Решения прототипов досрочного ЕГЭ 2023

Содержание

Часть 1

№1.1 *(Дальний восток)*

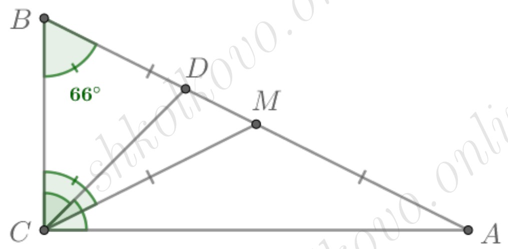
Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

Ответ

21

Решение

Пусть $\angle C$ — прямой, CD — биссектриса, CM — медиана.



Так как медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то треугольник BMC — равнобедренный. Тогда имеем: $\angle MCB = \angle ABC = 66°$.

Так как CD — биссектриса, то $\angle BCD = \angle ACD = 45°$.

Тогда искомый угол равен

$$\angle MCD = \angle MCB - \angle BCD = 66° - 45° = 21°$$

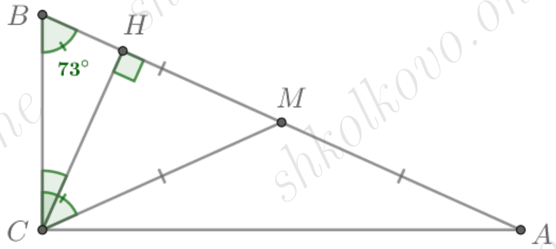
№1.2 *(Центр)*

В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота CH и медиана CM, угол B равен 73°. Найдите угол MCH. Ответ дайте в градусах.

Ответ

56

Решение



Так как медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то треугольник BMC — равнобедренный. Тогда имеем: $\angle MCB = \angle ABC = 73°$.

Так как CH — высота, то треугольник BHC прямоугольный. Тогда по сумме углов треугольника

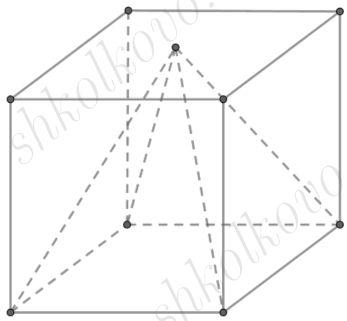
$$\angle BCH = 180^\circ - \angle HBC - \angle BHC = 180^\circ - 73^\circ - 90^\circ = 17^\circ$$

Тогда искомый угол равен

$$\angle MCH = \angle MCB - \angle BCH = 73^\circ - 17^\circ = 56^\circ$$

№2.1 *(Дальний восток)*

Найдите объем пирамиды, вписанной в куб, если ребро куба равно 3.



Ответ

9

Решение

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания пирамиды на высоту:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

Площадь основания пирамиды равна площади грани куба:

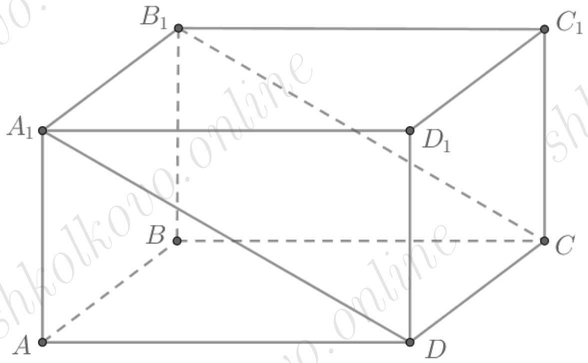
$$S = 3^2 = 9$$

Высота пирамиды равна высоте куба, то есть длине его ребра. Значит, она равна 3. Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 9$$

№2.2 (*Центр*)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 4$, $BC = 7$, $AA_1 = 3$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.



Ответ

42

Решение

Объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1, равен

$$V = AB \cdot S_{AA_1D} = AB \cdot \frac{1}{2} S_{AA_1D_1D} = AB \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = 42$$

№3.1 (*Дальний восток*)

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх команда «Физик» как минимум один раз начнет игру первой.

Ответ

$0,875$

Решение

Нужно найти вероятность того, что команда «Физик» хотя бы один раз начнет матч первой. Найдем сначала вероятность того, что команда ни разу не начинает матч первой, а потом посчитаем противоположную к ней вероятность.

Перед началом матча судья бросает монетку, то есть вероятность того, что команда «Физик» не начинает матч, равна $0,5$. Тогда вероятность того, что команда не начинает ни один из трех матчей первой, равна $0,5^3 = 0,125$.

Найдем искомую вероятность:

$$1 - 0,125 = 0,875$$

№3.2 (*Центр*)

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Ответ

0,5

Решение

Пусть О — это орел, Р — это решка. Тогда при бросании монеты дважды возможные исходы следующие: ОО, ОР, РО, РР. Среди этих четырех исходов подходящих — два. Следовательно, вероятность равна

$$\frac{2}{4} = 0,5.$$

№4.1 (*Дальний восток*)

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна $0,2$. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна $0,16$. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ

$0,76$

Решение

Пусть событие A : кофе закончился в первом автомате, событие B : кофе закончился во втором автомате, событие AB : кофе закончился в двух автоматах.

