ЕГЭ по профильной математике 2025
Основная волна 27.05

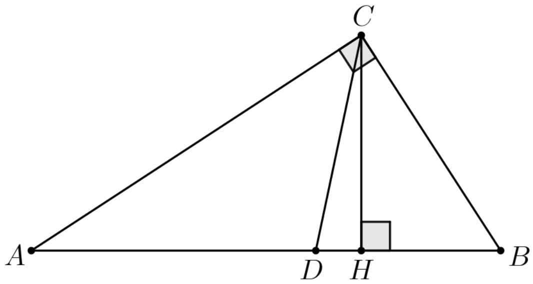
Содержание

Первая часть. Условия

Задачи №1. Условия

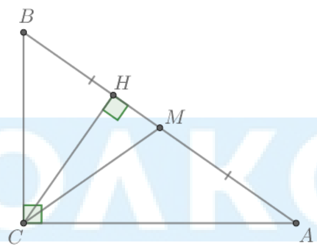
№1.1 (Дальний Восток)

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $67°$. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



№1.2 (Сибирь)

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $55°$. Найдите угол между высотой CH и медианой CM, проведенными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



Задачи №2. Условия

№2.1 (Дальний Восток)

Даны векторы $\vec{a}(7; -3)$ и $\vec{b}(5; 12)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

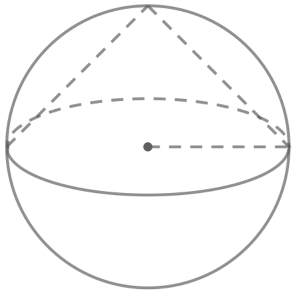
№2.2 (Центр)

Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; 6)$ и $\vec{c}(4; -2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Задачи №3. Условия

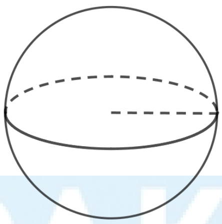
№3.1 (Дальний Восток)

Около конуса описана сфера, то есть сфера содержит окружность основания конуса и его вершину. Центр основания конуса совпадает с центром сферы, а ее радиус равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



№3.2 (Центр)

Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.



Задачи №4. Условия

№4.1 (Дальний Восток)

На олимпиаде по химии 400 участников собираются разместить в четырёх аудиториях: в трёх — по 110 человек, а оставшихся — в запасной аудитории в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник будет писать олимпиаду в запасной аудитории.

№4.2 (Дальний Восток (не подтверждено))

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов: первые три дня по 11 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

№4.3 (откуда)

Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 45 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 18 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Задачи №5. Условия

№5.1 (Дальний Восток)

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

№5.2 (Сибирь)

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше чем 790 г, но меньше чем 810 г.

№5.3 (Центр)

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система контроля забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Задачи №6. Условия

№6.1 (Дальний Восток)

Решите уравнение $7^{x-4} = 49$.

№6.2 (Сибирь)

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{18-5x} = 25$.

Задачи №7. Условия

№7.1 (Дальний Восток)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$.

№7.2 (Сибирь)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 125}{\log_9 5}$.

№7.3 (Сибирь)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 32}{\log_7 2}$.

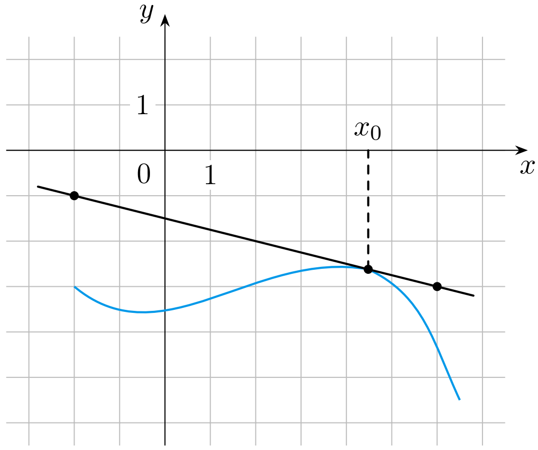
№7.4 (Сибирь)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 49}{\log_2 7}$.

Задачи №8. Условия

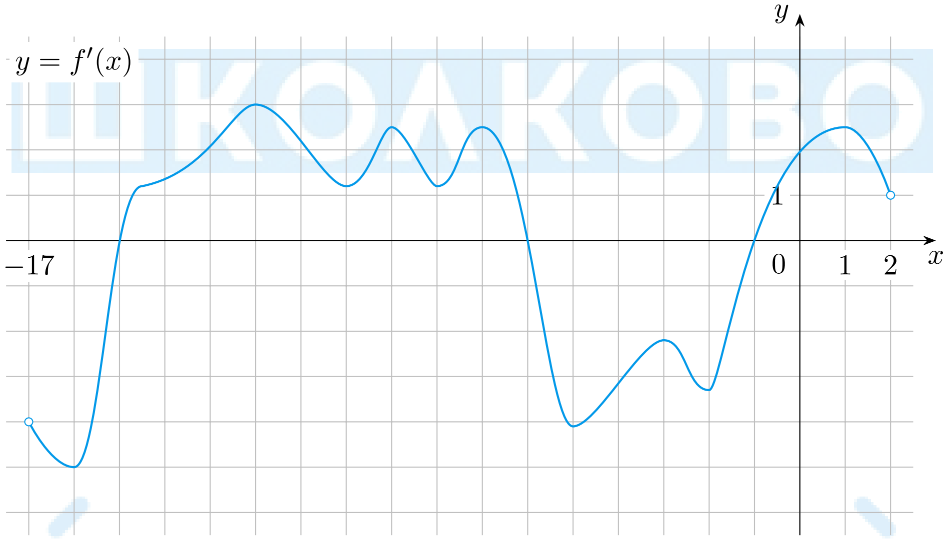
№8.1 (Дальний Восток)

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



№8.2 (Центр)

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-17; 2)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12; 1]$.



Задачи №9. Условия

№9.1 (Дальний Восток)

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a $\left(\text{в км/ч}^2\right)$. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 км, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

№9.2 (Дальний Восток)

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость 150 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Задачи №10. Условия

№10.1 (Дальний Восток)

От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 192 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним, со скоростью на 4 км/ч больше, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

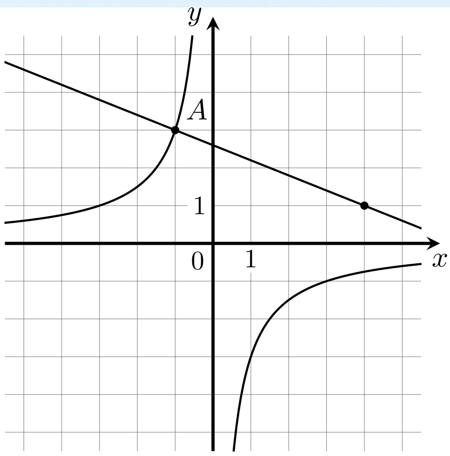
№10.2 (Сибирь)

Два автомобиля одновременно отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 24 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Задачи №11. Условия

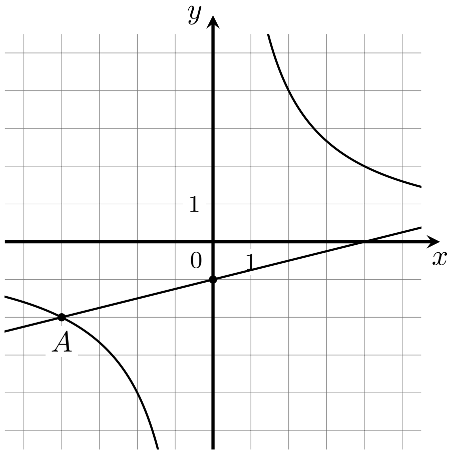
№11.1 (Дальний восток)

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



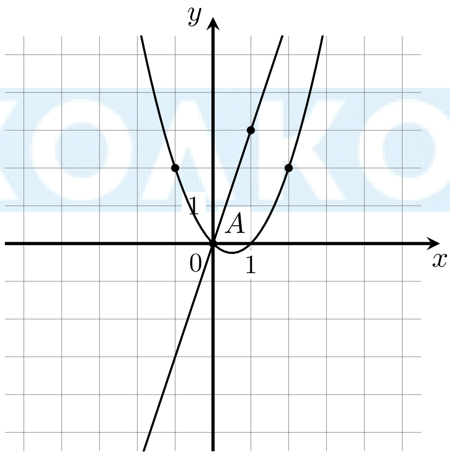
№11.2 (Дальний Восток)

На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = ax + b$ и $g(x) = \frac{k}{x}$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



№11.3 (Сибирь)

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Задачи №12. Условия

№12.1 (Дальний Восток, центр)

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$.

Вторая часть. Условия

Задачи №13. Условия

№13.1 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{2}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

№13.2 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№13.3 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\cos(2\pi + 2x) - 2 + \sqrt{8}\sin x = -\sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№13.4 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\cos(2\pi + 2x) - 2 - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

№13.5 (Центр (Не подтверждено))

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}75 = \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№13.6 (Центр)

а) Решите уравнение $2\sin(-x) + 2\sqrt{3} - 4\cos^2 x = 2 - \sqrt{3}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

№13.7 (Центр)

а) Решите уравнение $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} - 2\sin(x + \pi)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№13.8 (Центр)

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{2}\sin(x - \pi) = \sqrt{2} - 2\sin x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задачи №14. Условия

№14.1 (Дальний восток)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 5MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 12.

№14.2 (Дальний восток)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $A_1M = 2AM$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 20.

№14.3 (Центр (не подтверждено))

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро SA равно 5. На ребре AC отмечена точка M, а на продолжении ребра BC за точку C — точка N так, что $CM = CN = 1$.
а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью SNM является равнобедренным треугольником.
б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью SNM.

№14.4 (Центр)

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.
а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.
б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

№14.5 (Центр)

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $2\sqrt{3}$.
а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.
б) В каком отношении точка K лежит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $36\sqrt{6}$?

№14.6 (Запад)

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении $AK : KB = 3 : 1$. Точка L — середина ребра BC. Плоскость α проходит через точки K и L и пересекает ребра B_1C_1 и A_1B_1 в точках M и N соответственно. Известно, что $B_1M : MC_1 = 3 : 1$.
а) Докажите, что $MN \perp AB$.
б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы, если все рёбра призмы равны.

Задачи №15. Условия

№15.1 (Дальний восток)

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} - 16}{x - 1} \geqslant 0.$$

№15.2 (Сибирь)

Решите неравенство

$$\frac{27^x - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729}{50x^2 + 10x + 0{,}5} \leqslant 0.$$

№15.3 (Сибирь)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1} - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+2} - 1}{50x^2 + 50x + 12{,}5} \geqslant 0$$

№15.4 (Сибирь)

Решите неравенство

$$\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60{,}5} \geqslant 0$$

№15.5 (Центр (Не подтверждено))

Решите неравенство

$$\frac{2}{2^x+10} \leqslant \frac{3}{2^{x+1}-1}$$

№15.6 (откуда)

Решите неравенство

$$\frac{27x^3+9x^2-3x-1}{64^{x^2}-4\cdot 8^{x^2}+4} \geqslant 0.$$

№15.7 (Центр)

Решите неравенство

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{4^{x^2}-16\cdot 2^{x^2}+64} \leqslant 0$$

№15.8 (Сибирь)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1}{50x^2-50x+12{,}5} \geqslant 0$$

Задачи №16. Условия

№16.1 (Дальний восток)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторое целое число лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 24,5 млн рублей?

№16.2 (ЕАО)

15 декабря 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 72 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

№16.3 (Камчатский край)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

№16.4 (Камчатский край)

15 декабря 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2027 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

№16.5 (Сибирь)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму тыс. рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равна сумма кредита, если общая сумма платежей составила 1449 тыс рублей?

№16.6 (Центр (Не подтверждено))

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга одним платежом;
— 15-го числа каждого месяца (с января 2027 года по март 2028 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15 марта 2028 года долг составит 200 тыс. рублей;
— 15 апреля 2028 года кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма платежей после полного погашения составит 612 тыс. рублей?

№16.7 (Центр)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r, если общая сумма платежей в 2031 году составила 3951 тыс. рублей?

№16.8 (Центр)

В июле 2025 планируется взять кредит в банке сроком на четыре года на сумму 2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026 и 2027 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– в январе 2028 и 2029 годов долг возрастает на $2r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем;

– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите r, если общая переплата по кредиту после полного его погашения составит 650 тыс. рублей.

№16.9 (Москва)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 7830 тыс. рублей?

№16.10 (Сибирь)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 48 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– К 15 декабря 2030 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2030 году составит 6390 тыс. рублей

№16.11 (Центр)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– К 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2027 году составит 2604 тыс. рублей

№16.12 (Сибирь)

15 декабря 2025 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 60 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– К 15 декабря 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2031 году составит 1356 тыс. рублей

№16.13 (непонятно откуда)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– К 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2028 году составит 17925 тыс. рублей

№16.14 (Московская область)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 6165 тыс. рублей?

№16.15 (непонятно откуда)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– К 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2028 году составит 4830 тыс. рублей

№16.16 (Непонятно, откуда)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на 48 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2030 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r, если общая сумма платежей в 2030 году составила 3195 тыс. рублей?

Задачи №17. Условия

№17.1 (Дальний восток)

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

№17.2 (Дальний восток)

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB, если $BC = \sqrt{21}$ и $AC = 3$.

№17.3 (Сибирь)

В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен 30°. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 10$.

№17.4 (Центр)

Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M. Диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABM, касается прямых BC и OM.

а) Докажите, что $AB \perp BD$.

б) Отрезки AC и BM пересекаются в точке K. Найдите площадь четырехугольника $KODM$, если $OM = 2$.

№17.5 (Центр)

В четырёхугольнике $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.

б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 9$.

№17.6 (Центр)

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.

б) Найдите длину стороны MN, если $LA = \sqrt{3}$.

№17.7 (Запад)

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.

а) Докажите, что $BM = PQ$.

б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 12$, $AB = BQ = 15$.

Задачи №18. Условия

№18.1 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x - \frac{9}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{9}{x}\right) - 49a + 18 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

№18.2 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-9a+15=0$$

имеет ровно два различных корня.

№18.3 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных корня.

№18.4 (Сибирь)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2\right)^2+(a+2)\left(5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2\right)+1=0$$

имеет ровно два различных корня.

№18.5 (Центр (Не подтверждено))

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-8|-|x-a|)^2-7a(|x-8|-|x-a|)+10a^2+6a-4=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.6 (Аналог задачи из центра)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x+2|+|x-a|)^2-5\cdot(|x+2|+|x-a|)+3a(5-3a)=0$$

имеет ровно два различных решения.

№18.7 (Сибирь)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(7x+|x+a-1|-6|x+a+1|+7a)^2-a(7x+|x+a-1|-6|x+a+1|+7a)+1=0$$

имеет ровно два различных корня.

№18.8 (Сибирь)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2\right)^2-(a+1)\left(4x-3\left|x+a^2\right|+|x-1|+3a^2\right)+4=0$$

имеет ровно два различных корня.

№18.9 (Центр)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-2|+|x-a+2|)^2-a(|x-a-2|+|x-a+2|)+a^2-64=0$$

имеет ровно два различных корня.

№18.10 (Центр)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)^2-8\left(\left|x+a^2\right|+|x-1|\right)-a^2+17=0$$

имеет ровно два различных корня.

Задачи №19. Условия

№19.1 (Дальний восток)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

№19.2 (Дальний восток)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 25, меньше, чем чисел, делящихся на 29.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 25?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 25?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

№19.3 (Центр (Не подтверждено))

а) Приведите пример семизначного числа, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 206, 835, 930.

б) Существует ли восьмизначное число, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 247, 345, 586, 812?

в) Найдите наименьшее натуральное число, из которого можно получить все натуральные числа от 1 до 50, вычеркивая цифры.

№19.4 (Центр)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырех или семи чисел является целым числом.

а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 563 и 1417?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 563?

в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

№19.5 (Центр)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30035.

а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 325?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел быть равным 7?

в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

№19.6 (Центр)

На доске написано 10 натуральных чисел. Среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30032.

а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 312?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 6?

в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

№19.7 (Дальний восток)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 15, меньше, чем чисел, делящихся на 17.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 15?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 15?

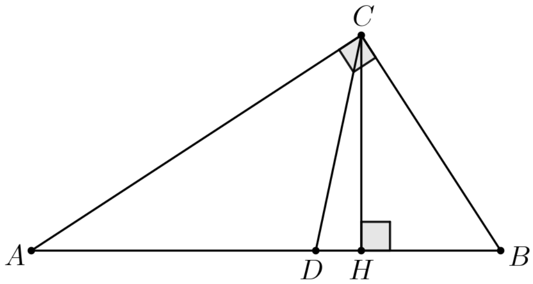
в) Найдите наибольшее возможное значение k.

