant 5. \end{aligned}$$

Тогда чисел, кратных 25, не более 5 штук. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям пункта б), получаем, что

$$k \leqslant 25 \cdot a + 24 \leqslant 25 \cdot 5 + 24 = 149.$$

Приведем пример. Пусть последовательность начинается с числа 551 и заканчивается числом 699. Чисел в последовательности ровно

$$699 - 551 + 1 = 149.$$

Числа, кратные 29 — это числа вида $29 \cdot n$, где n лежит в промежутке от 19 до 24 (числам 19 и 24 соответствуют числа 551 и 696). Этих чисел ровно

$$24 - 19 + 1 = 6.$$

При этом числа, кратные 25, — это числа 575, 600, …, 675. Они имеют вид $25 \cdot m$, где m лежит в промежутке от 23 то 27. Этих чисел ровно

$$27 - 23 + 1 = 5.$$

Условие выполняется. Тогда максимально возможное значение k равняется 149.

ШКОЛКОВО

№19.3 #126260 (Дальний восток, 27.05)
На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 15, меньше, чем чисел, делящихся на 17.
а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 15?
б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 15?
в) Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: а) Да, могло
б) Нет, не могло
в) 104

Решение. а) Приведем пример. Пусть записаны числа от 17 до 68 включительно. Среди них 4 числа, кратных 17: это 17, 34, 51, 68. При этом кратных 15 чисел ровно 3: 30, 45, 60. Данный набор соответствует условию.
б) Предположим, что среди чисел действительно нашлось 10, кратных 15. Тогда кратных 17 чисел среди них не менее 11. Тогда всего чисел не менее чем $17 \cdot 10 + 1 = 171$, поскольку среди 17 подряд идущих чисел ровно одно число может быть кратно 17.
Тогда наименьшее значение k, при котором возможно наличие 11 чисел, кратных 17, достижимо, только если имеется 10 полных отрезков по 17 чисел и одно число, кратное 17.
Но среди 171 подряд идущих чисел не менее $\dfrac{171-14}{15} = 10\dfrac{7}{15} > 10$ чисел, кратных 15. Разберемся, откуда взялась оценка на $\dfrac{171-14}{15}$. Разобьем числа, начиная с самого первого, на блоки по 15 чисел. В каждом таком блоке ровно одно число, кратное 15. Тогда таких полных блоков не менее 11 и вне блоков может остаться не более 14 чисел.
Примечание для лучшего понимания оценки.
Пронумеруем числа a_1, a_2, a_3..., a_k. Выделим блоки $a_1 - a_{15}$, $a_{16} - a_{30}$ и так далее. Поймем, что в каждом таком блоке ровно одно число, кратное 15, так как среди подряд идущих 15 чисел однозначно встречается ровно 1 число, кратное 15. Тогда попробуем понять, сколько чисел останется в конце, когда мы поделим все на блоки.
На самом деле, в конце не может остаться более 14 чисел, так как иначе мы сможем добавить еще один блок размера 15. Тогда получается, что блоков будет $\dfrac{k-a}{15}$, где $a \leqslant 14$. Тогда чисел, кратных 15, будет не менее чем $\dfrac{k-14}{15}$. Здесь мы подставили нашу оценку на 171 число вместо k и получили $\dfrac{171-14}{15}$.
в) Пусть чисел, кратных 15, a штук. Тогда аналогично предыдущему пункту чисел, кратных 17, не менее чем $a+1$, а $k \geqslant 17 \cdot a + 1$. Причем чисел, кратных 15, не менее

$$\frac{17 \cdot a + 1 - 14}{15} = \frac{17a - 13}{15}.$$

Тогда имеем неравенство

$$\begin{aligned}
&a \geqslant \frac{17a-13}{15}\\
&15a \geqslant 17a - 13\\
&13 \geqslant 2a\\
&a \leqslant \frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad a \leqslant 6.
\end{aligned}$$

Тогда чисел, кратных 15, не более 6 штук. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям пункта б), получаем, что

$$k \leqslant 15 \cdot a + 14 \leqslant 15 \cdot 6 + 14 = 104.$$

Приведем пример. Пусть последовательность начинается с числа 16 и заканчивается числом 119. Чисел в последовательности ровно

$$119 - 16 + 1 = 104.$$

Числа, кратные 17 — это числа вида $17 \cdot n$, где n лежит в промежутке от 1 до 7. Этих чисел ровно

$$7 - 1 + 1 = 7.$$

При этом числа, кратные 15, — это числа 30, 45, …, 105. Они имеют вид $15 \cdot m$, где m лежит в промежутке от 2 то

7. Этих чисел ровно
$$7 - 2 + 1 = 6.$$
Условие выполняется. Тогда максимально возможное значение k равняется 104.