По условию мы знаем вероятности этих событий $P(A) = P(B) = 0,2,\ P(AB) = 0,16$.

Найдем вероятность того, что кофе закончился хотя бы в одном автомате:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 2P(A) - P(AB) = 2 \cdot 0,2 - 0,16 = 0,24$$

Тогда искомая вероятность — это противоположная вероятность:

$$1 - P(A+B) = 1 - 0,24 = 0,76$$

№4.2 (*Центр*)

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ

0,83

Решение

Пусть событие A : кофе закончился в первом автомате, событие B : кофе закончился во втором автомате, событие AB : кофе закончился в двух автоматах.

По условию мы знаем вероятности этих событий $P(A) = P(B) = 0,1,\ P(AB) = 0,03$.

Найдем вероятность того, что кофе закончился хотя бы в одном автомате:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 2P(A) - P(AB) = 2 \cdot 0,1 - 0,03 = 0,17$$

Тогда искомая вероятность — это противоположная вероятность:

$$1 - P(A+B) = 1 - 0,17 = 0,83.$$

№5.1 *(Дальний восток)*

Решите уравнение $\sqrt{4x+32} = 8$.

Ответ

8

Решение

Уравнение в общем виде выглядит как $\sqrt{A} = B$ и оно равносильно

$$\begin{cases} A = B^2 \\ A \geqslant 0 \\ B \geqslant 0 \end{cases}$$

Условие $A \geqslant 0$ излишне, так как $A = B^2$, а $B^2 \geqslant 0$ как любое выражение в квадрате. Следовательно, исходное уравнение равносильно

$$4x + 32 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8$$

№5.2 *(Центр)*

Найдите корень уравнения: $\sqrt{63-9x}=3$.

Ответ

6

Решение

Уравнение в общем виде выглядит как $\sqrt{A}=B$ и оно равносильно

$$\begin{cases} A = B^2 \\ A \geqslant 0 \\ B \geqslant 0 \end{cases}$$

Условие $A \geqslant 0$ излишне, так как $A = B^2$, а $B^2 \geqslant 0$ как любое выражение в квадрате. Следовательно, исходное уравнение равносильно

$$63-9x=9 \quad \Leftrightarrow \quad x=6.$$

№6.1 *(Дальний восток)*

Найдите $5\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0,4$.

Ответ

$3,4$

Решение

По формуле косинуса двойного угла

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$

Тогда искомое значение равно

$$\begin{aligned} 5\cos 2\alpha = 5\cdot\left(1-2\sin^2\alpha\right) = 5\cdot\left(1-2\cdot(-0,4)^2\right) = \\ = 5\cdot(1-2\cdot 0,16) = 5\cdot(1-0,32) = 5\cdot 0,68 = 3,4 \end{aligned}$$

№6.2 (*Центр*)

Найдите значение выражения $4\sqrt{3}\cos^2\dfrac{23\pi}{12}-2\sqrt{3}$.

Ответ

3

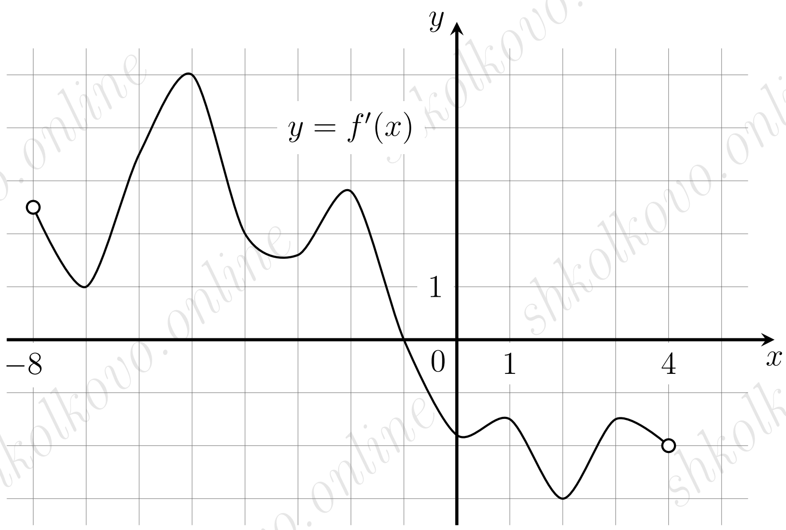
Решение

Вынесем $2\sqrt{3}$ за скобки, а выражение в скобках преобразуем по формуле $2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$:

$$2\sqrt{3}\left(2\cos^2\frac{23\pi}{12}-1\right)=2\sqrt{3}\cos\frac{23\pi}{6}=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3.$$