Первая часть. Решения

Задачи №1. Решения

№1.1 (Дальний Восток)

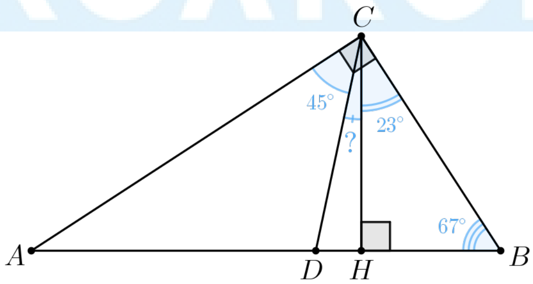
Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $67°$. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 22.

Решение. В прямоугольном треугольнике ABC высота CH, проведенная из прямого угла $\angle C$, перпендикулярна гипотенузе AB. Из этого следует, что $\angle CHB = 90°$.
Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH. Сумма его острых углов равна $90°$, значит,

$$\angle CBH + \angle BCH = 90°$$
$$\angle BCH = 90° - \angle CBH = 90° - 67° = 23°$$



В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса CD делит прямой угол $\angle C$ пополам, следовательно,

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle C = 45°.$$

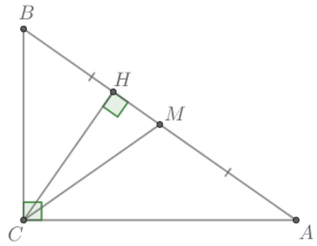
Угол DCH — угол между высотой CH и биссектрисой CD. Получаем:

$$\angle ACD + \angle DCH + \angle BCH = 90°$$
$$\angle DCH = 90° - (\angle ACD + \angle BCH) =$$
$$= 90° - (45° + 23°) = 22°$$

Таким образом, угол между высотой CH и биссектрисой CD равен $22°$.

№1.2 (Сибирь)

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $55°$. Найдите угол между высотой CH и медианой CM, проведенными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 20.

Решение. Так как медиана, опущенная из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы, то треугольник BMC — равнобедренный, то есть $BM = CM$. Следовательно,

$$\angle BCM = \angle B = 55°$$

В прямоугольном треугольнике BCH :

$$\angle BCH = 90° - \angle B = 35°$$

Тогда

$$\angle HCM = 55° - 35° = 20°$$

Задачи №2. Решения

№2.1 (Дальний Восток)

Даны векторы $\vec{a}(7; -3)$ и $\vec{b}(5; 12)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ: -1.

Решение. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Следовательно, скалярное произведение наших векторов равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 + (-3) \cdot 12 = 35 - 36 = -1.$$

№2.2 (Центр)

Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; 6)$ и $\vec{c}(4; -2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Ответ: 10.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$:

$$\vec{r}(1 - (-3) + 4; 2 - 6 + (-2)) = \vec{r}(8; -6)$$

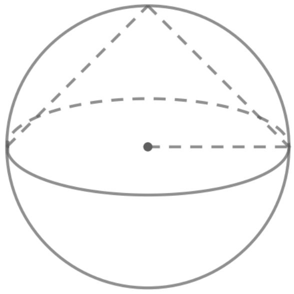
Тогда длина вектора $\vec{r}$ равна

$$l = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

Задачи №3. Решения

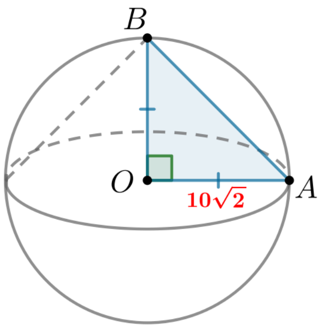
№3.1 (Дальний Восток)

Около конуса описана сфера, то есть сфера содержит окружность основания конуса и его вершину. Центр основания конуса совпадает с центром сферы, а ее радиус равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



Ответ: 20.

Решение. Рассмотрим треугольник AOB, где точка O — центр сферы, точка A принадлежит окружности основания конуса, точка B — вершина конуса. Тогда AB — это образующая конуса.



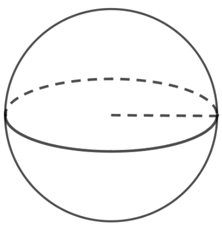
Так как центр сферы совпадает с центром основания конуса, то BO — высота конуса и $BO \perp AO$. Кроме того, AO и BO — радиусы сферы. Тогда для треугольника AOB по теореме Пифагора имеем:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

$$AB = \sqrt{200 + 200} = 20$$

№3.2 (Центр)

Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.



Ответ: 6.

Решение. Площадь поверхности шара вычисляется по площади

$$S = 4\pi R^2$$

Здесь R — радиус шара.
Площадь большого круга шара вычисляется по формуле

$$S_k = \pi R^2$$

Здесь R — радиус шара.
Тогда искомая площадь равна

$$S_k = \pi R^2 = \frac{1}{4} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$

Задачи №4. Решения

№4.1 (Дальний Восток)

На олимпиаде по химии 400 участников собираются разместить в четырёх аудиториях: в трёх — по 110 человек, а оставшихся — в запасной аудитории в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник будет писать олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: 0,175.

Решение. Найдем, сколько учеников будут писать олимпиаду в запасной аудитории:

$$400 - 3 \cdot 110 = 400 - 330 = 70.$$

Тогда вероятность того, что случайно выбранный ученик будет писать олимпиаду в запасной аудитории, равна:

$$p = \frac{70}{400} = \frac{7}{40} = 0{,}175.$$

№4.2 (Дальний Восток (не подтверждено))

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов: первые три дня по 11 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: 0,28.

Решение. В четвертый и пятый дни количество докладов будет равно

$$\frac{75 - 11 \cdot 3}{2} = 21.$$

Пронумеруем все 75 докладов номерами от 1 до 75. Если порядок докладов определяется жеребьевкой, то профессор М. с равной вероятностью получит один из номеров от 1 до 75. Из них 21 номер соответствует последнему дню конференции. Следовательно, искомая вероятность равна

$$p = \frac{21}{75} = \frac{7}{25} = 0{,}28.$$

№4.3 (откуда)

Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 45 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 18 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ: 0,2.

Решение. Во второй, третий и четвертый дни количество выступлений будет равно

$$\frac{45-18}{3}=9$$

Пронумеруем все 45 выступлений номерами от 1 до 45. Если порядок выступлений определяется жеребьевкой, то исполнитель из России с равной вероятностью получит один из номеров от 1 до 45. Из них 9 номеров соответствуют третьему дню конкурса. Таким образом, вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день, равна

$$\frac{9}{45}=0{,}2$$

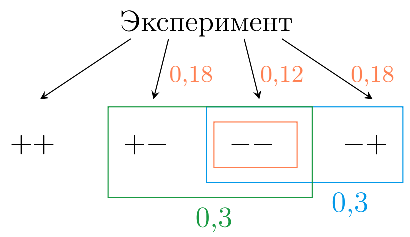
Задачи №5. Решения

№5.1 (Дальний Восток)

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ: 0,52.

Решение.



В конце дня могло возникнуть четыре различных ситуации:

- кофе остался в обоих автоматах $(++)$;
- кофе закончился только в первом автомате $(-+)$;
- кофе закончился только во втором автомате $(+-)$;
- кофе закончился в обоих автоматах $(--)$.

Это и есть ничто иное, как наши четыре элементарных исхода. По условию для каждого автомата по отдельности вероятность того, что в нем закончится кофе, равна 0,3. Значит, событию «кофе закончился в первом автомате», которое состоит из элементарных исходов $(-+)$ и $(--)$, соответствует вероятность 0,3. Событию «кофе закончится в обоих автоматах» соответствует ровно один элементарный исход $(--)$. Пользуясь тем, что элементарные исходы несовместны, получаем

$$P((-+)) = 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18.$$

По аналогичным соображениям

$$P((+-)) = 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18.$$

Теперь легко найти вероятность интересующего нас элементарного исхода «кофе остался в обоих автоматах» (++). Вспомнив, что сумма всех элементарных исходов равна 1, получим

$$P(++) = 1 - 0{,}18 - 0{,}18 - 0{,}12 = 0{,}52.$$

№5.2 (Сибирь)

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше чем 790 г, но меньше чем 810 г.

Ответ: 0,88.

Решение. Так как вероятность того, что масса буханки окажется меньше 810 г, равна 0,97, то вероятность того, что масса буханки окажется не меньше 810 г, равна

$$p_1 = 1 - 0{,}97 = 0{,}03.$$

Так как вероятность того, что масса буханки больше 790 г, равна 0,91, то вероятность того, что масса буханки не больше 790 г, равна

$$p_2 = 1 - 0{,}91 = 0{,}09.$$

Тогда вероятность того, что масса буханки больше 790 г и меньше 810 г, равна

$$1 - p_1 - p_2 = 1 - 0{,}03 - 0{,}09 = 0{,}88.$$

№5.3 (Центр)

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система контроля забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: 0,086.

Решение. Выберем произвольную батарейку. Нам удовлетворяют два случая: либо батарейка исправна, но система по ошибке ее забраковала (событие A), либо батарейка неисправна и система ее забраковала (событие B).
Так как это событие имеет вид «событие A или событие B», причем события несовместны, то вероятность его наступления равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P = P(A) + P(B)$$

Найдем отдельно $P(A)$ и $P(B)$.
1) Событие A = батарейка исправна и система по ошибке ее забраковала.
Следовательно, вероятность события A равна произведению вероятностей событий «батарейка исправна» и «система забраковала». Так как вероятность того, что батарейка неисправна, равна 0,05, то вероятность

того, что она исправна, равна
$$1 - 0{,}05 = 0{,}95$$
Следовательно,
$$P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}04 = 0{,}038$$
2) Событие В = батарейка неисправна и система ее забраковала.
Следовательно, вероятность события В равна произведению вероятностей событий «батарейка неисправна» и «система забраковала». Следовательно,
$$P(B) = 0{,}05 \cdot 0{,}96 = 0{,}048$$
Таким образом, искомая вероятность равна
$$P = 0{,}038 + 0{,}048 = 0{,}086$$

Задачи №6. Решения

№6.1 (Дальний Восток)

Решите уравнение $7^{x-4} = 49$.

Ответ: 6.

Решение. По свойствам степени имеем:
$$\begin{aligned} 7^{x-4} &= 49 \\ 7^{x-4} &= 7^2 \\ x - 4 &= 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

№6.2 (Сибирь)

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{18-5x} = 25$.

Ответ: 4.

Решение. ОДЗ: x – произвольное. Решим на ОДЗ:
Исходное уравнение есть
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{18-5x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$
Оно имеет стандартный вид и равносильно $18 - 5x = -2$, что равносильно $x = 4$ – подходит по ОДЗ.

Задачи №7. Решения

№7.1 (Дальний Восток)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$.

Ответ: 2.

Решение.
$$\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13} = \frac{\log_7 13}{\frac{1}{2}\log_7 13} = 2.$$

№7.2 (Сибирь)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 125}{\log_9 5}$.

Ответ: 3.

Решение. По формуле перехода к новому основанию $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ исходное выражение равно

$$\log_5 125 = 3.$$

№7.3 (Сибирь)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 32}{\log_7 2}$.

Ответ: 5.

Решение. По формуле перехода к новому основанию $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ исходное выражение равно

$$\log_2 32 = 5.$$

№7.4 (Сибирь)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 49}{\log_2 7}$.

Ответ: .

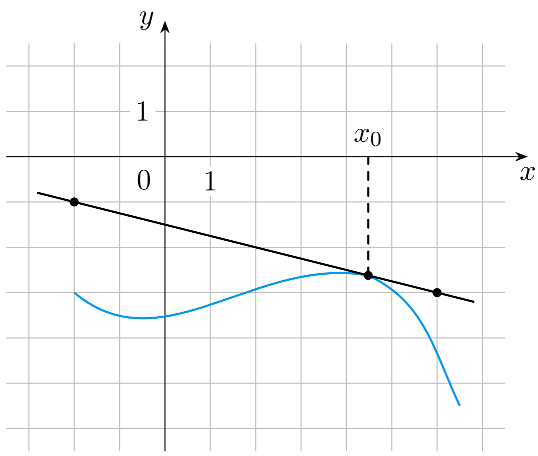
Решение. По формуле перехода к новому основанию $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ исходное выражение равно

$$\log_7 49 = 2.$$

Задачи №8. Решения

№8.1 (Дальний Восток)

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: $-0{,}25$.

Решение. Производная функции в точке с абсциссой x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.
Если прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то тангенс угла наклона этой прямой равен

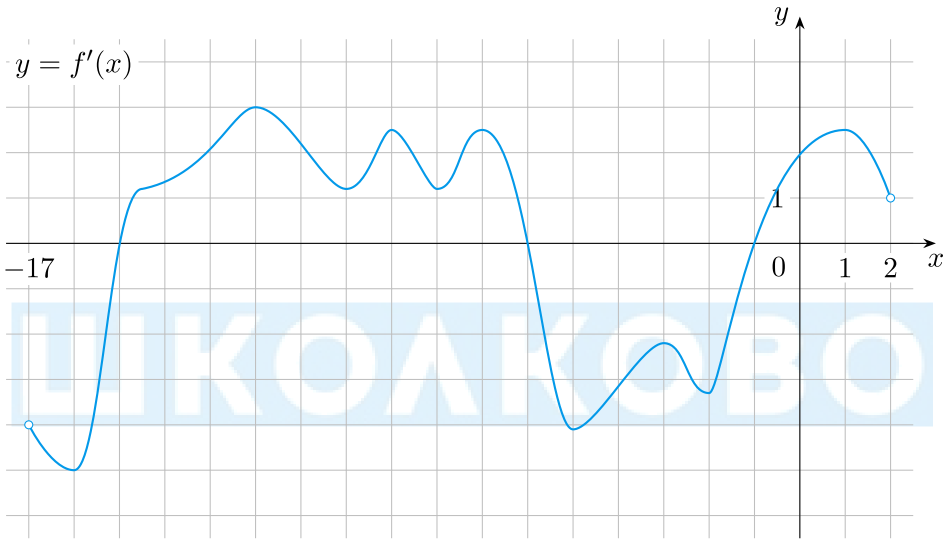
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

По картинке видно, что касательная проходит через точки $(-2; -1)$ и $(6; -3)$.
Тогда имеем:

$$f'(x_0) = \frac{(-1)-(-3)}{(-2)-6} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

№8.2 (Центр)

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-17; 2)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12; 1]$.



Ответ: 1.

Решение. В точке минимума функции её производная обнуляется и меняет знак с «−» на «+» при движении слева направо, так как до точки минимума функция убывала, а после — начала возрастать.
На отрезке $[-12; 1]$ производная обнуляется два раза — в точках

$$x_1 = -6,\ x_2 = -1$$

В точке $x_1 = -6$ производная поменяла знак с «+» на «−».
В точке $x_2 = -1$ производная поменяла знак с «−» на «+».
Значит, $x_2 = -1$ — единственная точка минимума на отрезке $[-12; 1]$.

Задачи №9. Решения

№9.1 (Дальний Восток)

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a $\left(\text{в км/ч}^2\right)$. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 км, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Ответ: 6250.

Решение. Подставим данные в формулу:

$$100 = \sqrt{2 \cdot 0{,}8a}$$

$$a = \frac{10^4 \cdot 10}{2^4}$$

$$a = 6250$$

№9.2 (Дальний Восток)

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость 150 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Ответ: 12500.

Решение. Подставим данные в формулу:

$$150 = \sqrt{2 \cdot 0{,}9a}$$

$$150^2 = 2 \cdot 0{,}9a$$

$$3^2 \cdot 50^2 = 2 \cdot \frac{3^2}{10}a$$

$$a = \frac{3^2 \cdot 50^2 \cdot 10}{2 \cdot 3^2}$$

$$a = 12500$$

Задачи №10. Решения

№10.1 (Дальний Восток)

От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 192 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним, со скоростью на 4 км/ч больше, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 16.

Решение. Пусть скорость второго теплохода равна x км/ч, при этом $x > 4$. Составим таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Первый теплоход	$x - 4$	$\frac{192}{x-4}$	192
Второй теплоход	x	$\frac{192}{x}$	192

Так как второй теплоход вышел на 4 часа позже, то его время на 4 часа меньше. Составим уравнение:

$$\frac{192}{x-4} - \frac{192}{x} = 4$$
$$\frac{192x - 192(x-4)}{x(x-4)} = 4$$
$$\frac{192 \cdot 4}{x(x-4)} = 4$$

Так как $x \neq 0$, $x \neq 4$, то можем домножить обе части уравнения на $x(x-4,)$ получим:

$$192 \cdot 4 = 4x(x-4) \quad | : 4$$
$$192 = x(x-4)$$
$$x^2 - 4x - 192 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D = 4^2 + 4 \cdot 192 = 4^2(1+48) = 4^2 \cdot 7^2 = 28^2.$$

Тогда корни квадратного уравнения равны

$$x_1 = \frac{4+28}{2} = 16 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{4-28}{2} < 0.$$

Так как $x > 4$, то скорость второго теплохода равна 16 км/ч.

№10.2 (Сибирь)

Два автомобиля одновременно отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 24 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 84.