ШКОЛКОВО

№19.4 #125979 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырех или семи чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 563 и 1417?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 563?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

Ответ: а) Нет, не могут

б) Нет, не может

в) 13

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.

А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e)=a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.

Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 7.

а) Заметим, что числа 563 и 1417 дают разные остатки при делении на 4. Первое число дает остаток 3, второе — остаток 1. Получили противоречие с доказанным выше фактом.

б) Если на доске есть число 563, то все числа на доске дают остаток 3 при делении на 4. Рассмотрим все возможные остатки квадратов чисел при делении на 4.

1. Если число, дающее остаток 0 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком 0 при делении на 4.
2. Если число, дающее остаток 1 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $1^2=1$ при делении на 4.
3. Если число, дающее остаток 2 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $2^2=4\equiv 0$ при делении на 4.
4. Если число, дающее остаток 3 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $3^2=9\equiv 1$ при делении на 4.

Как видим, ни один квадрат натурального числа не может давать остаток 3 при делении на 4. То есть выполнение данного условия невозможно.

в) Если на доске одновременно записаны числа 1 и n^2, то n^2 дает остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 7. Причем $n^2\neq 1$, так как 1 уже записано на доске. Будем идти по квадратам нечетных чисел, так как квадраты четных чисел не дают остаток 1 при делении на 4. Заполним таблицу: слева будем писать число, справа — остаток его квадрата при делении на 7.

3	2
5	4
7	0
9	4
11	2
13	1

Число 13 подходит. Предоставим пример. Возьмем числа

$$1,\ 29,\ 57,\ 85,\ 113,\ 141,\ 169,\ 197,\ 225,\ 253.$$

Все эти числа имеют вид $28\cdot k+1$, то есть дают остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 7. Причем сумма любых 4 чисел даст остаток 0 при делении на 4 как сумма 4 чисел с одинаковыми остатками. Аналогично с суммой любых 7 чисел. То есть условие выполняется.

№19.5 #125980 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых пяти или шести чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 602 и 1512?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 602?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

Ответ: а) Нет, не могут

б) Нет, не может

в) 11

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 5. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 5. Тогда рассмотрим 5 чисел a, c, d, e, f. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 5.

А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e, f. Их сумма также должна быть кратна 5. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 5. То есть разность $(a+c+d+e+f)-(b+c+d+e+f)=a-b$ не делится на 5. Но разность двух чисел, кратных пяти, должна делиться на 5. Противоречие.

Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 6.

а) Заметим, что числа 602 и 1512 дают разные остатки при делении на 6. Первое число дает остаток 2, второе — остаток 0. Получили противоречие с доказанным выше фактом.

б) Если на доске есть число 602, то все числа на доске дают остаток 2 при делении на 5. Рассмотрим все возможные остатки квадратов чисел при делении на 5.

1. Если число, дающее остаток 0 при делении на 5, возвести в квадрат, то получится число с остатком 0 при делении на 5.
2. Если число, дающее остаток 1 при делении на 5, возвести в квадрат, то получится число с остатком $1^2=1$ при делении на 5.
3. Если число, дающее остаток 2 при делении на 5, возвести в квадрат, то получится число с остатком $2^2=4$ при делении на 5.
4. Если число, дающее остаток 3 при делении на 5, возвести в квадрат, то получится число с остатком $3^2=9\equiv 4$ при делении на 5.
5. Если число, дающее остаток 4 при делении на 5, возвести в квадрат, то получится число с остатком $4^2=16\equiv 1$ при делении на 5.

Как видим, ни один квадрат натурального числа не может давать остаток 2 при делении на 5. То есть выполнение данного условия невозможно.

в) Если на доске одновременно записаны числа 1 и n^2, то n^2 дает остаток 1 при делении на 5 и остаток 1 при делении на 6. Причем $n^2\neq 1$, так как 1 уже записано на доске. Будем идти по квадратам нечетных чисел, так как квадраты четных чисел не дают остаток 1 при делении на 6. Заполним таблицу: слева будем писать число, справа — остатки его квадратов при делении на 5 и на 6.

3	4	3
5	0	1
7	4	1
9	1	3
11	1	1

Число 11 подходит. Предоставим пример. Возьмем числа

$$1,\ 31,\ 61,\ 91,\ 121,\ 151,\ 181,\ 211,\ 241,\ 271.$$

Все эти числа имеют вид $30\cdot k+1$, то есть дают остаток 1 при делении на 5 и остаток 1 при делении на 6. Причем сумма любых 5 чисел даст остаток 0 при делении на 5 как сумма 5 чисел с одинаковыми остатками. Аналогично с суммой любых 6 чисел. То есть условие выполняется.

№19.6 #126261 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 431 и 2031?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 431?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

Ответ: а) Да, могут

б) Нет, не может

в) 9

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.

А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e)=a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.

Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 5.

а) Заметим, что числа 431 и 2031 дают одинаковые остатки при делении на 4 и 5, то есть противоречий не возникает. Приведем пример:

$$431,\ 2031,\ 31,\ 131,\ 231,\ 331,\ 531,\ 631,\ 731,\ 831$$

б) Если на доске есть число 431, то все числа на доске дают остаток 3 при делении на 4. Рассмотрим все возможные остатки квадратов чисел при делении на 4.

1. Если число, дающее остаток 0 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком 0 при делении на 4.
2. Если число, дающее остаток 1 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $1^2=1$ при делении на 4.
3. Если число, дающее остаток 2 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $2^2=4\equiv 0$ при делении на 4.
4. Если число, дающее остаток 3 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $3^2=9\equiv 1$ при делении на 4.

Как видим, ни один квадрат натурального числа не может давать остаток 3 при делении на 4. То есть выполнение данного условия невозможно.

в) Если на доске одновременно записаны числа 1 и n^2, то n^2 дает остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 5. Причем $n^2\neq 1$, так как 1 уже записано на доске. Будем идти по квадратам нечетных чисел, так как квадраты четных чисел дают остаток 0 при делении на 4, а квадраты нечетных чисел — остаток 1. Заполним таблицу: слева будем писать число, справа — остаток его квадрата при делении на 5.

3	4
5	0
7	4
9	1

Число 9 подходит. Предоставим пример. Возьмем числа

$$1,\ 81,\ 21,\ 41,\ 61,\ 101,\ 121,\ 141,\ 161,\ 181.$$

Все эти числа имеют вид $20\cdot k+1$, то есть дают остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 5. Причем сумма любых 4 чисел даст остаток 0 при делении на 4 как сумма 4 чисел с одинаковыми остатками. Аналогично с суммой любых 5 чисел. То есть условие выполняется.

№19.7 #126262 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырёх или семи чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 567 и 1414?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 567?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

Ответ: а) Нет, не могут

б) Нет, не может

в) 13

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.

А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e)=a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.

Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 7.

а) Заметим, что числа 567 и 1414 дают разные остатки при делении на 4. Первое число дает остаток 3, второе — остаток 2. Получили противоречие с доказанным выше фактом.

б) Если на доске есть число 567, то все числа на доске дают остаток 3 при делении на 4. Рассмотрим все возможные остатки квадратов чисел при делении на 4.

1. Если число, дающее остаток 0 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком 0 при делении на 4.

2. Если число, дающее остаток 1 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $1^2=1$ при делении на 4.

3. Если число, дающее остаток 2 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $2^2=4\equiv 0$ при делении на 4.

4. Если число, дающее остаток 3 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $3^2=9\equiv 1$ при делении на 4.

Как видим, ни один квадрат натурального числа не может давать остаток 3 при делении на 4. То есть выполнение данного условия невозможно.

в) Если на доске одновременно записаны числа 1 и n^2, то n^2 дает остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 7. Причем $n^2\neq 1$, так как 1 уже записано на доске. Будем идти по квадратам нечетных чисел, так как квадраты четных чисел дают остаток 0 при делении на 4, а квадраты нечетных чисел — остаток 1. Заполним таблицу: слева будем писать число, справа — остаток его квадрата при делении на 7.

3	2
5	4
7	0
9	4
11	2
13	1

Число 13 подходит. Предоставим пример. Возьмем числа

$$1,\ 29,\ 57,\ 85,\ 113,\ 141,\ 169,\ 197,\ 225,\ 253.$$

Все эти числа имеют вид $28\cdot k+1$, то есть дают остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 7. Причем сумма любых 4 чисел даст остаток 0 при делении на 4 как сумма 4 чисел с одинаковыми остатками. Аналогично с суммой любых 7 чисел. То есть условие выполняется.