Решение. Обозначим искомую скорость первого автомобиля за x. Тогда скорость второго автомобиля равна $(x-24)$ км/ч.
Найдем время, за которое автомобили преодолевают 420 километров. Для первого это $\frac{420}{x}$ часов, для второго — $\frac{420}{x-24}$ часов. По условию первый автомобиль прибывает к финишу на 2 часа раньше второго, имеем уравнение:

$$\frac{420}{x} + 2 = \frac{420}{x-24}$$
$$\frac{420+2x}{x} = \frac{420}{x-24}$$
$$(420+2x)(x-24) = 420x$$
$$2x^2 + 420x - 48x - 420 \cdot 24 = 420x$$
$$2x^2 - 48x - 420 \cdot 24 = 0$$
$$x^2 - 24x - 210 \cdot 24 = 0$$
$$D = 24^2 + 4 \cdot 210 \cdot 24 = 24^2 + 24^2 \cdot 35 =$$
$$= 24^2 \cdot 36 = 24^2 \cdot 6^2 = 144^2$$

Отсюда

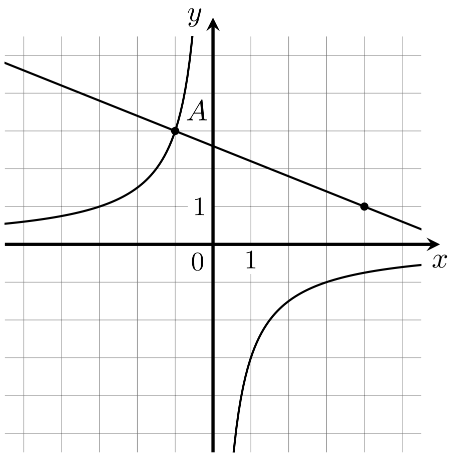
$$x = \frac{24+144}{2} = 84 \quad \text{или} \quad x = \frac{24-144}{2} = -60$$

Скорость – величина неотрицательная, поэтому нам подходит ответ $x = 84$ км/ч.

Задачи №11. Решения

№11.1 (Дальний восток)

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 7,5.

Решение. Найдём уравнение прямой. Коэффициент a определим по формуле

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

где $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — любые две точки на прямой.
По рисунку видно, что прямая проходит через точки $(-1; 3)$ и $(4; 1)$. Тогда

$$a = \frac{1-3}{4-(-1)} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Таким образом, получим уравнение прямой

$$g(x) = -\frac{2}{5}x + b.$$

Чтобы найти b, подставим одну из точек в наше уравнение, например, точку $(4; 1)$. Её координаты обратят уравнение функции в верное равенство:

$$g(4) = 1$$

$$-\frac{2}{5} \cdot 4 + b = 1$$

$$b = 1 + \frac{8}{5}$$

$$b = \frac{13}{5}$$

Значит,

$$g(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}.$$

Найдём уравнение гиперболы. Она проходит через точку $(-1; 3)$, значит, её координаты обратят уравнение функции в верное равенство:

$$f(-1) = 3$$

$$\frac{k}{-1} = 3$$

$$k = -3$$

Получили

$$f(x) = -\frac{3}{x}.$$

Чтобы найти координаты точки B, решим уравнение $f(x) = g(x)$:

$$-\frac{3}{x} = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}$$

$$-15 = -2x^2 + 13x$$

$$2x^2 - 13x - 15 = 0$$

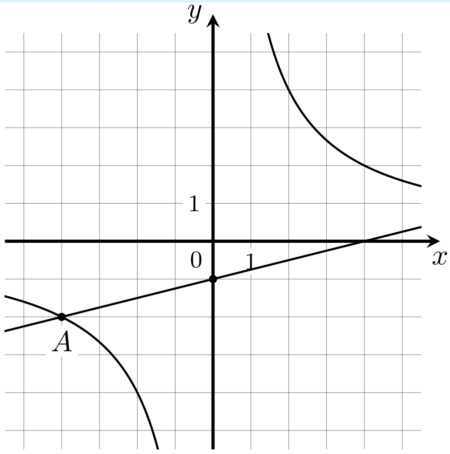
$$(x+1)(2x-15) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &x = -1 \\ &x = 7{,}5 \end{aligned}\right.$$

Значение $x = -1$ — это абсцисса точки A, тогда $x = 7{,}5$ — это абсцисса точки B.

№11.2 (Дальний Восток)

На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = ax + b$ и $g(x) = \dfrac{k}{x}$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 8.

Решение. Для начала рассмотрим функцию $g(x)$:

$$g(-4) = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{-4} = -2 \quad \Rightarrow \quad k = 8$$

Переходим к функции $f(x)$. Видим, что $b = -1$, так как прямая пересекает ось ординат в точке $(0; -1)$. Подставив координаты точки $(-4; -2)$ в уравнение $f(x) = ax - 1$, получим $-2 = a \cdot (-4) - 1$, откуда $a = 0{,}25$.

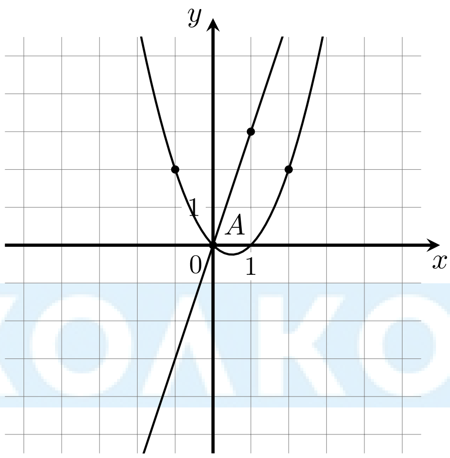
Приравниваем восстановленные функции:

$$\frac{8}{x} = 0{,}25x - 1$$
$$8 = 0{,}25x^2 - x$$
$$x^2 - 4x - 32 = 0$$
$$x_1 = -4$$
$$x_2 = 8$$

Точка пересечения графиков с абсциссой $x = -4$ уже изображена на рисунке, поэтому нам подходит точка с абсциссой $x = 8$.

№11.3 (Сибирь)

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 4.

Решение. Начнем с параболы:
$f(0) = 0$, поэтому коэффициент $c = 0$.
$f(-1) = 2 \to a - b = 2 \to a = 2 + b$,
$f(2) = 2 \to 4a + 2b = 2 \to 4(2 + b) + 2b = 2 \to 8 + 6b = 2 \to b = -1$,
$a = 2 - 1 = 1 \to f(x) = x^2 - x$.
Прямая:
$g(1) = 3 \to 3 = k \cdot 1 \to k = 3 \to g(x) = 3x$.
Приравниваем две функции:

$$x^2 - x = 3x,$$
$$x^2 = 4x,$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Точка пересечения $x = 0$ у нас уже изображена на рисунке, поэтому нам подходит точка $x = 4$.

Задачи №12. Решения

№12.1 (Дальний Восток, центр)

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$.

Ответ: 1.

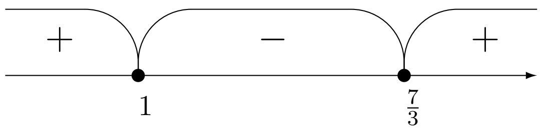
Решение. Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = 3x^2 - 10x + 7$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 10x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1; \frac{7}{3}$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков:



Следовательно, $x = 1$ является точкой максимума.

Вторая часть. Решения

Задачи №13. Решения

№13.1 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{2}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{2} - 4$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
б) $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид:

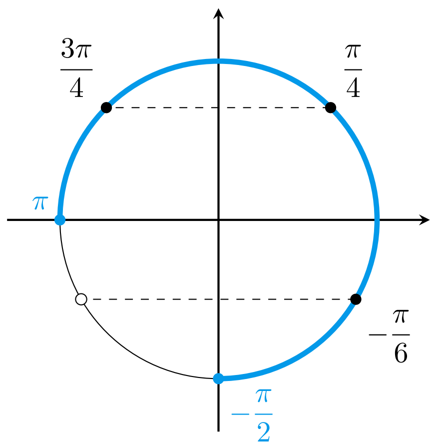
$$2\sin x + 2\sqrt{2}\sin(-x) - 4(1 - \sin^2 x) = \sqrt{2} - 4$$
$$2\sin x - 2\sqrt{2}\sin x - 4 + 4\sin^2 x = \sqrt{2} - 4$$
$$2\sin x - 2\sqrt{2}\sin x + 4\sin^2 x - \sqrt{2} = 0$$
$$2\sin x(1 + 2\sin x) - \sqrt{2}(1 + 2\sin x) = 0$$
$$(2\sin x - \sqrt{2})(1 + 2\sin x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x - \sqrt{2} = 0 \\ 1 + 2\sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ лежат точки $-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{4}$.

№13.2 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\sin x+2\sqrt{3}\sin(-x)-4\cos^2 x=\sqrt{3}-4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{7\pi}{3};\ \dfrac{8\pi}{3};\ \dfrac{19\pi}{6}$.

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид:

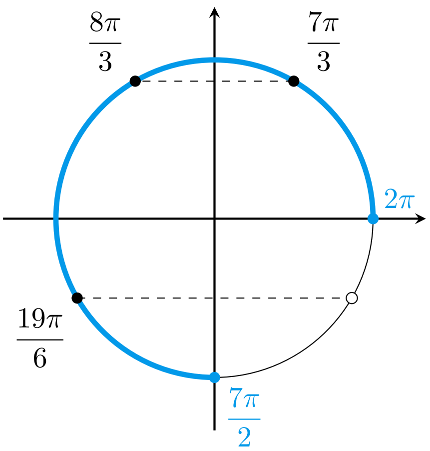
$$2\sin x+2\sqrt{3}\sin(-x)-4(1-\sin^2 x)=\sqrt{3}-4$$
$$2\sin x-2\sqrt{3}\sin x-4+4\sin^2 x=\sqrt{3}-4$$
$$2\sin x-2\sqrt{3}\sin x+4\sin^2 x-\sqrt{3}=0$$
$$2\sin x(1+2\sin x)-\sqrt{3}(1+2\sin x)=0$$
$$(2\sin x-\sqrt{3})(1+2\sin x)=0$$

$$\left[\begin{aligned}&2\sin x-\sqrt{3}=0\\&1+2\sin x=0\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\sin x=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{7\pi}{3}; \dfrac{8\pi}{3}; \dfrac{19\pi}{6}$.

№13.3 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\cos(2\pi+2x)-2+\sqrt{8}\sin x=-\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{4\pi}{3}$.

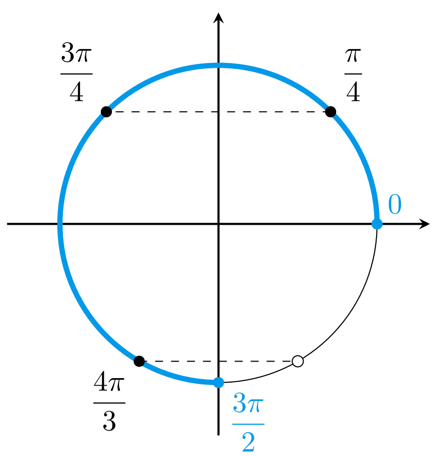
Решение. а) Используя формулу косинуса двойного угла и периодичность косинуса, преобразуем уравнение:

$$\begin{gathered}
2\cos 2x-2+\sqrt{8}\sin x=-\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x\\
2(1-2\sin^2 x)-2+2\sqrt{2}\sin x=-\sqrt{6}+2\sqrt{3}\sin x\\
2\sqrt{2}\sin x+\sqrt{6}=4\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\\
\sqrt{2}(2\sin x+\sqrt{3})=2\sin x(2\sin x+\sqrt{3})\\
(2\sin x+\sqrt{3})(2\sin x-\sqrt{2})=0
\end{gathered}$$

Таким образом, мы получаем

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б)Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{4\pi}{3}$.

№13.4 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\cos(2\pi + 2x) - 2 - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}$. .

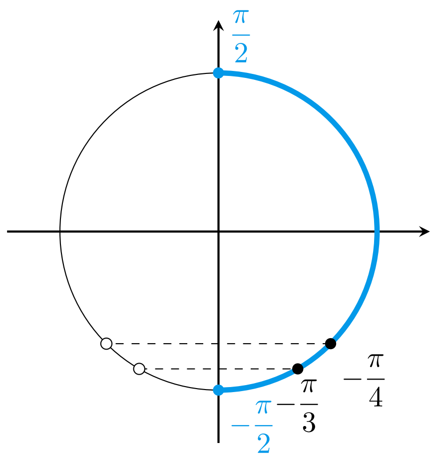
Решение. а) Используя формулу косинуса двойного угла и периодичность косинуса, преобразуем уравнение:

$$\begin{gathered}2\cos 2x - 2 - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x\\ 2(1 - 2\sin^2 x) - 2 - 2\sqrt{2}\sin x = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sin x\\ 2\sqrt{2}\sin x + \sqrt{6} = -4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\\ \sqrt{2}(2\sin x + \sqrt{3}) = -2\sin x(2\sin x + \sqrt{3})\\ (2\sin x + \sqrt{3})(2\sin x + \sqrt{2}) = 0\end{gathered}$$

Таким образом, мы получаем

$$\left[\begin{aligned}\sin x &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned}x &= -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x &= -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x &= -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x &= -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}$.

№13.5 (Центр (Не подтверждено))

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}75 = \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б)$-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

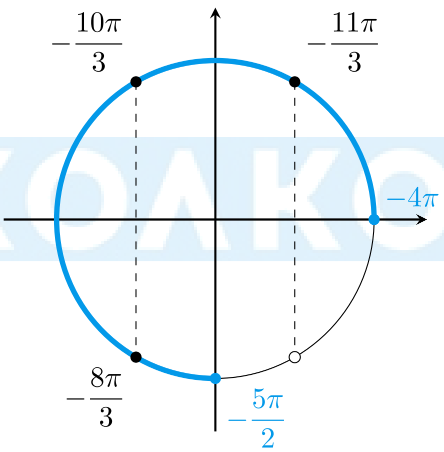
Решение. а) Используя формулу косинуса двойного угла, преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 + 0{,}75 = \cos^2 x$$
$$\cos^2 x - 0{,}25 = 0$$
$$\cos x = \pm\frac{1}{2}$$

Таким образом, мы получаем

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\frac{11\pi}{3}$; $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$

№13.6 (Центр)

а) Решите уравнение $2\sin(-x) + 2\sqrt{3} - 4\cos^2 x = 2 - \sqrt{3}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: .

Решение.

№13.7 (Центр)

а) Решите уравнение $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} - 2\sin(x + \pi)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б)$-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{8\pi}{3}$.

Решение. а) Используя формулу приведения и основное тригонометрическое тождество, преобразуем уравнение

$$2-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}-2\sin(x+\pi)$$

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}+2\sin x$$

$$2\sin^2 x+\sin x(\sqrt{3}-2)-\sqrt{3}=0$$

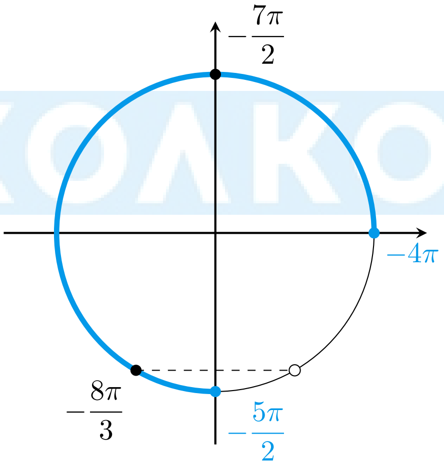
$$t=\sin x\ ,\ t\in[-1;1]$$

$$2t^2+t(\sqrt{3}-2)-\sqrt{3}=0$$

$$D=(\sqrt{3}-2)^2+8\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{3}+2)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{8\pi}{3}$.

№13.8 (Центр)

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin(x-\pi)=\sqrt{2}-2\sin x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. а) По формуле приведения:

$$\sin(x-\pi)=-\sin x.$$

По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos 2x=1-\sin^2 x.$$

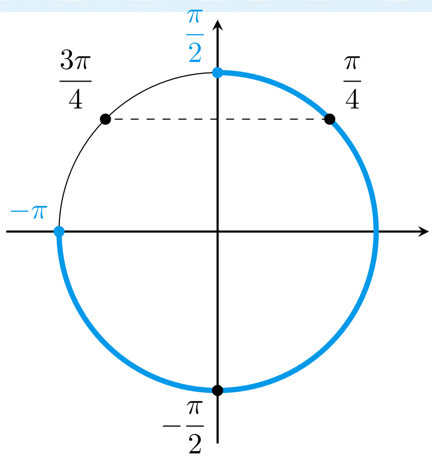
Сделаем полученные замены и перенесем всё в левую сторону:

$$1-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sqrt{2}(-\sin x)-\sqrt{2}+2\sin x=0$$
$$1-1+2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}+2\sin x=0$$
$$2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}+2\sin x=0$$
$$2\sin x(\sin x+1)-\sqrt{2}(\sin x+1)=0$$
$$(2\sin x-\sqrt{2})\cdot(\sin x+1)=0$$

Получаем

$$\left[\begin{aligned}&2\sin x-\sqrt{2}=0\\&\sin x+1=0\end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned}&\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\&\sin x=-1\end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}$.