№19.8 #126263 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трёх или пяти чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 305 и 1511?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 305?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

Ответ: а) Нет, не могут

б) Нет, не может

в) 4

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 3. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 3. Тогда рассмотрим 3 числа a, c, d. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 3.

А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d. Их сумма также должна быть кратна 3. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 3. То есть разность $(a+c+d)-(b+c+d)=a-b$ не делится на 3. Но разность двух чисел, кратных трем, должна делиться на 3. Противоречие.

Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 5.

а) Заметим, что числа 305 и 1511 дают разные остатки при делении на 5. Первое число дает остаток 0, второе — остаток 1. Получили противоречие с доказанным выше фактом.

б) Если на доске есть число 305, то все числа на доске дают остаток 2 при делении на 3. Рассмотрим все возможные остатки квадратов чисел при делении на 3.

1. Если число, дающее остаток 0 при делении на 3, возвести в квадрат, то получится число с остатком 0 при делении на 3.

2. Если число, дающее остаток 1 при делении на 3, возвести в квадрат, то получится число с остатком $1^2=1$ при делении на 3.

3. Если число, дающее остаток 2 при делении на 3, возвести в квадрат, то получится число с остатком $2^2=4\equiv 1$ при делении на 3.

Как видим, ни один квадрат натурального числа не может давать остаток 2 при делении на 3. То есть выполнение данного условия невозможно.

в) Если на доске одновременно записаны числа 1 и n^2, то n^2 дает остаток 1 при делении на 3 и остаток 1 при делении на 5. Причем $n^2\neq 1$, так как 1 уже записано на доске. Заполним таблицу: слева будем писать число, справа — остаток его квадрата при делении на 5.

2	4
3	4
4	1

Также $4^2=16$ дает остаток 1 при делении на 3, то есть $n=4$ подходит. Предоставим пример. Возьмем числа

$$1,\ 16,\ 31,\ 46,\ 61,\ 76,\ 91,\ 106,\ 121,\ 136.$$

Все эти числа имеют вид $15\cdot k+1$, то есть дают остаток 1 при делении на 3 и остаток 1 при делении на 5. Причем сумма любых 3 чисел даст остаток 0 при делении на 3 как сумма 3 чисел с одинаковыми остатками. Аналогично с суммой любых 5 чисел. То есть условие выполняется.

№19.9 #126264 (Сибирь, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел является целым числом.
а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 403 и 2013?
б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 403?
в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

Ответ: а) Нет, не могут
б) Нет, не может
в) 9

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.
А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e)=a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.
Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 5.
а) Заметим, что числа 403 и 2013 дают разные остатки при делении на 4. Первое число дает остаток 3, второе — остаток 1. Получили противоречие с доказанным выше фактом.
б) Если на доске есть число 403, то все числа на доске дают остаток 3 при делении на 4. Рассмотрим все возможные остатки квадратов чисел при делении на 4.

1. Если число, дающее остаток 0 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком 0 при делении на 4.

2. Если число, дающее остаток 1 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $1^2=1$ при делении на 4.

3. Если число, дающее остаток 2 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $2^2=4\equiv 0$ при делении на 4.

4. Если число, дающее остаток 3 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $3^2=9\equiv 1$ при делении на 4.

Как видим, ни один квадрат натурального числа не может давать остаток 3 при делении на 4. То есть выполнение данного условия невозможно.
в) Если на доске одновременно записаны числа 1 и n^2, то n^2 дает остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 5. Причем $n^2\neq 1$, так как 1 уже записано на доске. Будем идти по квадратам нечетных чисел, так как квадраты четных чисел дают остаток 0 при делении на 4, а квадраты нечетных чисел — остаток 1. Заполним таблицу: слева будем писать число, справа — остаток его квадрата при делении на 5.

3	4
5	0
7	4
9	1

Число 9 подходит. Предоставим пример. Возьмем числа

$$1,\ 81,\ 21,\ 41,\ 61,\ 101,\ 121,\ 141,\ 161,\ 181.$$

Все эти числа имеют вид $20\cdot k+1$, то есть дают остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 5. Причем сумма любых 4 чисел даст остаток 0 при делении на 4 как сумма 4 чисел с одинаковыми остатками. Аналогично с суммой любых 5 чисел. То есть условие выполняется.