Задачи №14. Решения

№14.1 (Дальний восток)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 5MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 12.

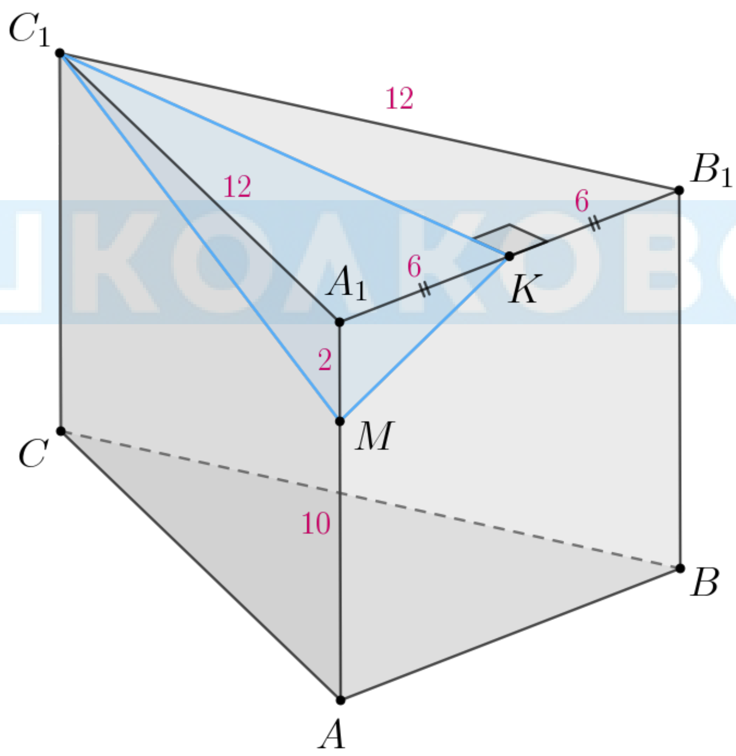
Ответ: б) $6\sqrt{30}$.

Решение. а) Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник. Следовательно, медиана C_1K является также и высотой треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда $KC_1 \perp A_1B_1$.

Также так как призма правильная, то $KC_1 \perp AA_1$.

Получили, что KC_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости (ABB_1), следовательно, $KC_1 \perp (ABB_1)$.

Так как $\alpha \perp (ABB_1)$, $K \in \alpha$ и $KC_1 \perp (ABB_1)$, то $KC_1 \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.



б) Выше мы доказали, что $KC_1 \perp (ABB_1)$. Но тогда $KC_1 \perp MK$, следовательно, MKC_1 — прямоугольный треугольник и его площадь можно найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2} MK \cdot C_1K$$

Так как все ребра призмы равны 12, то $A_1K = KB_1 = 6$. Далее, из того, что $AM : MA_1 = 5 : 1$, получаем $AM = 10$, $MA_1 = 2$.

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle A_1MK$:

$$MK^2 = A_1M^2 + A_1K^2$$
$$MK^2 = 4 + 36 = 40 \quad \Rightarrow \quad MK = 2\sqrt{10}$$

По теореме Пифагора для $\triangle A_1C_1K$:

$$C_1K^2 = C_1A_1^2 - A_1K^2$$
$$C_1K^2 = 144 - 36 = 108 \quad \Rightarrow \quad C_1K = 6\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2}MK \cdot C_1K = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{3} = 6\sqrt{30}.$$

№14.2 (Дальний восток)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $A_1M = 2AM$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 20.

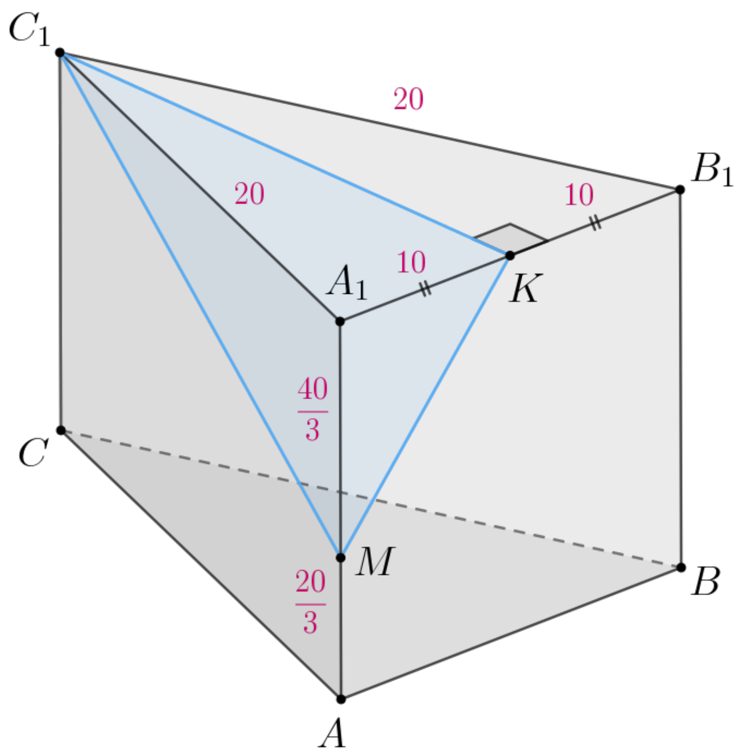
Ответ: б) $\dfrac{250\sqrt{3}}{3}$.

Решение. а) Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник. Следовательно, медиана C_1K является также и высотой треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда $KC_1 \perp A_1B_1$.

Также так как призма правильная, то $KC_1 \perp AA_1$.

Получили, что KC_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости (ABB_1), следовательно, $KC_1 \perp (ABB_1)$.

Так как $\alpha \perp (ABB_1)$, $K \in \alpha$ и $KC_1 \perp (ABB_1)$, то $KC_1 \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.



б) Выше мы доказали, что $KC_1 \perp (ABB_1)$. Но тогда $KC_1 \perp MK$, следовательно, MKC_1 — прямоугольный треугольник и его площадь можно найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2} MK \cdot C_1K$$

Так как все ребра призмы равны 20, то $A_1K = KB_1 = 10$. Далее, из того, что $AM : MA_1 = 1 : 2$, получаем $AM = \frac{20}{3}$, $MA_1 = \frac{40}{3}$.
Тогда по теореме Пифагора для $\triangle A_1MK$:

$$MK^2 = A_1M^2 + A_1K^2$$
$$MK^2 = \frac{40^2}{9} + 10^2 = \frac{10^2 \cdot 25}{9} \quad \Rightarrow \quad MK = \frac{50}{3}$$

По теореме Пифагора для $\triangle A_1C_1K$:

$$C_1K^2 = C_1A_1^2 - A_1K^2$$
$$C_1K^2 = 400 - 100 = 300 \quad \Rightarrow \quad C_1K = 10\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} MK \cdot C_1K = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{3} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{250\sqrt{3}}{3}.$$

№14.3 (Центр (не подтверждено))

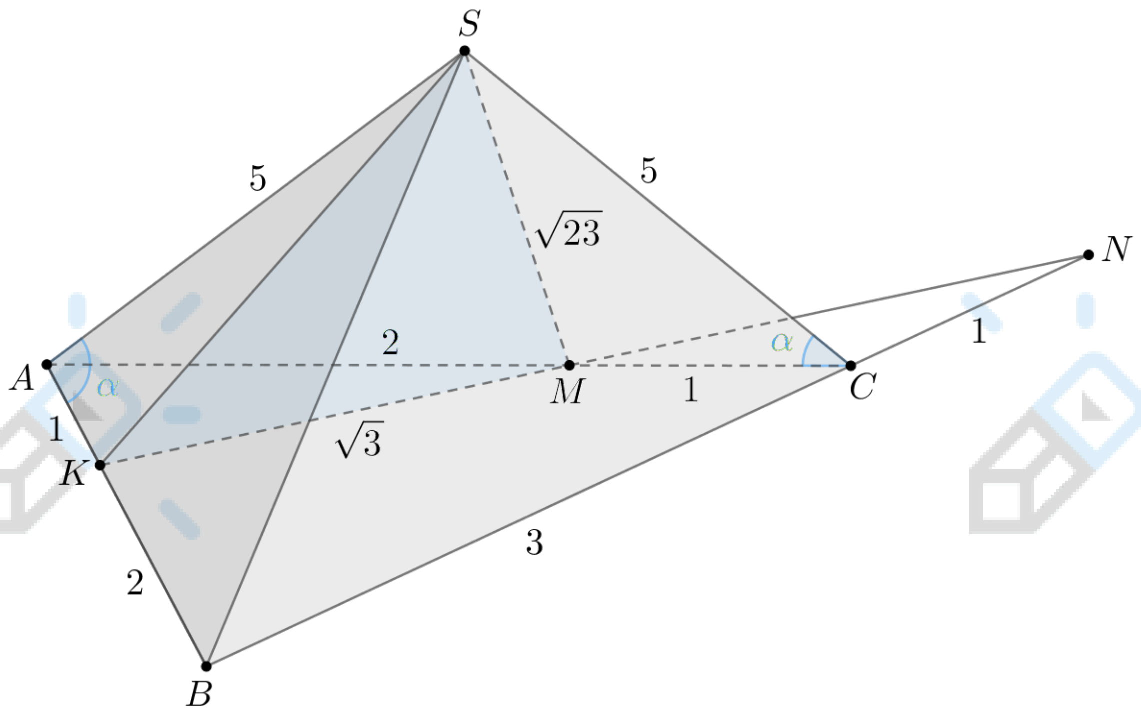
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро SA равно 5. На ребре AC отмечена точка M, а на продолжении ребра BC за точку C — точка N так, что $CM = CN = 1$.
а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью SNM является равнобедренным треугольником.
б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью SNM.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{267}}{4}$.

Решение. а) Пусть прямая NM пересекает ребро AB в точке K. Тогда $\triangle SMK$ — сечение пирамиды плоскостью SMN. Докажем, что $SM = SK$.
Применим теорему Менелая для $\triangle ABC$ и прямой NK :

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CN}{NB} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BK}{KA} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BK}{KA} = \frac{2}{1}$$

Учитывая также, что $BK + KA = BA = 3$, получаем, что $BK = 2$, $KA = 1$.
Так как пирамида правильная, то боковые грани представляют собой равные равнобедренные треугольники. Следовательно, $\angle SAK = \angle SCM = \alpha$.
Тогда $\triangle SAK = \triangle SCM$ по двум сторонам и углу между ними: $SA = SC = 5$, $AK = CM = 1$, $\angle SAK = \angle SCM = \alpha$.
Отсюда следует, что $SK = SM$.



б) Из теоремы косинусов для $\triangle SCA$ следует, что

$$\cos\alpha = \frac{SC^2 + AC^2 - SA^2}{2\cdot SC\cdot AC} = \frac{5^2+3^2-5^2}{2\cdot 5\cdot 3} = \frac{3}{10}$$

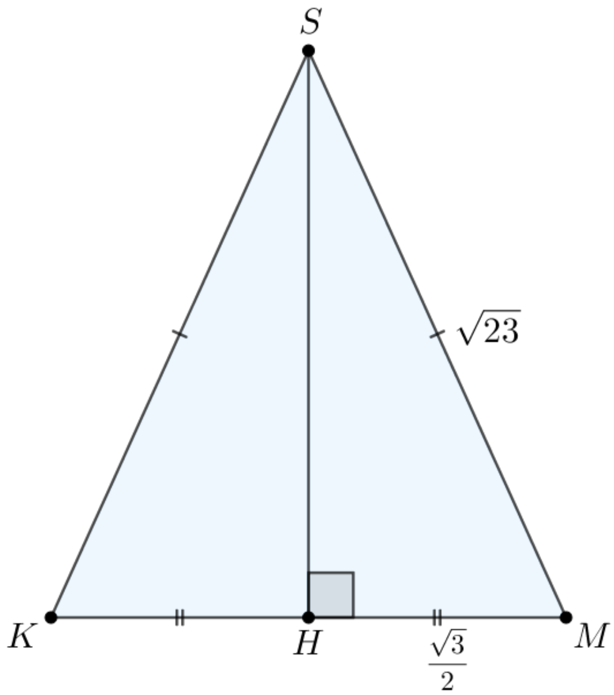
Применим теорему косинусов для $\triangle SCM$:

$$SM^2 = SC^2 + MC^2 - 2\cdot SC\cdot MC\cdot\cos\alpha = 5^2 + 1^2 - 2\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{3}{10} = 23$$

Так как $\triangle ABC$ — правильный, то $\angle MAK = 60^\circ$.
Применим теорему косинусов для $\triangle MAK$:

$$MK^2 = MA^2 + KA^2 - 2\cdot MA\cdot KA\cdot\cos 60^\circ = 2^2 + 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 3$$

Рассмотрим $\triangle SMK$. Проведем высоту SH. Тогда она является и медианой, следовательно, $MH = \frac{1}{2}MK$.



По теореме Пифагора для $\triangle SHM$:

$$SH^2 = SM^2 - MH^2 = 23 - \frac{3}{4} = \frac{89}{4} \quad \Rightarrow \quad SH = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

Следовательно, площадь сечения равна

$$S_{SMK} = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{89}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{267}}{4}$$

№14.4 (Центр)

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.

а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.

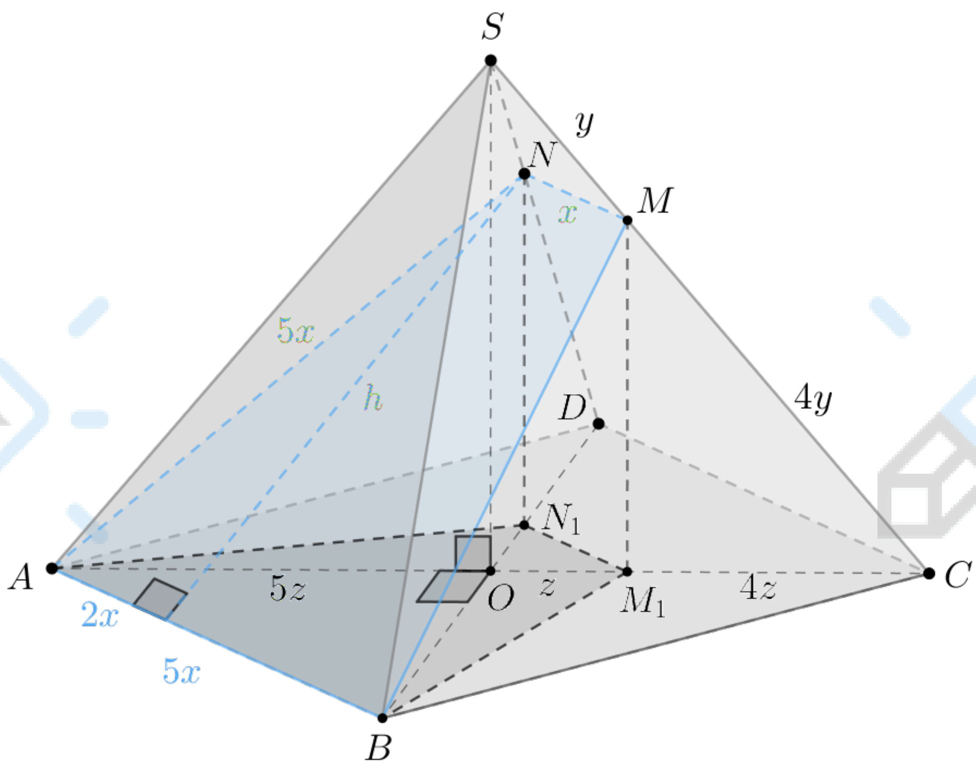
б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

Ответ: б) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Решение. а) Рассмотрим три попарно пересекающиеся плоскости: (SCD), (ABC), α. Прямые CD, AB и MN — их линии пересечения. Так как $AB \parallel CD$, то по теореме «о домике» имеем: $MN \parallel AB \parallel CD$. Тогда $\triangle SMN \sim \triangle SCD \quad \Rightarrow$

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{MN}{CD} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{5}$$

Отсюда следует, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.



б) Пусть $AB = BM = AN = 5x$, $MN = x$.
Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Так как пирамида правильная, то SO — высота этой пирамиды.
В плоскости SAC проведем $MM_1 \parallel SO$. Тогда M_1 — проекция точки M на плоскость ABC.
В плоскости SBD проведем $NN_1 \parallel SO$. Тогда N_1 — проекция точки N на плоскость ABC.
Значит, четырехугольник ABM_1N_1 — проекция сечения $ABMN$ на плоскость ABC.
Если φ — угол между плоскостями ABM и ABC, то

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABM_1N_1}}{S_{ABMN}}$$

Рассмотрим $ABMN$. Это равнобедренная трапеция. Пусть h — ее высота. Тогда образуется прямоугольный треугольник с гипотенузой $5x$ и катетами h и $2x$. Следовательно, по теореме Пифагора:

$$h^2 = (5x)^2 - (2x)^2 = 21x^2 \quad \Rightarrow \quad h = x\sqrt{21}$$

Значит, площадь сечения равна

$$S_{ABMN} = \frac{x+5x}{2} \cdot x\sqrt{21} = 3x^2\sqrt{21}$$

По теореме о пропорциональных отрезках $CM_1 : M_1O = CM : MS = 4 : 1$. Аналогично $DN_1 : N_1O = 4 : 1$.
Пусть $AC = BD = 10z$. Тогда $M_1O = N_1O = z$, $AO = BO = 5z$.
Диагонали AM_1 и BN_1 четырехугольника ABM_1N_1 взаимно перпендикулярны, следовательно, его площадь равна

$$S_{ABM_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot AM_1 \cdot BN_1 = \frac{1}{2} \cdot 6z \cdot 6z = 18z^2$$

Но $10z = 5x\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$

$$S_{ABM_1N_1} = 9x^2$$

Тогда искомый косинус равен

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABM_1N_1}}{S_{ABMN}} = \frac{9x^2}{3x^2\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

№14.5 (Центр)

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $2\sqrt{3}$.
а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.
б) В каком отношении точка K лежит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $36\sqrt{6}$?

Ответ: .

Решение.

№14.6 (Запад)

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении $AK : KB = 3 : 1$. Точка L — середина ребра BC. Плоскость α проходит через точки K и L и пересекает ребра B_1C_1 и A_1B_1 в точках M и N соответственно. Известно, что $B_1M : MC_1 = 3 : 1$.
а) Докажите, что $MN \perp AB$.
б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы, если все рёбра призмы равны.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 8$.

Решение.

Задачи №15. Решения

№15.1 (Дальний восток)

Решите неравенство
$$\frac{2^{3x}-2\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+2}-16}{x-1}\geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$.

Решение. В данной задаче будем применять метод рационализации, а для этого нам необходимо разложить числитель на множители. Сделаем замену $t=2^x$. Тогда числитель раскладывается следующим образом:
$$t^3-8t^2+20t-16=(t-2)^2(t-4)$$

Тогда все неравенство равносильно:
$$\frac{(2^x-2^1)^2(2^x-2^2)}{x-1}\geqslant 0.$$

По методу рационализации имеем:
$$\frac{(2-1)^2(x-1)^2(2-1)(x-2)}{x-1}\geqslant 0$$
$$\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-1}\geqslant 0$$

По методу интервалов:

Отсюда получаем, что
$$x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$$

№15.2 (Сибирь)

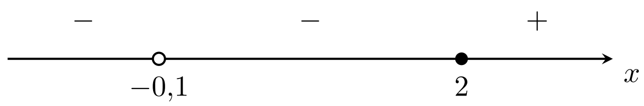
Решите неравенство
$$\frac{27^x-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+5}-729}{50x^2+10x+0{,}5}\leqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;-0{,}1)\cup(-0{,}1;2]$.

Решение. Перепишем неравенство:
$$\frac{(3^x-3^2)^3}{2\cdot\left(5x+\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant 0$$

Используем метод рационализации:
$$\frac{(3-1)^3(x-2)^3}{2\cdot\left(5x+\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем ответ:

$$x \in (-\infty; -0{,}1) \cup (-0{,}1; 2]$$

№15.3 (Сибирь)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1} - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+2} - 1}{50x^2 + 50x + 12{,}5} \geqslant 0$$

Ответ: $x \in \left[-1; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство, используя формулы куба разности и квадрата суммы:

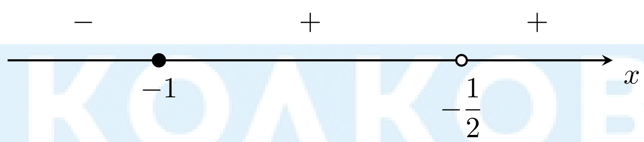
$$\frac{(3^{x+1} - 3^0)^3}{12{,}5 \cdot (2x+1)^2} \geqslant 0$$

Используем метод рационализации:

$$\frac{(3-1)^3(x+1-0)^3}{(2x+1)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{(x+1)^3}{(2x+1)^2} \geqslant 0$$

По методу интервалов:



Отсюда получаем:

$$x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

№15.4 (Сибирь)

Решите неравенство

$$\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60{,}5} \geqslant 0$$

Ответ: $x \in \left[1; \dfrac{11}{10}\right) \cup \left(\dfrac{11}{10}; +\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство, используя формулы куба разности и квадрата разности:

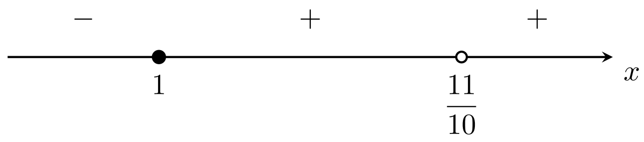
$$\frac{(3^x - 3^1)^3}{50 \cdot (x - \frac{11}{10})^2} \geqslant 0$$

Используем метод рационализации:

$$\frac{(3-1)^3(x-1)^3}{(x - \frac{11}{10})^2} \geqslant 0$$

$$\frac{(x-1)^3}{(x - \frac{11}{10})^2} \geqslant 0$$

По методу интервалов:



Отсюда получаем:

$$x \in \left[1; \frac{11}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{10}; +\infty\right)$$

№15.5 (Центр (Не подтверждено))

Решите неравенство

$$\frac{2}{2^x + 10} \leqslant \frac{3}{2^{x+1} - 1}$$

Ответ: $x \in (-1; 5]$.

Решение. Перепишем неравенство:

$$\frac{2}{2^x + 10} \leqslant \frac{3}{2 \cdot 2^x - 1}$$

Введем замену $t = 2^x$.
Тогда получится:

$$\frac{2}{t + 10} \leqslant \frac{3}{2t - 1}$$

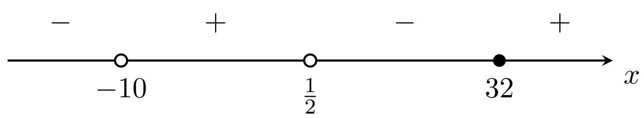
$$\frac{2}{t + 10} - \frac{3}{2t - 1} \leqslant 0$$

$$\frac{2(2t - 1) - 3(t + 10)}{(t + 10)(2t - 1)} \leqslant 0$$

$$\frac{4t - 2 - 3t - 30}{(t + 10)(2t - 1)} \leqslant 0$$

$$\frac{t - 32}{(t + 10)(2t - 1)} \leqslant 0$$

По методу интервалов:



Получаем: $t \in (-\infty; -10) \cup \left(\frac{1}{2}; 32\right]$
Делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x < -10 \\ \dfrac{1}{2} < 2^x \leqslant 32 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ 2^{-1} < 2^x \leqslant 2^5 \end{array}\right.$$

Итого: $x \in (-1; 5]$.

№15.6 (откуда)

Решите неравенство

$$\frac{27x^3 + 9x^2 - 3x - 1}{64^{x^2} - 4 \cdot 8^{x^2} + 4} \geqslant 0.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Решение. Рассмотрим числитель дроби:

$$\begin{gathered}27x^3+9x^2-3x-1=\\=9x^2(3x+1)-(3x+1)=\\=(9x^2-1)\cdot(3x+1)=\\=(3x+1)^2\cdot(3x-1)\end{gathered}$$

Рассмотрим знаменатель дроби:

$$\begin{gathered}64^{x^2}-4\cdot 8^{x^2}+4=\\=\left(8^2\right)^{x^2}-2\cdot 8^{x^2}\cdot 2+2^2\\=\left(8^{x^2}\right)^2-2\cdot 8^{x^2}\cdot 2+2^2=\left(8^{x^2}-2\right)^2\end{gathered}$$

Сделаем полученные замены в исходном неравенстве:

$$\frac{(3x+1)^2\cdot(3x-1)}{\left(8^{x^2}-2\right)^2}\geqslant 0$$

Сделаем замену $8^{x^2}=\left(2^3\right)^{x^2}=2^{3x^2}$ в знаменателе и вынесем 3^3 за скобку в числителе:

$$\frac{3^3\cdot\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{\left(2^{3x^2}-2\right)^2}\geqslant 0$$

Решим данное неравенство методом рационализации:

$$\frac{\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{\left((2-1)\left(3x^2-1\right)\right)^2}\geqslant 0$$

$$\frac{\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{\left(3x^2-1\right)^2}\geqslant 0$$

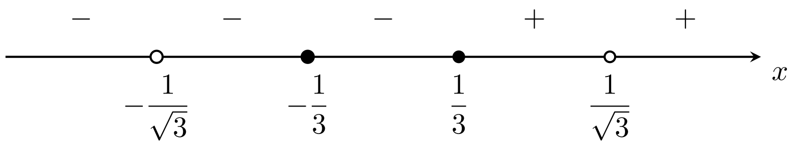
Воспользуемся формулой разности квадратов для знаменателя:

$$\begin{gathered}\left(3x^2-1\right)^2=3^2\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2=\\=3^2\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^2\end{gathered}$$

Получим неравенство:

$$\frac{\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\geqslant 0$$

Полученное неравенство можно решить методом интервалов:



Таким образом,

$$x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\}.$$

№15.7 (Центр)

Решите неравенство

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{4^{x^2} - 16 \cdot 2^{x^2} + 64} \leqslant 0$$

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; -1\right] \cup \{1\}$.

Решение. Рассмотрим числитель дроби:

$$\begin{gathered} x^3 - x^2 - x + 1 = \\ = x^2(x-1) - (x-1) = \\ = (x^2 - 1) \cdot (x-1) = \\ = (x-1)^2 \cdot (x+1). \end{gathered}$$

Рассмотрим знаменатель дроби:

$$\begin{gathered} 4^{x^2} - 16 \cdot 2^{x^2} + 64 = \\ = \left(2^2\right)^{x^2} - 2 \cdot 2^{x^2} \cdot 8 + 8^2 = \\ = \left(2^{x^2}\right)^2 - 2 \cdot 2^{x^2} \cdot 8 + 8^2 = \left(2^{x^2} - 8\right)^2. \end{gathered}$$

Сделаем полученные замены в исходном неравенстве:

$$\frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)}{\left(2^{x^2} - 8\right)^2} \leqslant 0$$

Сделаем замену $8 = 2^3$ в знаменателе:

$$\frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)}{\left(2^{x^2} - 2^3\right)^2} \leqslant 0$$

Решим данное неравенство методом рационализации:

$$\frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)}{\left((2-1)\left(x^2 - 3\right)\right)^2} \leqslant 0$$

$$\frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)}{\left(x^2 - 3\right)^2} \leqslant 0$$

Воспользуемся формулой разности квадратов для знаменателя:

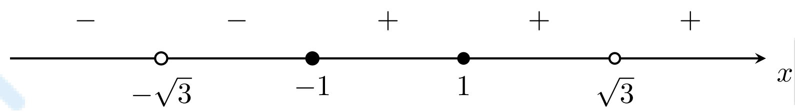
$$\left(x^2-3\right)^2=\left(x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2=$$

$$=\left(\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)\right)^2=\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2$$

Получим неравенство:

$$\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)}{\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2}\leqslant 0$$

Полученное неравенство можно решить методом интервалов:



Таким образом,

$$x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};-1\right]\cup\{1\}.$$

№15.8 (Сибирь)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1}{50x^2-50x+12{,}5}\geqslant 0$$

Ответ: $x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство, используя формулы куба разности и квадрата разности:

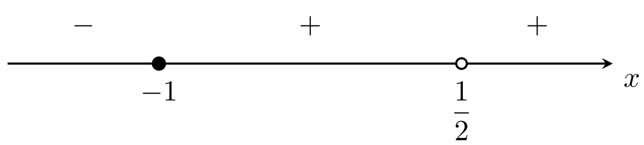
$$\frac{(3^{x+1}-3^0)^3}{12{,}5\cdot(2x-1)^2}\geqslant 0$$

Используем метод рационализации:

$$\frac{(3-1)^3(x+1-0)^3}{(2x-1)^2}\geqslant 0$$

$$\frac{(x+1)^3}{(2x-1)^2}\geqslant 0$$

По методу интервалов:



Отсюда получаем:

$$x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$$

.

Задачи №16. Решения

№16.1 (Дальний восток)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторое целое число лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 24,5 млн рублей?

Ответ: 5 лет.

Решение. Пусть n — число лет, на которое взят кредит. Так как годовой процент в банке равен 25%, то это значит, что каждый год долг увеличивается на четверть. Из условия следует, что система выплат дифференцированная, следовательно, каждый год долг должен уменьшаться на $\frac{1}{n}$ часть, то есть на $\frac{14}{n}$ млн рублей.

Составим таблицу. Вычисления будем вести в млн рублей.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата
1	14	$14+\frac{1}{4}\cdot 14$	$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot 14$
2	$\frac{n-1}{n}\cdot 14$	$\frac{n-1}{n}\cdot 14+\frac{1}{4}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 14$	$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 14$
...	...	...	...
n	$\frac{14}{n}$	$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{n}$	$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{n}$

Таким образом, общая сумма выплат составляет

$$\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot 14+\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 14+\dots+\frac{14}{n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{n}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 14\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}+\dots+\frac{1}{n}\right)+n\cdot\frac{14}{n}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 14\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\cdot n+14=\frac{7}{4}(n+1)+14$$

В больших скобках мы получили сумму арифметической прогрессии, где первый член равен 1, n-ый член равен $\frac{1}{n}$, количество членов равно n.

Таким образом, так как общая сумма выплат равна по условию 24,5 млн рублей, то получаем

$$\frac{7}{4}(n+1)+14=24{,}5\quad\Leftrightarrow\quad n=5$$

№16.2 (ЕАО)

15 декабря 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 72 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

Ответ: 4,635 млн рублей.

Решение. Составим таблицу:

Год	долг до %, млн рублей	долг после %, млн рублей	платеж, млн рублей	долг после платежа, млн рублей
1	18	$18+18\cdot\frac{1}{100}$	$18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}$	$\frac{71}{72}\cdot 18$
...	...	...	...	...
13	$\frac{60}{72}\cdot 18$	$\frac{60}{72}\cdot 18+\frac{60}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}$	$\frac{60}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}$	$\frac{59}{72}\cdot 18$
...	...	...	...	...
24	$\frac{49}{72}\cdot 18$	$\frac{49}{72}\cdot 18+\frac{49}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}$	$\frac{49}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}$	$\frac{48}{72}\cdot 18$
...	...	...	...	...

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 13-го по 24-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{\frac{60}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}+\frac{49}{72}\cdot 18\cdot\frac{1}{100}+\frac{18}{72}}{2}\cdot 12=4{,}635$$

№16.3 (Камчатский край)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

Ответ: 4,665 млн рублей.

Решение. Составим таблицу:

месяц	долг до %, млн	долг после %, млн	платеж, млн	долг после платежа, млн
1	6	$6+6\cdot\frac{3}{100}$	$6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	$\frac{23}{24}\cdot 6$
...	...	...	...	...
12	$\frac{13}{24}\cdot 6$	$\frac{13}{24}\cdot 6+\frac{13}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}$	$\frac{13}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	$\frac{12}{24}\cdot 6$
...	...	...	...	...
24	$\frac{1}{24}\cdot 6$	$\frac{1}{24}\cdot 6+\frac{1}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}$	$\frac{1}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	0

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 1-го по 12-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma = \frac{6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}+\frac{13}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}}{2}\cdot 12 = 4{,}665$$

№16.4 (Камчатский край)

15 декабря 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2027 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

Ответ: 3,585 млн рублей.

Решение. Составим таблицу:

месяц	долг до %, млн	долг после %, млн	платеж, млн	долг после платежа, млн
1	6	$6+6\cdot\frac{3}{100}$	$6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	$\frac{23}{24}\cdot 6$
...	...	...	...	...
13	$\frac{12}{24}\cdot 6$	$\frac{12}{24}\cdot 6+\frac{12}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}$	$\frac{12}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	$\frac{11}{24}\cdot 6$
...	...	...	...	...
24	$\frac{1}{24}\cdot 6$	$\frac{1}{24}\cdot 6+\frac{1}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}$	$\frac{1}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}$	0

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 13-го по 24-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma = \frac{\frac{12}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}+\frac{1}{24}\cdot 6\cdot\frac{3}{100}+\frac{6}{24}}{2}\cdot 12 = 3{,}585$$

№16.5 (Сибирь)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму тыс. рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равна сумма кредита, если общая сумма платежей составила 1449 тыс рублей?

Ответ: 900 тыс. рублей.