№19.10 #125982 (Центр, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30035.

а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 325?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел быть равным 7?

в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: а) Нет, не может

б) Нет, не может

в) 13

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.

А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e)=a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.

Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 3, 5, 6.

а) Заметим, что числа 325 и 30035 дают разные остатки при делении на 4. Первое число дает остаток 1, второе — остаток 3. Получили противоречие с доказанным выше фактом.

б) Если на доске есть число 30035, то все числа на доске дают остаток 3 при делении на 4. Тогда пусть на доске написаны числа a и $7a$. Число a дает остаток 3 при делении на 4, а число $7a$ дает остаток $7\cdot 3=21$, то есть остаток 1 при делении на 4. Противоречие.

в) Число 30035 дает остаток 2 при делении на 3, остаток 3 при делении на 4, остаток 0 при делении на 5, остаток 5 при делении на 6.

Поймем, что $n>1$, так как все числа различные. Выполним перебор по $n:$

$n\neq 2$, так как если число a дает остаток 5 при делении на 6, то число $2a$ даст остаток 4 при делении на 6;

$n\neq 3,\ 4,\ 6$, так как число вида na будет кратно 3, 4 или же 6, что противоречит описанному выше;

$n\neq 5$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 3, то число $5a$ дает остаток 1 при делении на 3;

$n\neq 7$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 4, то число $7a$ дает остаток 1 при делении на 4;

$n\neq 8,\ 9$, так как эти числа кратны 4 и 3 соответственно (они не подойдут по тем же причинам, по которым не подходят числа 3, 4, 6);

$n\neq 10$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 4, то число $10a$ дает остаток 2 при делении на 4;

$n\neq 11$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 3, то число $11a$ даст остаток 1 при делении на 3;

$n\neq 12$, так как 12 кратно 4.

На $n=13$ есть пример:

$$155,\ 2015,\ 30035,\ 515,\ 875,\ 1235,\ 1595,\ 1955,\ 2315,\ 2675.$$

Здесь $2015=155\cdot 13$. Все числа имеют вид $155+60\cdot k$. То есть дают остаток 2 при делении на 3, остаток 3 при делении на 4, остаток 0 при делении на 5, остаток 5 при делении на 6.

Если сложить n чисел с одинаковыми остатками при делении на n, то получится число, кратное n. Поэтому условие задачи на то, что среднее арифметическое любых 3, 4, 5, 6 чисел является целым числом, выполняется.

ШКОЛКОВО

№19.11 #125985 (Центр, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30032.
а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 312?
б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел быть равным 6?
в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: а) Нет, не может
б) Нет, не может
в) 16

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.
А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e)=a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.
Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 3, 5, 6.
а) Заметим, что числа 312 и 30032 дают разные остатки при делении на 3. Первое число дает остаток 0, второе — остаток 2. Получили противоречие с доказанным выше фактом.
б) Если на доске есть число 30032, то все числа на доске дают остаток 2 при делении на 3. Тогда пусть на доске написаны числа a и $6a$. Число a дает остаток 2 при делении на 3, а число $6a$ дает остаток 0 при делении на 3. Противоречие.
в) Число 30032 дает остаток 2 при делении на 3, остаток 0 при делении на 4, остаток 2 при делении на 5, остаток 2 при делении на 6.
Поймем, что $n>1$, так как все числа различные. Выполним перебор по n :
$n\neq 2$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 6, то число $2a$ даст остаток 4 при делении на 6;
$n\neq 3$, 5, 6, так как число вида na будет кратно 3, 5 или же 6, что противоречит описанному выше;
$n\neq 4$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 5, то число $4a$ дает остаток 3 при делении на 5;
$n\neq 7$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 5, то число $7a$ дает остаток 4 при делении на 5;
$n\neq 9$, 10, так как эти числа кратны 3 и 5 соответственно (они не подойдут по тем же причинам, по которым не подходят числа 3, 5, 6);
$n\neq 8$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 5, то число $8a$ дает остаток 1 при делении на 5;
$n\neq 11$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 3, то число $11a$ даст остаток 1 при делении на 3;
$n\neq 12$, так как 12 кратно 3.
$n\neq 13$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 5, то число $13a$ даст остаток 1 при делении на 5;
$n\neq 14$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 3, то число $14a$ даст остаток 1 при делении на 3;
$n\neq 15$, так как 15 кратно 3.
На $n=16$ есть пример:

$$152,\ 2432,\ 30032,\ 272,\ 392,\ 512,\ 632,\ 752,\ 872,\ 992.$$

Здесь $2432=152\cdot 16$. Все числа имеют вид $152+120\cdot k$. То есть дают остаток 2 при делении на 3, остаток 0 при делении на 4, остаток 2 при делении на 5, остаток 2 при делении на 6.
Если сложить n чисел с одинаковыми остатками при делении на n, то получится число, кратное n. Поэтому условие задачи на то, что среднее арифметическое любых 3, 4, 5, 6 чисел является целым числом, выполняется.

№19.12 #126265 (Центр, 27.05)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30033.

а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 303?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел быть равным 31?

в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: а) Нет, не может

б) Нет, не может

в) 21

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.

А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e)=a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.

Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 3, 5, 6.

а) Заметим, что числа 303 и 30033 дают разные остатки при делении на 4. Первое число дает остаток 3, второе — остаток 1. Получили противоречие с доказанным выше фактом.

б) Если на доске есть число 30033, то все числа на доске дают остаток 1 при делении на 4. Тогда пусть на доске написаны числа a и $31a$. Число a дает остаток 1 при делении на 4, а число $31a$ дает остаток $31\cdot 1 = 31 \equiv_4 3$, то есть остаток 3 при делении на 4. Противоречие.

в) Число 30033 дает остаток 0 при делении на 3, остаток 1 при делении на 4, остаток 3 при делении на 5, остаток 3 при делении на 6.

Поймем, что $n>1$, так как все числа различные. Выполним перебор по n:

$n\neq 2$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 6, то число $2a$ даст остаток 0 при делении на 6;

$n\neq 3$, так как если число a дает остаток 1 при делении на 4, то число $3a$ даст остаток 3 при делении на 4;

$n\neq 4$, 5, 6, так как число вида na будет кратно 3, 4 или же 6, что противоречит описанному выше;

$n\neq 7$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 5, то число $7a$ дает остаток 1 при делении на 5;

$n\neq 8$, так как 8 кратно 4, следовательно число вида na будет кратно 4;

$n\neq 9$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 5, то число $9a$ дает остаток 2 при делении на 5;

$n\neq 10$, так как если число a дает остаток 1 при делении на 4, то число $10a$ дает остаток 2 при делении на 4;

$n\neq 11$, так как если число a дает остаток 1 при делении на 4, то число $11a$ даст остаток 3 при делении на 4;

$n\neq 12$, так как 12 кратно 4;

$n\neq 13$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 5, то число $13a$ даст остаток 4 при делении на 5;

$n\neq 14$, так как если число a дает остаток 1 при делении на 4, то число $14a$ даст остаток 2 при делении на 4;

$n\neq 15$, так как 15 кратно 5;

$n\neq 16$, так как 16 кратно 4;

$n\neq 17$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 5, то число $17a$ даст остаток 1 при делении на 5;

$n\neq 18$, так как 18 кратно 6;

$n\neq 19$, так как если число a дает остаток 1 при делении на 4, то число $19a$ даст остаток 3 при делении на 4;

$n\neq 20$, так как 20 кратно 4;

На $n=21$ есть пример:

$$33,\ 693,\ 30033,\ 93,\ 153,\ 213,\ 273,\ 333,\ 393,\ 453.$$

Здесь $693=33\cdot 21$. Все числа имеют вид $33+60\cdot k$. То есть дают остаток 0 при делении на 3, остаток 1 при делении на 4, остаток 3 при делении на 5, остаток 3 при делении на 6.

Если сложить n чисел с одинаковыми остатками при делении на n, то получится число, кратное n. Поэтому условие задачи на то, что среднее арифметическое любых 3, 4, 5, 6 чисел является целым числом, выполняется.

№19.13 #126272 (Центр, 27.05)

На доске записано некоторое количество последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять делятся на 15.

а) Могло ли среди записанных чисел быть больше 5 чисел, делящихся на 16?

б) Могло ли среди записанных чисел быть меньше пяти чисел, делящихся на 11?

в) Найдите наибольшее возможное число k такое, что среди записанных чисел больше пяти чисел делятся на k.