Решение. Пусть S сумма кредита, тогда составим таблицу:

месяц	долг до %, тыс	долг после %, тыс	платеж, тыс	долг после платежа, тыс
1	S	$S+S\cdot\frac{2}{100}$	$S\cdot\frac{2}{100}+\frac{S}{60}$	$\frac{59}{60}\cdot S$
2	$\frac{59}{60}\cdot S$	$\frac{59}{60}\cdot S+\frac{59}{60}\cdot S\cdot\frac{2}{100}$	$\frac{59}{60}\cdot S\cdot\frac{2}{100}+\frac{S}{60}$	$\frac{58}{60}\cdot S$
…	…	…	…	…
60	$\frac{1}{60}\cdot S$	$\frac{1}{60}\cdot S+\frac{1}{60}\cdot S\cdot\frac{2}{100}$	$\frac{1}{60}\cdot S\cdot\frac{2}{100}+\frac{S}{60}$	0

Просуммируем платежи за весь период, то есть с 1-го по 60-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{S\cdot\frac{2}{100}+\frac{S}{60}+\frac{1}{60}\cdot S\cdot\frac{2}{100}+\frac{S}{60}}{2}\cdot 60=1449$$

$$\frac{161\cdot S}{100}=1449$$

$$S=900$$

№16.6 (Центр (Не подтверждено))

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга одним платежом;
— 15-го числа каждого месяца (с января 2027 года по март 2028 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15 марта 2028 года долг составит 200 тыс. рублей;
— 15 апреля 2028 года кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма платежей после полного погашения составит 612 тыс. рублей?

Ответ: 500 000 руб.

Решение. Пусть A тыс. рублей – сумма, взятая в кредит.
Фраза “с января 2027 года по март 2028 года включительно долг должен быть на одну и ту же величину меньше” означает, что в течение 15 месяцев долг уменьшается на x тыс. рублей.
Каждый такой платеж состоит из двух частей: первая часть всегда одинаковая – это x тыс. рублей; вторая часть состоит из процентов, “набежавших” на долг в этом месяце.
Составим таблицу:

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Сумма платежа	Долг после платежа
1	A	$A+0{,}02\cdot A$	$0{,}02\cdot A+x$	$A-x$
2	$A-x$	$A-x+0{,}02\cdot(A-x)$	$0{,}02\cdot(A-x)+x$	$A-2x$
3	$A-2x$	$A-2x+0{,}02\cdot(A-2x)$	$0{,}02\cdot(A-2x)+x$	$A-3x$
...	...	...	...	...
15	$A-14x$	$A-14x+0{,}02\cdot(A-14x)$	$0{,}02\cdot(A-14x)+x$	$A-15x=200$
16	$A-15x$	$A-15x+0{,}02\cdot(A-15x)$	$0{,}02\cdot(A-15x)+A-15x$	0

Так как 15 марта 2028 года, то есть в 15 месяце долг составит 200 тыс. рублей, получаем уравнение:

$$A-15x=200\text{ тыс. рублей.}$$

Выразим x :

$$x=\frac{A-200}{15}$$

Общая сумма платежей равна:

$$0{,}02\cdot A+x+0{,}02\cdot(A-x)+x+\dots+0{,}02\cdot(A-14x)+x+0{,}02\cdot(A-15x)+A-15x=$$
$$=0{,}02\cdot 16A+15x-0{,}02\cdot x\cdot(1+2+3+\dots+15)+A-15x=$$
$$=0{,}32\cdot A-0{,}02\cdot x\cdot\left(\frac{1+15}{2}\cdot 15\right)+A=$$
$$=1{,}32\cdot A-2{,}4\cdot x=612\text{ тыс. рублей}$$

Подставим значение x из первого уравнения:

$$1{,}32\cdot A-2{,}4\cdot\frac{A-200}{15}=612$$
$$1{,}32\cdot A-\frac{24}{150}\cdot A+\frac{480}{15}=612$$
$$1{,}32\cdot A-0{,}16\cdot A+32=612$$
$$1{,}16\cdot A=580$$
$$A=500$$

Таким образом, кредит планируется взять на сумму 500 000 рублей.

№16.7 (Центр)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r, если общая сумма платежей в 2031 году составила 3951 тыс. рублей?

Ответ: 1,5%.

Решение. Составим таблицу:

месяц	долг до %, тыс	долг после %, тыс	платеж, тыс	долг после платежа, тыс
1	18	$18+18\cdot\frac{r}{100}$	$18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}$	$\frac{59}{60}\cdot 18$
...	...	...	...	...
49	$\frac{12}{60}\cdot 18$	$\frac{12}{60}\cdot 18+\frac{12}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{12}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}$	$\frac{11}{60}\cdot 18$
...	...	...	...	...
60	$\frac{1}{60}\cdot 18$	$\frac{1}{60}\cdot 18+\frac{1}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{1}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}$	0

Просуммируем платежи за 2031 год, то есть с 49-го по 60-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{\frac{12}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}+\frac{1}{60}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{60}}{2}\cdot 12=3{,}951$$

$$\frac{117\cdot r}{100}+3{,}6=3{,}951$$

$$r=1{,}5$$

№16.8 (Центр)

В июле 2025 планируется взять кредит в банке сроком на четыре года на сумму 2 млн рублей. Условия его возврата таковы:
– в январе 2026 и 2027 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2028 и 2029 годов долг возрастает на $2r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем;
– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Найдите r, если общая переплата по кредиту после полного его погашения составит 650 тыс. рублей.

Ответ: 10.

Решение.

№16.9 (Москва)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 7830 тыс. рублей?

Ответ: 1%.

Решение. Составим таблицу:

месяц	долг до %, млн	долг после %, млн	платеж, млн	долг после платежа, млн
1	18	$18+18\cdot\frac{r}{100}$	$18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{36}$	$\frac{35}{36}\cdot 18$
...	...	...	...	...
12	$\frac{25}{36}\cdot 18$	$\frac{25}{36}\cdot 18+\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{25}{36}$	$\frac{24}{36}\cdot 18$
...	...	...	...	...
36	$\frac{1}{36}\cdot 18$	$\frac{1}{36}\cdot 18+\frac{1}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{1}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{36}$	0

Просуммируем платежи за 2027 год, то есть с 1-го по 12-ый месяцы. Поскольку кредит выплачивается по дифференцированной схеме, то платежи образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма вычисляется как

$$\Sigma=\frac{18\cdot\frac{r}{100}+\frac{18}{36}+\frac{25}{36}\cdot 18\cdot\frac{r}{100}+\frac{25}{36}}{2}\cdot 12=7{,}83$$

$$\frac{183\cdot r}{100}+6=7{,}83$$

$$r=1$$

№16.10 (Сибирь)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 48 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– К 15 декабря 2030 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2030 году составит 6390 тыс. рублей

Ответ: вместо этого текста будет ответ задачи.

Решение. вместо этого текста будет решение задачи

№16.11 (Центр)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:
– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– К 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно A, если общая сумма платежей в 2027 году составит 2604 тыс. рублей

Ответ: вместо этого текста будет ответ задачи.

Решение. вместо этого текста будет решение задачи

№16.12 (Сибирь)

15 декабря 2025 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 60 месяцев. Условия возврата кредита таковы:
– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– К 15 декабря 2031 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно A, если общая сумма платежей в 2031 году составит 1356 тыс. рублей

Ответ: вместо этого текста будет ответ задачи.

Решение. вместо этого текста будет решение задачи

№16.13 (непонятно откуда)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:
– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– К 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно A, если общая сумма платежей в 2028 году составит 17925 тыс. рублей

Ответ: вместо этого текста будет ответ задачи.

Решение. вместо этого текста будет решение задачи

№16.14 (Московская область)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r, если общая сумма платежей в 2027 году составила 6165 тыс. рублей?

Ответ: вместо этого текста будет ответ задачи.

Решение. вместо этого текста будет решение задачи

№16.15 (непонятно откуда)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером A млн. рублей на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:
– 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– С 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– К 15 декабря 2028 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно A, если общая сумма платежей в 2028 году составит 4830 тыс. рублей

Ответ: вместо этого текста будет ответ задачи.

Решение. вместо этого текста будет решение задачи

№16.16 (Непонятно, откуда)

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на 48 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2030 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r, если общая сумма платежей в 2030 году составила 3195 тыс. рублей?

Ответ: вместо этого текста будет ответ задачи.

Решение. вместо этого текста будет решение задачи

Задачи №17. Решения

№17.1 (Дальний восток)

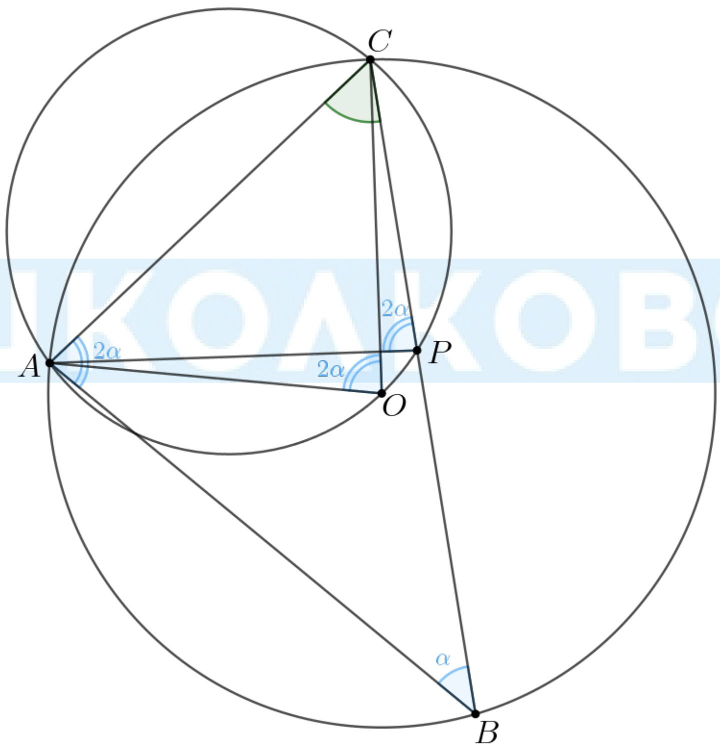
Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

Ответ: б) 5.

Решение. а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$.
Так как O — центр описанной окружности, а $\angle ABC$ является вписанным и опирается на хорду AC, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ как центральный, опирающийся на хорду AC.
Заметим, что так как $AOPC$ — вписанный, то $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$.
Тогда $\triangle ABC \sim \triangle PAC$ по двум углам ($\angle APC = \angle BAC$ и $\angle ACB$ — общий). Что и требовалось доказать.



б) Запишем отношение соответствующих сторон для $\triangle ABC \sim \triangle PAC$:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CP}{AC} \quad \Rightarrow \quad CP = \frac{AC^2}{CB} \quad \Rightarrow \quad CP = \frac{8}{3}$$

Заметим, что из подобия треугольников вытекает, что $\angle PAC = \alpha$, а значит, AP является биссектрисой $\angle BAC$.
По свойству биссектрисы получаем:

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{CP} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{AC \cdot PB}{CP}$$

$$AB = \frac{4 \cdot \left(6 - \dfrac{8}{3}\right)}{\frac{8}{3}} = 5$$

№17.2 (Дальний восток)

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB, если $BC = \sqrt{21}$ и $AC = 3$.

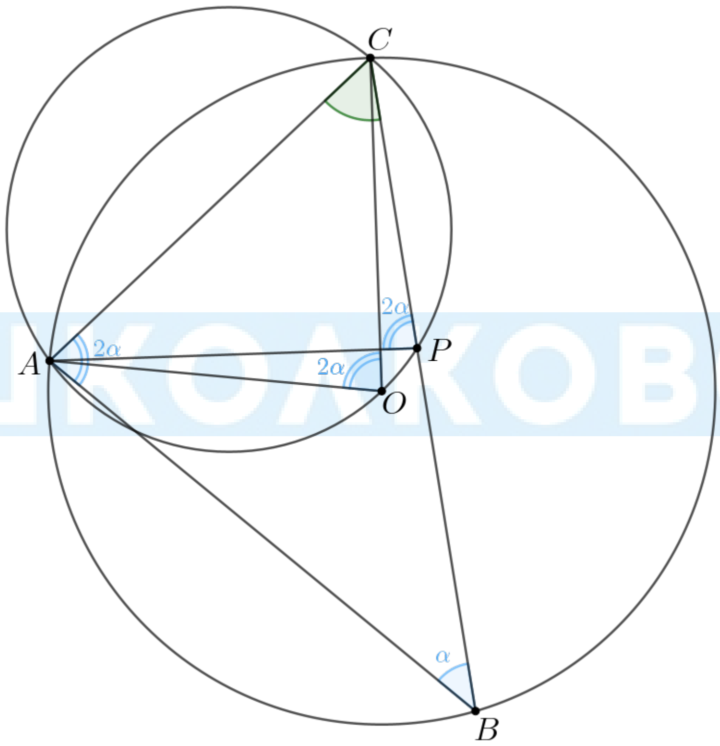
Ответ: б) 4.

Решение. а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$.

Так как O — центр описанной окружности, а $\angle ABC$ является вписанным и опирается на хорду AC, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ как центральный, опирающийся на хорду AC.

Заметим, что так как $AOPC$ — вписанный, то $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$.

Тогда $\triangle ABC \sim \triangle PAC$ по двум углам ($\angle APC = \angle BAC$ и $\angle ACB$ — общий). Что и требовалось доказать.



б) Запишем отношение соответствующих сторон для $\triangle ABC \sim \triangle PAC$:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CP}{AC} \quad \Rightarrow \quad CP = \frac{AC^2}{CB} \quad \Rightarrow \quad CP = \frac{9}{\sqrt{21}}$$

Заметим, что из подобия треугольников вытекает, что $\angle PAC = \alpha$, а значит, AP является биссектрисой $\angle BAC$.

По свойству биссектрисы получаем:

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{CP} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{AC \cdot PB}{CP}$$

$$AB = \frac{3 \cdot \left(\sqrt{21} - \frac{9}{\sqrt{21}}\right)}{\frac{9}{\sqrt{21}}} = 4$$

№17.3 (Сибирь)

В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 10$.

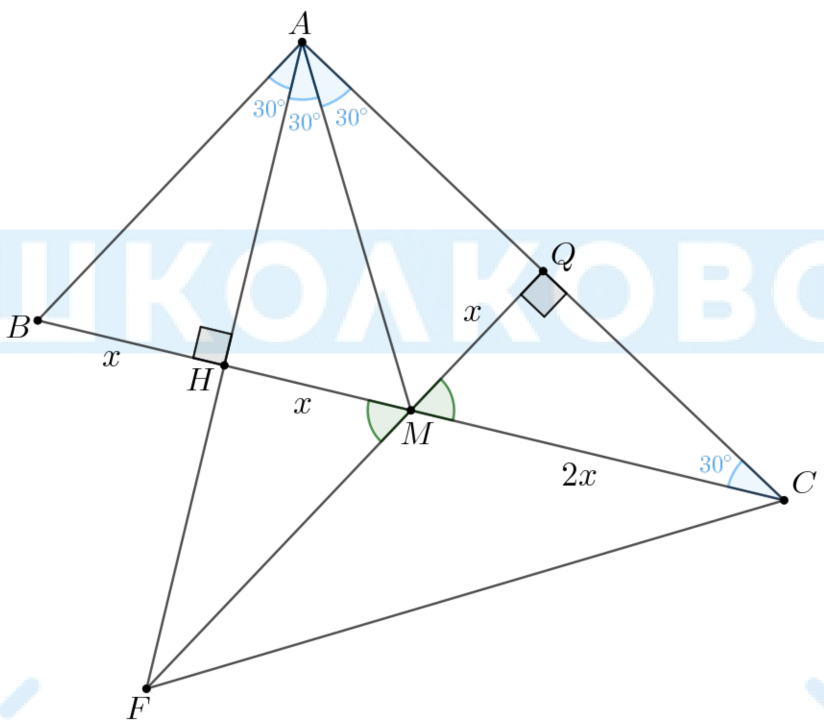
Ответ: б) $25\sqrt{3}$.

Решение. а) Пусть $MQ = x$. Тогда из $\triangle MQC$ получаем, что $MC = 2x$.

Рассмотрим $\triangle HAC$. Так как $\angle ACH = 30°$, то $\angle HAC = 60°$. В силу того, что AM — биссектриса, получаем $\angle HAM = \angle MAQ = 30°$.

Заметим, что $\triangle HAM = \triangle QAM$ по острому углу и гипотенузе, тогда $HM = x$, следовательно, в силу $BM = MC$ получаем $BH = x$.

Таким образом, получили, что высота AH треугольника BAM является и медианой, а значит, также является биссектрисой, следовательно, $\angle BAH = \angle HAM = 30°$.



Тогда имеем:

$$\angle BAC = \angle BAH + \angle HAM + \angle MAQ = 30° + 30° + 30° = 90°$$

Что и требовалось доказать.

б) В прямоугольном треугольнике ABC катет напротив угла $30°$ равен половине гипотенузы, тогда из $AB = 10$ следует, что $4x = BC = 20$. Отсюда $HM = MQ = BH = x = 5$ и $MC = 2x = 10$.

Осталось найти отрезок FH, так как он является высотой к стороне MC в $\triangle FMC$.

Далее, $\angle HMF = \angle QMC$ как вертикальные.

Заметим, что $\triangle HMF = \triangle QMC$ по острому углу и прилежащему катету. Тогда $FM = MC = 10$.