Ответ: а) Да, могло

б) Нет, не могло

в) 17

Решение. а) Приведем пример. Пусть записаны числа от 16 до 96 включительно. Среди них 6 чисел кратны 16: это 16, 32, 48, 64, 80, 96. При этом кратных 15 чисел ровно 5: это 30, 45, 60, 75, 90. Данный набор соответствует условию.

б) Заметим, что так как ровно 5 чисел кратны 15, то наименьшее количество чисел достигается в случае, когда набор начинается на число, кратное 15, и заканчивается на число, кратное 15. В таком случае количество чисел равно $4 \cdot 15 + 1 = 61$. Но среди 61 последовательного числа всегда найдутся хотя бы 5 чисел, кратных 11. Противоречие.

в) Из пункта а) мы получили, что $k \geqslant 16$. Теперь оценим наибольшее количество чисел в наборе. Поскольку чисел, кратных 15, ровно 5, то наибольшее количество чисел равно 89.

Действительно, набор должен выглядеть следующим образом:

$$15n + 1,\ \ldots,\ 15(n+5) + 14 = 15n + 89$$

Здесь $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как такой набор действительно содержит ровно 5 чисел, кратных 15, и при продолжении в любую из сторон появится ещё одно число, кратное 15 (в случае $n = 0$ при продолжении до 90).

Заметим, что для $k = 17$ достаточно взять $n = 1$ и получившийся набор чисел от 16 до 104 включительно. Тогда кратных 17 получится 6 чисел: 17, 34, 51, 68, 85, 102. А кратных 15 — ровно 5 чисел: 30, 45, 60, 75, 90.

Покажем, что для $k \geqslant 18$ нельзя получить больше 5 чисел. Наименьший по количеству набор последовательных натуральных чисел, таких, что среди них ровно 6 чисел, кратных 18 — набор, состоящий из 91 последовательного числа. Действительно, такие наборы имеют вид:

$$18m,\ \ldots,\ 18(m+5) = 18m + 90$$

Если уменьшить его, то количество чисел, кратных 18, уменьшится и станет не более 5. Но среди любых 91 последовательного числа есть хотя бы 6 чисел, кратных 15.

Таким образом, $k = 17$.

№19.14 #125987 (Центр, 27.05)

а) Приведите пример семизначного числа, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 206, 835, 930.
б) Существует ли восьмизначное число, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 247, 345, 586, 812?
в) Найдите наименьшее натуральное число, из которого можно получить все натуральные числа от 1 до 50, вычеркивая цифры.

Ответ: а) 2893506
б) Нет, не существует
в) 12341234506789

Решение. а) Рассмотрим число 2893506. Если вычеркнуть цифры 8, 9, 3, 5, получится число 206. Если вычеркнуть цифры 2, 9, 0, 6, получится число 835. Если вычеркнуть цифры 2, 8, 5, 6, получится число 930.
б) Заметим, что среди представленных чисел, используются 8 цифр от 1 до 8. Тогда каждая цифра используется по 1 разу. Заметим, что 2 должна стоять раньше 4, так как иначе число 247 не получить, 4 должна стоять раньше 5, так как иначе число 345 не получить, 5 должна стоять раньше 8, так как иначе число 586 не получить, 8 должна стоять раньше 2, так как иначе число 812 не получить. Но получается, что 2 стоит раньше 4, раньше 5, раньше 8, раньше 2. То есть 2 стоит раньше 2. Противоречие.
в) Поймем, каждая из цифр 1, 2, 3, 4 встречается не менее двух раз, так как каждое число вида $\overline{aa} < 50$, если $a < 5$. Цифр от 5 до 9, а еще ноль, должно быть минимум по одной. Таким образом, итоговое число должно содержать не менее 14 цифр. Давайте предоставим пример на 14 цифр: 12341234506789.
Докажем, что это в целом наименьшее число. Поймем, что цифра 0 точно стоит где-то после цифры 1, 2, 3, 4, 5 так как иначе числа 10, 20, 30, 40, 50 не получить. Также повторяющиеся цифры должны быть разнесены с разных сторон от 4, так как иначе нельзя будет получить оба числа вида $\overline{4a}, \overline{a4}$. Далее расставим цифры по возрастанию. Получим 12341234506789.
Видим, что каждая цифра встречается в числе, то есть числа 1-9 получить можно. После каждой цифры от 1 до 4 стоит каждая цифра от 1 до 9, то есть числа вида $\overline{ab}, a < 5, b \neq 0$ можно получить. Также 0 стоит после цифр 1, 2, 3, 4, 5, то есть числа 10, 20, 30, 40, 50 можно получить.

№19.15 #125163 (Центр, 26.05)

В парке n аттракционов. С 11 до 12 часов дня парк посетило только n детей. Стоимость посещения каждого аттракциона составляет 10 рублей. Каждый ребёнок потратил или 30, или 140 рублей, причём не все дети потратили поровну денег. Один аттракцион можно посетить много раз.
а) Может ли выручка каждого аттракциона составить ровно 80 рублей?
б) Какое наименьшее количество детей могло быть, если известно, что все аттракционы получили одинаковую выручку?
в) Любые два аттракциона имеют разную выручку (возможно, нулевую). Каково наибольшее возможное количество посетивших парк детей?

Ответ: а) Да, может
б) 11
в) 28

Решение. а) Общая выручка парка равна $80n$. Пусть a детей потратили 30 рублей, b детей — 140 рублей. При этом $a + b = n$. Тогда

$$80n = 30a + 140b$$
$$8n = 3(a + b) + 11b$$
$$8n = 3n + 11b$$
$$5n = 11b$$

Тогда $n = 11$, $a = 6$, $b = 5$ — решение.
Таким образом, построили пример: 11 аттракционов, 6 детей потратили по 30 рублей, 5 детей потратили по 140 рублей. Тогда в общем они потратили $6 \cdot 30 + 5 \cdot 140 = 880$ рублей.
А так как стоимость посещения любого аттракциона 10 рублей, то эту сумму действительно можно распределить поровну между всеми 11 аттракционами, и каждый аттракцион заработает по 80 рублей.
б) Пусть каждый аттракцион посетили x раз, то есть выручка каждого аттракциона равна $10x$ рублей. Тогда общая выручка парка равна $10xn$ рублей. Отсюда получаем:

$$10xn = 30a + 140b$$
$$xn = 3a + 14b$$
$$xn = 3(a + b) + 11b$$
$$xn = 3n + 11b$$

Заметим, что $xn \,\vdots\, n$ и $3n \,\vdots\, n$, следовательно, $11b \,\vdots\, n$. Так как по условию $0 < b < n$, то b не делится на n. Тогда 11 и n имеют общий множитель. Отсюда $n \,\vdots\, 11$. То есть наименьшее возможное $n = 11$. Пример на $n = 11$ приведен в пункте а).
в) Найдем минимальную сумму выручки. Она будет тогда, когда каждый аттракцион заработает как можно меньше, то есть когда полученные суммы в рублях образуют арифметическую прогрессию, начиная с 0:

$$0,\ 10,\ 20,\ \ldots,\ 10(n-1)$$

Таким образом, выручка в рублях не может быть меньше чем

$$\frac{0 + 10(n-1)}{2} \cdot n = 5(n-1)n.$$

Найдем теперь максимальную сумму выручки. Она будет тогда, когда только один ребенок потратит 30 рублей, а остальные по 140 рублей.
То есть выручка в рублях не может быть больше чем

$$140 \cdot (n-1) + 30 \cdot 1 = 140n - 110.$$

Отсюда получаем неравенство:

$$5(n-1)n \leqslant 140n - 110$$
$$5n^2 - 145n + 110 \leqslant 0$$
$$n^2 - 29n + 22 \leqslant 0$$
$$n_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{753}}{2}$$
$$n \in \left(\frac{29-\sqrt{753}}{2}; \frac{29+\sqrt{753}}{2}\right)$$
$$n \leqslant \frac{29+\sqrt{753}}{2} < \frac{29+28}{2} = 28\,\frac{1}{2}$$
$$n \leqslant 28$$

Построим пример на $n = 28$. Из рассуждений понятно, что должно быть 27 детей, которые потратили по 140 рублей и 1 ребенок, который потратил 30 рублей. Тогда всего потрачено $27 \cdot 140 + 30 = 3810$ рублей.
Если аттракционы выручили соответственно $0,\ 10, \ldots,\ 260,\ 270$ рублей, то общая прибыль парка в рублях составит:

$$\frac{0+270}{2} \cdot 28 = 3780.$$

Тогда чтобы значения прибыли совпали, достаточно, чтобы последний аттракцион заработал не 270, а 300 рублей:

$$\frac{0+260}{2} \cdot 27 + 300 = 3810.$$

ШКОЛКОВО