По теореме Пифагора для $\triangle FHM$:

$$FH^2 = FM^2 - HM^2 = 100 - 25 = 75 \quad \Rightarrow \quad FH = 5\sqrt{3}$$

Тогда искомая площадь равна:

$$S_{FMC} = \frac{1}{2} \cdot FH \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3}$$

№17.4 (Центр)

Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M. Диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABM, касается прямых BC и OM.
а) Докажите, что $AB \perp BD$.
б) Отрезки AC и BM пересекаются в точке K. Найдите площадь четырехугольника $KODM$, если $OM = 2$.

Ответ: б) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Решение.

№17.5 (Центр)

В четырёхугольнике $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle LMN = \angle KLM = 60°$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 9$.

Ответ: .

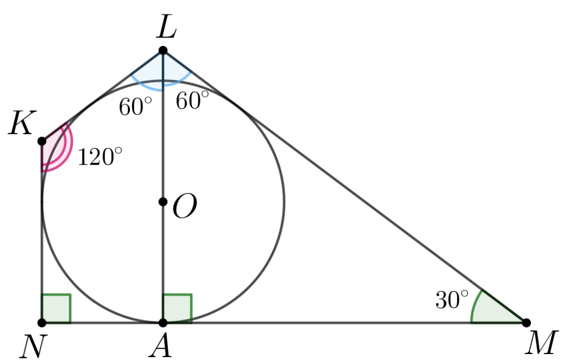
Решение.

№17.6 (Центр)

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle NKL = \angle KLM = 120°$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = \sqrt{3}$.

Ответ: б) $9 - 3\sqrt{3}$.

Решение. а)



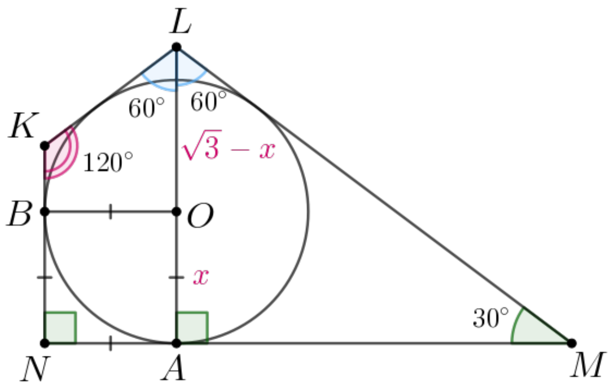
Так как окружность вписана в четырёхугольник, то её центр лежит на пересечении его биссектрис, а значит LO — биссектриса угла $\angle MLK$ и $\angle MLO = \angle KLO = \dfrac{120°}{2} = 60°$.
Так как сумма углов четырёхугольника $LMNK$ равна $360°$, то:

$$\angle LMN = 360° - \angle MNK - \angle NKL - \angle KLM = 360° - 90° - 120° - 120° = 30°$$

Так как OA — радиус в точку касания, $\angle OAM = 90^\circ$. Пусть Точка O не лежит на прямой AL. Тогда $OAML$ — четырёхугольник, и сумма его углов равна 360° :

$$\angle LMA + \angle MAO + \angle AOL + \angle OLM = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad 30^\circ + 90^\circ + \angle AOL + 60^\circ = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle AOL = 180^\circ$$

А так как угол $\angle AOL = 180^\circ$, то точки A, O, L лежат на одной прямой.
б)



Так как катет против угла в 30° равен половине гипотенузы, то в прямоугольном треугольнике LAM имеем $LM = 2 \cdot LA = 2\sqrt{3}$.
По теореме Пифагора $MA^2 + LA^2 = LM^2$, откуда $MA = 3$. Обозначим OA как x. Тогда $LO = LA - x = \sqrt{3} - x$.
Так как окружность вписана в четырёхугольник, то центр окружности лежит на пересечении биссектрис, и MO — биссектриса угла $\angle AML$. Пользуемся основным свойством биссектрисы для треугольника AML и биссектрисы MO :

$$\frac{ML}{LO} = \frac{MA}{OA} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-x} = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{3}.$$

Пусть окружность касается стороны KN в точке B. Тогда $OANB$ — квадрат и $AN = OA = 6 - 3\sqrt{3}$.
Тогда $MN = MA + AN = 3 + 6 - 3\sqrt{3} = 9 - 3\sqrt{3}$

№17.7 (Запад)

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.
а) Докажите, что $BM = PQ$.
б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 12$, $AB = BQ = 15$.

Ответ: б) 13,5.

Решение. а) Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$, по свойству параллелограмма $\angle A = \angle C$, откуда также $\angle QBC = 90^\circ - \alpha$. Так как $\angle A$ и $\angle ABC$ — односторонние, $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$. Тогда $\angle PBQ = \angle ABC - \angle ABP - \angle QBC = 180^\circ - \alpha - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Тогда треугольники BAM и QBP равны по двум сторонам $AB = BQ$ и $AM = BP$ и углу между ними: $\angle BAM = \angle PBQ = \alpha$. Тогда $BM = PQ$.
б) По теореме Пифагора в треугольнике ABP : $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Отсюда $PM = AM - AP = 12 - 9 = 3$. Проведём в треугольнике PBQ высоту QH. Так как треугольники BAM и QBP равны, то их соответственные высоты QH и BP, а также соответственные отрезки PH и MP равны. $QH \perp HP \perp AM \Longrightarrow QH \parallel AM$. Тогда длина высоты из точки Q на прямую AP равна длине перпендикуляра $HP = PM = 3$. Тогда площадь треугольника APQ определяется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} AM \cdot HP = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 13{,}5.$$

Задачи №18. Решения

№18.1 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x-\frac{9}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{9}{x}\right)-49a+18=0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a\in\left\{0;\ \dfrac{9-4\sqrt{2}}{49};\ \dfrac{9+4\sqrt{2}}{49}\right\}$.

Решение. Заметим, что $x\neq 0$. Сделаем замену $x-\dfrac{9}{x}=t$. Получаем следующее уравнение:

$$at^2-2t-49a+18=0$$

Произведем анализ замены. Так как $x\neq 0$, то можем домножить уравнение на $x:$

$$x^2-9=tx$$
$$x^2-tx-9=0$$
$$D=t^2+36>0$$

Видим, что при любом t уравнение $x-\dfrac{9}{x}=t$ имеет два корня. Тогда чтобы исходное уравнение имело ровно два корня, необходимо, чтобы новое уравнение относительно t имело ровно один корень.

1. При $a=0$ уравнение не является квадратным и принимает вид:

$$-2t+18=0$$
$$t=9$$

   То есть $a=0$ подходит.

2. Теперь рассмотрим случай $a\neq 0$. Уравнение является квадратным, и чтобы оно имело одно решение, необходимо условие $D=0:$

$$at^2-2t-49a+18=0$$
$$D=4-4a(18-49a)=0$$
$$1-a(18-49a)=0$$
$$49a^2-18a+1=0$$
$$a_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{9^2-49}}{49}=\frac{9\pm4\sqrt{2}}{49}$$

   Таким образом, исходное уравнение имеет два решения при

$$a\in\left\{0;\ \frac{9-4\sqrt{2}}{49};\ \frac{9+4\sqrt{2}}{49}\right\}$$

№18.2 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-9a+15=0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a \in \left\{0; \frac{5}{6}\right\} \cup (1;5)$.

Решение.

- Пусть $a=0$: Тогда уравнение принимает вид

$$5x+\frac{5}{x}+15=0$$
$$5x^2+5+15x=0,\ x\neq 0$$
$$x^2+3x+1=0,\ x\neq 0$$
$$D=9-4=5>0$$

Таким образом, получаем, что данное уравнение имеет 2 корня, причем, заметим, что $x=0$ не является корнем. Значит, данное значение параметра нам подходит.

- Пусть $t=x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Выполним анализ замены:

$$\frac{x^2-tx+1}{x}=0$$
$$x^2-tx+1=0,\ x\neq 0$$
$$D=t^2-4$$

Таким образом, при $t=\pm 2$ будет ровно 1 решение по x, а при $|t|>2$ будет 2 решения по x.

После замены уравнение примет вид

$$at^2+5t-9a+15=0$$
$$D=25-4a(15-9a)=(6a-5)^2$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $D=0$: при $a=\dfrac{5}{6}$, причем $t=-\dfrac{5}{2a}=-3$, а значит, данное значение параметра подходит.
2. $D>0$: в данном случае получаем следующие решения:

$$t_1=\frac{-5-(6a-5)}{2a}=-\frac{6a}{2a}=-3 \quad \textbf{— дает 2 решения}$$
$$t_2=\frac{-5+(6a-5)}{2a}=\frac{3a-5}{a}$$

Таким образом, поскольку первый корень по t дает два решения для x, то необходимо потребовать, чтобы второй корень давал 0 корней для x :

$$\left|\frac{3a-5}{a}\right|<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(3a-5)^2-4a^2}{a^2}<0$$
$$\frac{(3a-5-2a)(3a-5+2a)}{a^2}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(a-5)(a-1)}{a^2}<0$$

По методу интервалов получаем $a \in (1;5)$.

№18.3 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a \in \left\{0;\frac{1}{7}\right\} \cup \left(\frac{2}{11};\frac{2}{3}\right)$.

Решение. Сделаем замену $t=x+\frac{4}{x}$. Получим

$$at^2+2t-49a+14=0$$

Рассмотрим отдельно случай $a=0$:

$$\begin{aligned}&2t+14=0\\&t=-7\\&x+\frac{4}{x}=-7\\&x^2+7x+4=0\end{aligned}$$

Так как дискриминант этого уравнения равен $7^2-4\cdot 4=33>0$, то оно имеет ровно два корня. Тогда $a=0$ нам подходит.

При $a\neq 0$ рассмотрим дискриминант получившегося уравнения относительно t :

$$D=4+196a^2-56a=4(49a^2-14a+1)=(14a-2)^2$$

Проанализируем замену $x+\frac{4}{x}=t$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}&x^2-tx+4=0\\&D=t^2-16\end{aligned}$$

Тогда если $t=\pm 4$, то получим один корень. Если же найдется корень $|t|>4$, то он даст сразу 2 корня исходного уравнения.

Запишем корни:

$$\begin{aligned}t_1&=\frac{-2-|14a-2|}{2a}\\t_2&=\frac{-2+|14a-2|}{2a}\end{aligned}$$

1. Если $a = \dfrac{1}{7}$, то получим корень $t = -7$. Данное число по модулю превышает 4, то есть даст два корня исходного уравнения. Тогда $a = \dfrac{1}{7}$ нам подходит.

2. Если $a > \dfrac{1}{7}$, то получим:

$$t_1 = \frac{-2-14a+2}{2a} = -7$$
$$t_2 = \frac{-2+14a-2}{2a} = 7 - \frac{4}{2a}$$

Тогда t_1 по модулю больше 4, а для t_2 должно выполняться неравенство

$$-4 < t_2 < 4$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 7 - \dfrac{4}{2a} < 4 \\ 7 - \dfrac{4}{2a} > -4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a < \dfrac{2}{3} \\ a > \dfrac{2}{11} \end{cases}$$

Тогда $a \in \left(\dfrac{2}{11}; \dfrac{2}{3}\right)$ нам подходят.

3. Если $a < \dfrac{1}{7}$, то получим:

$$t_1 = \frac{14a-4}{2a} = 7 - \frac{4}{2a}$$
$$t_2 = -7$$

Тогда необходимо:

$$\begin{cases} 7 - \dfrac{4}{2a} < 4 \\ 7 - \dfrac{4}{2a} > -4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a < \dfrac{2}{3} \\ a > \dfrac{2}{11} \end{cases}$$

Так как $a < \dfrac{1}{7}$, то эта система не даст подходящих значений параметра.

Объединяя все найденные значения параметра, получим:

$$a \in \left\{0; \frac{1}{7}\right\} \cup \left(\frac{2}{11}; \frac{2}{3}\right)$$

№18.4 (Сибирь)

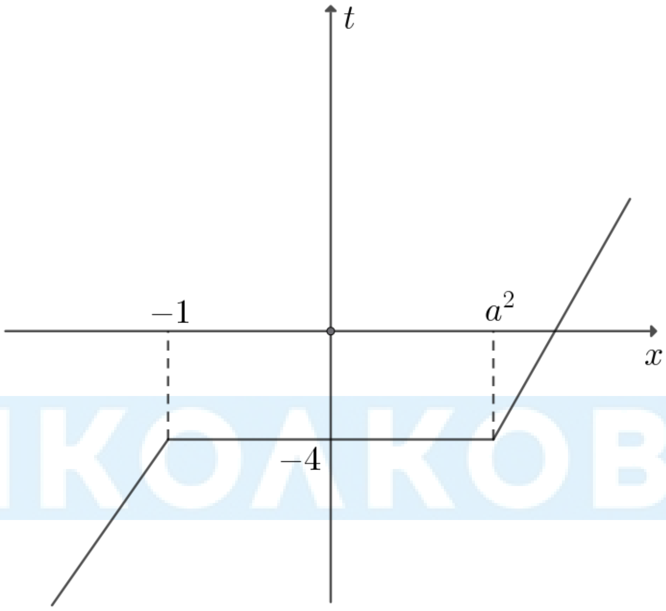
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2\right)^2+(a+2)\left(5x+\left|x-a^2\right|-4|x+1|-a^2\right)+1=0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a\in(-\infty;-4)\cup\left(0;\dfrac{9}{4}\right)\cup\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$.

Решение. Пусть $t=5x+|x-a^2|-4|x+1|-a^2$. Исследуем замену, заметим, что правая часть задает неубывающую функцию, причем при $-1\leqslant x\leqslant a^2$ графиком является прямая $t=-4$. И график выглядит следующим образом:



Таким образом, мы понимаем, что при $t\neq -4$ одно решение для t дает одно решение для x. А при $t=-4$ будет бесконечно много решений для x.
Тогда от уравнения $t^2+(a+2)t+1=0$ нужно потребовать два решения и чтобы ни один из корней не был равен -4. Получаем:

$$\begin{cases}D>0\\ f(-4)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=(a+2)^2-4=a(a+4)>0\\ 16-4(a+2)+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)\\ a\neq\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

Таким образом, получаем $a\in(-\infty;-4)\cup\left(0;\dfrac{9}{4}\right)\cup\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$

№18.5 (Центр (Не подтверждено))

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-8|-|x-a|)^2-7a(|x-8|-|x-a|)+10a^2+6a-4=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: .

Решение.

№18.6 (Аналог задачи из центра)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x+2|+|x-a|)^2-5\cdot(|x+2|+|x-a|)+3a(5-3a)=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Решение. 1) Сделаем замену $y=|x+2|+|x-a|$. Тогда уравнение примет вид

$$y^2-5y+3a(5-3a)=0.$$

Получили квадратное уравнение. Для того, чтобы изначальное уравнение относительно x имело решения, полученное уравнение относительно y должно иметь решения, то есть его дискриминант должен быть неотрицательным. Найдем дискриминант:

$$D=25-60a+36a^2=(6a-5)^2\geqslant 0.$$

Таким образом, дискриминант для любого a будет неотрицательным. Имеем корни:

$$y_1=\frac{5+6a-5}{2}=3a,$$
$$y_2=\frac{5-6a+5}{2}=5-3a.$$

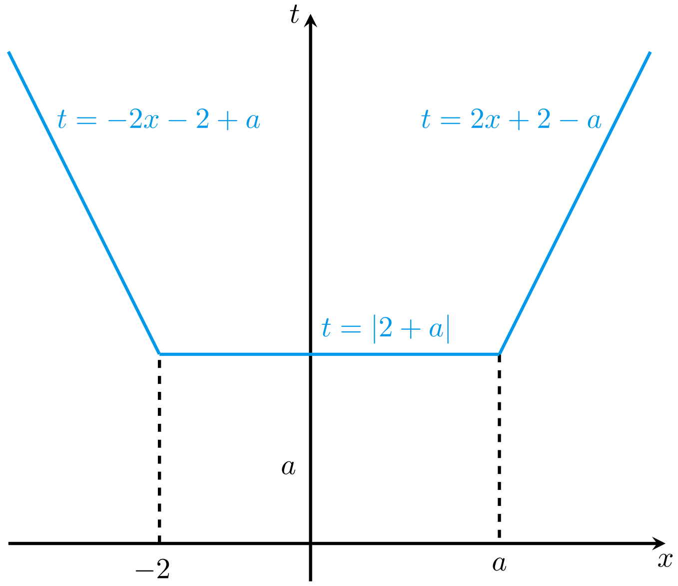
2) Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&|x+2|+|x-a|=3a\\&|x+2|+|x-a|=5-3a\end{aligned}\right.$$

Оба уравнения в данной совокупности имеют вид

$$|x+2|+|x-a|=t$$

Здесь t — некоторое выражение, зависящее от a. Исследуем такое уравнение.
График функции $f(x)=|x+2|+|x-a|$ представляет собой корыто, ветви которого имеют наклон ±2, а дно находится на высоте $|2+a|$:



(числа -2 и a могут поменяться местами)
Следовательно, при $t > |2+a|$ уравнение $t = f(x)$ имеет два решения, при $t = |2+a|$ имеет бесконечно много решений при $a \neq -2$ и одно решение при $a = -2$, при $t < |2+a|$ не имеет решений. Следовательно, если $t = 3a$ и $t = 5 - 3a$ — разные прямые, то необходимо

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 3a > |2+a| \\ 5 - 3a < |2+a| \end{cases} \\ &\begin{cases} 3a < |2+a| \\ 5 - 3a > |2+a| \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} -3a < 2 + a < 3a \\ \left[\begin{aligned} &2 + a > 5 - 3a \\ &2 + a < 3a - 5 \end{aligned}\right. \end{cases} \\ &\begin{cases} \left[\begin{aligned} &2 + a > 3a \\ &2 + a < -3a \end{aligned}\right. \\ 3a - 5 < 2 + a < 5 - 3a \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a > 1 \\ &a < \frac{3}{4} \end{aligned}\right.$$

Если же прямые $t = 3a$ и $t = 5 - 3a$ совпадают, то $3a = 5 - 3a$, следовательно, $a = \frac{5}{6}$. Тогда имеем:

$$|2 + a| = 2\frac{5}{6} > 2{,}5 = 3a$$

Следовательно, при $a = \frac{5}{6}$ прямые $t = 3a$ и $t = 5 - 3a$ находятся ниже дна корыта и исходное уравнение не имеет корней.
Тогда исходное уравнение имеет ровно два различных решения при

$$a \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$$

№18.7 (Сибирь)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a)^2 - a(7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a) + 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: .

Решение.

№18.8 (Сибирь)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(4x - 3\left|x + a^2\right| + |x-1| + 3a^2\right)^2 - (a+1)\left(4x - 3\left|x + a^2\right| + |x-1| + 3a^2\right) + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: .

Решение.

№18.9 (Центр)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-2| + |x-a+2|)^2 - a(|x-a-2| + |x-a+2|) + a^2 - 64 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: .

Решение.

№18.10 (Центр)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x + a^2\right| + |x-1|\right)^2 - 8\left(\left|x + a^2\right| + |x-1|\right) - a^2 + 17 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: .

Решение.

Задачи №19. Решения

№19.1 (Дальний восток)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: а) Да, могло

б) Нет, не могло

в) 139.

Решение. а) Приведем пример. Пусть записаны числа от 23 до 92 включительно. Среди них 4 числа, кратных 23: это 23, 46, 69, 92. При этом кратных 20 чисел ровно 3: 40, 60, 80. Данный набор соответствует условию.

б) Предположим, что среди чисел действительно нашлось 10, кратных 20. Тогда кратных 23 чисел среди них не менее 11. Тогда всего чисел не менее чем $23 \cdot 10 + 1 = 231$, поскольку среди 23 подряд идущих чисел ровно одно число может быть кратно 23.

Тогда наименьшее значение k, при котором возможно наличие 11 чисел, кратных 23, достижимо, только если имеется 10 полных отрезков по 23 числа и одно число, кратное 23.

Но среди 231 подряд идущих чисел не менее $\dfrac{231-19}{20} = 10{,}6 > 10$ чисел, кратных 20. Разберемся, откуда взялась оценка на $\dfrac{231-19}{20}$. Разобьем числа, начиная с самого первого, на блоки по 20 чисел. В каждом таком блоке ровно одно число, кратное 20. Тогда таких полных блоков не менее 11 и вне блоков может остаться не более 19 чисел.

Примечание для лучшего понимания оценки.

Пронумеруем числа a_1, a_2, a_3..., a_k. Выделим блоки $a_1 - a_{20}$, $a_{21} - a_{40}$ и так далее. Поймем, что в каждом таком блоке ровно одно число, кратное 20, так как среди подряд идущих 20 чисел однозначно встречается ровно 1 число, кратное 20. Тогда попробуем понять, сколько чисел останется в конце, когда мы поделим все на блоки.

На самом деле, в конце не может остаться более 19 чисел, так как иначе мы сможем добавить еще один блок размера 20. Тогда получается, что блоков будет $\dfrac{k-a}{20}$, где $a \leqslant 19$. Тогда чисел, кратных 20, будет не менее чем $\dfrac{k-19}{20}$. Здесь мы подставили нашу оценку на 231 число вместо k и получили $\dfrac{231-19}{20}$.

в) Пусть чисел, кратных 20, a штук. Тогда аналогично предыдущему пункту чисел, кратных 23, не менее чем $a+1$, а $k \geqslant 23 \cdot a + 1$. Причем чисел, кратных 20, не менее

$$\frac{23 \cdot a + 1 - 19}{20} = \frac{23 \cdot a - 18}{20}.$$

Тогда имеем неравенство

$$\begin{aligned}
&a \geqslant \frac{23a - 18}{20}\\
&20a \geqslant 23a - 18\\
&18 \geqslant 3a\\
&a \leqslant 6.
\end{aligned}$$

Тогда чисел, кратных 20, не более 6 штук. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям пункта б), получаем, что

$$k \leqslant 20 \cdot a + 19 \leqslant 20 \cdot 6 + 19 = 139.$$

Приведем пример. Пусть последовательность начинается с числа 161 и заканчивается числом 299. Чисел в последовательности ровно

$$299 - 161 + 1 = 139.$$

Числа, кратные 23 — это числа вида $23 \cdot k$, где k лежит в промежутке от 7 до 13 (числам 7 и 13 соответствуют «граничные» числа 161 и 299). Этих чисел ровно

$$13 - 7 + 1 = 7.$$

При этом числа, кратные 20, — это числа 180, 200, $\ldots$, 280. Они имеют вид $20 \cdot k$, где k лежит в промежутке от 9 то 14. Этих чисел ровно

$$14 - 9 + 1 = 6.$$

Условие выполняется. Тогда максимально возможное значение k равняется 139.

№19.2 (Дальний восток)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 25, меньше, чем чисел, делящихся на 29.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 25?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 25?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: а) Да, могло

б) Нет, не могло

в) 149.

Решение. а) Приведем пример. Пусть записаны числа от 29 до 116 включительно. Среди них 4 числа, кратных 29: это 29, 58, 87, 116. При этом кратных 25 чисел ровно 3: 50, 75, 100. Данный набор соответствует условию.

б) Предположим, что среди чисел действительно нашлось 10, кратных 25. Тогда кратных 29 чисел среди них не менее 11. Тогда всего чисел не менее чем $29 \cdot 10 + 1 = 291$, поскольку среди 29 подряд идущих чисел ровно одно число может быть кратно 29.

Тогда наименьшее значение k, при котором возможно наличие 11 чисел, кратных 29, достижимо, только если имеется 10 полных отрезков по 29 чисел и одно число, кратное 29.

Но среди 291 подряд идущих чисел не менее $\dfrac{291 - 24}{25} = 10{,}68 > 10$ чисел, кратных 25. Разберемся, откуда взялась оценка на $\dfrac{291 - 24}{25}$. Разобьем числа, начиная с самого первого, на блоки по 25 чисел. В каждом таком блоке ровно одно число, кратное 25. Тогда таких полных блоков не менее 11 и вне блоков может остаться не более 24 чисел.

Примечание для лучшего понимания оценки.

Пронумеруем числа a_1, a_2, $a_3 \ldots$, a_k. Выделим блоки $a_1 - a_{25}$, $a_{26} - a_{50}$ и так далее. Поймем, что в каждом таком блоке ровно одно число, кратное 25, так как среди подряд идущих 25 чисел однозначно встречается ровно 1 число, кратное 25. Тогда попробуем понять, сколько чисел останется в конце, когда мы поделим все на блоки.

На самом деле, в конце не может остаться более 24 чисел, так как иначе мы сможем добавить еще один блок размера 25. Тогда получается, что блоков будет $\dfrac{k - a}{25}$, где $a \leqslant 24$. Тогда чисел, кратных 25, будет не менее чем $\dfrac{k - 24}{25}$. Здесь мы подставили нашу оценку на 291 число вместо k и получили $\dfrac{291 - 24}{25}$.

в) Пусть чисел, кратных 25, a штук. Тогда аналогично предыдущему пункту чисел, кратных 29, не менее чем $a+1$, а $k \geqslant 29 \cdot a + 1$. Причем чисел, кратных 25, не менее

$$\frac{29 \cdot a + 1 - 24}{25} = \frac{29 \cdot a - 23}{25}.$$

Тогда имеем неравенство

$$a \geqslant \frac{29a - 23}{25}$$
$$25a \geqslant 29a - 23$$
$$23 \geqslant 4a$$
$$a \leqslant 5.$$

Тогда чисел, кратных 25, не более 5 штук. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям пункта б), получаем, что

$$k \leqslant 25 \cdot a + 24 \leqslant 25 \cdot 5 + 24 = 149.$$

Приведем пример. Пусть последовательность начинается с числа 551 и заканчивается числом 699. Чисел в последовательности ровно

$$699 - 551 + 1 = 149.$$

Числа, кратные 29 — это числа вида $29 \cdot k$, где k лежит в промежутке от 19 до 24 (числам 19 и 24 соответствуют числа 551 и 696). Этих чисел ровно

$$24 - 19 + 1 = 6.$$

При этом числа, кратные 25, — это числа $575, 600, \ldots, 675$. Они имеют вид $25 \cdot k$, где k лежит в промежутке от 23 то 27. Этих чисел ровно

$$27 - 23 + 1 = 5.$$

Условие выполняется. Тогда максимально возможное значение k равняется 149.

№19.3 (Центр (Не подтверждено))

а) Приведите пример семизначного числа, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 206, 835, 930.
б) Существует ли восьмизначное число, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 247, 345, 586, 812?
в) Найдите наименьшее натуральное число, из которого можно получить все натуральные числа от 1 до 50, вычеркивая цифры.

Ответ: а) 2893506
б) Нет, не существует
в) 12341234506789 .

Решение.
а) Рассмотрим число 2893506. Если вычеркнуть цифры 8, 9, 3, 5, получится число 206. Если вычеркнуть цифры 2, 9, 0, 6, получится число 835. Если вычеркнуть цифры 2, 8, 5, 6, получится число 930.
б) Заметим, что среди представленных чисел, используются 8 цифр от 1 до 8. Тогда каждая цифра используется по 1 разу. Заметим, что 2 должна стоять раньше 4, так как иначе число 247 не получить, 4 должна стоять раньше 5, так как иначе число 345 не получить, 5 должна стоять раньше 8, так как иначе число 586 не получить, 8 должна стоять раньше 2, так как иначе число 812 не получить. Но получается, что 2 стоит раньше 4, раньше 5, раньше 8, раньше 2. То есть 2 стоит раньше 2. Противоречие
в) Поймем, каждая из цифр 1, 2, 3, 4 встречается не менее двух раз, так как каждое число вида $\overline{aa} < 50$, если $a < 5$. Цифр от 5 до 9, а еще ноль, должно быть минимум по одной. Таким образом, итоговое число

должно содержать не менее 14 цифр. Давайте предоставим пример на 14 цифр: 12341234506789.
Докажем, что это в целом наименьшее число. Поймем, что цифра 0 точно стоит где-то после цифры 1, 2, 3, 4, 5 так как иначе числа 10, 20, 30, 40, 50 не получить. Также повторяющиеся цифры должны быть разнесены с разных сторон от 4, так как иначе нельзя будет получить оба числа вида $\overline{4a}, \overline{a4}$. Далее расставим цифры по возрастанию. Получим 12341234506789.
Видим, что каждая цифра встречается в числе, то есть числа 1-9 получить можно. После каждой цифры от 1 до 4 стоит каждая цифра от 1 до 9, то есть числа вида $\overline{ab}, a < 5, b \neq 0$ можно получить. Также 0 стоит после цифр 1, 2, 3, 4, 5, то есть числа 10, 20, 30, 40, 50 можно получить.

№19.4 (Центр)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырех или семи чисел является целым числом.
а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 563 и 1417?
б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 563?
в) Найдите минимальное n, при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2.

Ответ: а) Нет, не могут
б) Нет, не может
в) 13 .

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.
А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e) = a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.
Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 7.
а) Заметим, что числа 563 и 1417 дают разные остатки при делении на 4. Первое число дает остаток 3, второе — остаток 1. Получили противоречие с доказанным выше фактом.
б) Если на доске есть число 563, то все числа на доске дают остаток 3 при делении на 4. Рассмотрим все возможные остатки квадратов чисел при делении на 4.

1. Если число, дающее остаток 0 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком 0 при делении на 4.
2. Если число, дающее остаток 1 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $1^2 = 1$ при делении на 4.
3. Если число, дающее остаток 2 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $2^2 = 4 \equiv 0$ при делении на 4.
4. Если число, дающее остаток 3 при делении на 4, возвести в квадрат, то получится число с остатком $3^2 = 9 \equiv 1$ при делении на 4.

Как видим, ни один квадрат натурального числа не может давать остаток 3 при делении на 4. То есть выполнение данного условия невозможно.
в) Если на доске одновременно записаны числа 1 и n^2, то n^2 дает остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 7. Причем $n^2 \neq 1$, так как 1 уже записано на доске. Будем идти по квадратам нечетных

чисел, так как квадраты четных чисел не дают остаток 1 при делении на 4. Заполним таблицу: слева будем писать число, справа — остаток его квадрата при делении на 7.

3	2
5	4
7	0
9	4
11	2
13	1

Число 13 подходит. Предоставим пример. Возьмем числа

$$1,\ 29,\ 57,\ 85,\ 113,\ 141,\ 169,\ 197,\ 225,\ 253.$$

Все эти числа имеют вид $28 \cdot k + 1$, то есть дают остаток 1 при делении на 4 и остаток 1 при делении на 7. Причем сумма любых 4 чисел даст остаток 0 при делении на 4 как сумма 4 чисел с одинаковыми остатками. Аналогично с суммой любых 7 чисел. То есть условие выполняется.

№19.5 (Центр)

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30035.
а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 325?
б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел быть равным 7?
в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: а) Нет, не может
б) Нет, не может
в) 13 .

Решение. Докажем, что все числа дают одинаковые остатки по модулю 4. Действительно, положим обратное. Пусть числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Тогда рассмотрим 4 числа a, c, d, e. Их среднее арифметическое — целое число, то есть их сумма кратна 4.
А теперь рассмотрим набор из чисел b, c, d, e. Их сумма также должна быть кратна 4. Но числа a и b дают разные остатки при делении на 4. То есть разность $(a+c+d+e)-(b+c+d+e)=a-b$ не делится на 4. Но разность двух чисел, кратных четырем, должна делиться на 4. Противоречие.
Аналогично доказывается, что все числа на доске дают один и тот же остаток при делении на 3, 5, 6.
а) Заметим, что числа 325 и 30035 дают разные остатки при делении на 4. Первое число дает остаток 1, второе — остаток 3. Получили противоречие с доказанным выше фактом.
б) Если на доске есть число 30035, то все числа на доске дают остаток 3 при делении на 4. Тогда пусть на доске написаны числа a и $7a$. Число a дает остаток 3 при делении на 4, а число $7a$ дает остаток $7 \cdot 3 = 21$, то есть остаток 1 при делении на 4. Противоречие.
в) Число 30035 дает остаток 2 при делении на 3, остаток 3 при делении на 4, остаток 0 при делении на 5, остаток 5 при делении на 6.
Поймем, что $n > 1$, так как все числа различные. Выполним перебор по n :
$n \neq 2$, так как если число a дает остаток 5 при делении на 6, то число $2a$ даст остаток 4 при делении на 6;
$n \neq 3$, 4, 6, так как число вида na будет кратно 3, 4 или же 6, что противоречит описанному выше;
$n \neq 5$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 3, то число $5a$ дает остаток 1 при делении на 3;
$n \neq 7$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 4, то число $7a$ дает остаток 1 при делении на 4;
$n \neq 8$, 9, так как эти числа кратны 4 и 3 соответственно (они не подойдут по тем же причинам, по которым не подходят числа 3, 4, 6);

$n \neq 10$, так как если число a дает остаток 3 при делении на 4, то число $10a$ дает остаток 2 при делении на 4;
$n \neq 11$, так как если число a дает остаток 2 при делении на 3, то число $11a$ даст остаток 1 при делении на 3;
$n \neq 12$, так как 12 кратно 4.
На $n = 13$ есть пример:

$$155,\ 2015,\ 30035,\ 515,\ 875,\ 1235,\ 1595,\ 1955,\ 2315,\ 2675.$$

Здесь $2015 = 155 \cdot 13$. Все числа имеют вид $155 + 60 \cdot k$. То есть дают остаток 2 при делении на 3, остаток 3 при делении на 4, остаток 0 при делении на 5, остаток 5 при делении на 6.
Если сложить n чисел с одинаковыми остатками при делении на n, то получится число, кратное n. Поэтому условие задачи на то, что среднее арифметическое любых 3, 4, 5, 6 чисел является целым числом, выполняется.

№19.6 (Центр)

На доске написано 10 натуральных чисел. Среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30032.
а) Может ли среди написанных на доске чисел быть число 312?
б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 6?
в) Отношение двух написанных на доске чисел является целым числом n. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: .

Решение.

№19.7 (Дальний восток)

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 15, меньше, чем чисел, делящихся на 17.
а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 15?
б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 15?
в) Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: вместо этого текста будет ответ задачи.

Решение. вместо этого текста будет решение задачи