№7.1 (*Дальний восток*)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ

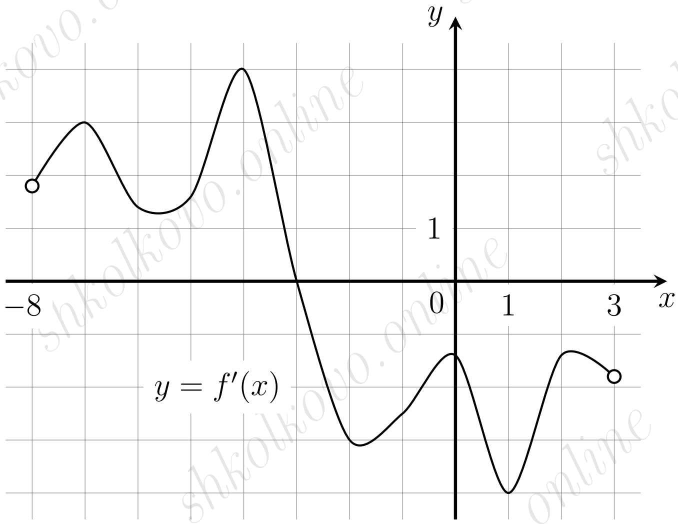
-7

Решение

На указанном отрезке производная положительна, то есть функция возрастает. Тогда наименьшее значение функция $f(x)$ принимает в левом конце отрезка в точке $x=-7$.

№7.2 *(Центр)*

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ

-3

Решение

На отрезке $[-3; 2]$ производная неположительна, следовательно, функция убывает. Тогда наибольшее значение функция принимает в левом конце отрезка, то есть в точке $x = -3$.

№8.1 *(Дальний восток)*

Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 6900 Дж.

Ответ

6

Решение

Подставим все известные из условия величины в формулу:

$$6900 = 5,75 \cdot 2 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,5}$$

$$23 = 11,5 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,5}$$

$$\log_2 \frac{p_2}{1,5} = \frac{23}{11,5}$$

$$\log_2 \frac{p_2}{1,5} = 2$$

$$\frac{p_2}{1,5} = 2^2$$

$$\frac{p_2}{1,5} = 4$$

$$p_2 = 6$$

№9.1 *(Дальний восток)*

Один рабочий пропалывает грядку за 12 часов, а двое рабочих вместе пропалывают грядку за 4 часа. За сколько часов прополет грядку второй рабочий?

Ответ

6

Решение

Пусть x — скорость первого рабочего, а y — скорость второго рабочего.

По условию имеем:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ x + y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго, получим

$$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{1}{6}$$

Таким образом, второй рабочий пропалывает одну грядку за 6 часов.

№9.2 *(Центр)*

Один мастер может выполнить заказ за 15 часов, а другой — за 10 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Ответ

6

Решение

Пусть x — скорость первого мастера, а y — скорость второго. Если принять всю работу за 1, то из условия задачи следует система

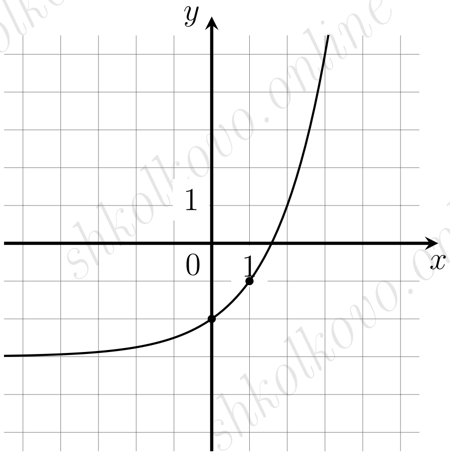
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{15} \\ y = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Требуется найти $\dfrac{1}{x+y}$:

$$\frac{1}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}}=6.$$

№10.1 *(Дальний восток)*

На рисунке изображен график функции $f(x)=a^x+b$. Найдите значение x, при котором $f(x)=29$.



Ответ

5

Решение

Найдем коэффициент b, подставив в уравнение функции точку $(0;-2)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(0)=-2\quad\Leftrightarrow\quad a^0+b=-2\quad\Leftrightarrow\quad 1+b=-2\quad\Leftrightarrow\quad b=-3$$

Теперь найдем основание a, подставив в уравнение функции точку $(1;-1)$, через которую проходит график:

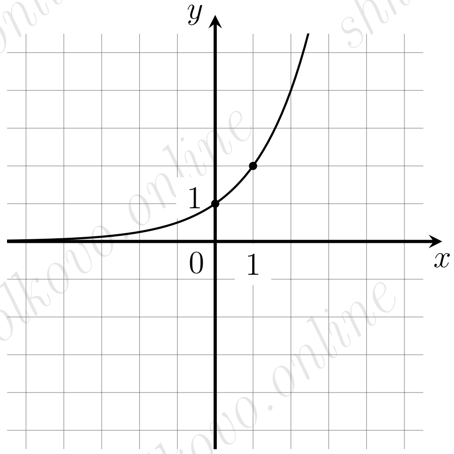
$$f(1)=-1\quad\Leftrightarrow\quad a^1-3=-1\quad\Leftrightarrow\quad a=2$$

Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид $f(x)=2^x-3$, тогда

$$\begin{gathered}f(x)=2^x-3=29\\2^x=32\\2^x=2^5\\x=5\end{gathered}$$

№10.2 (*Центр*)

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



Ответ

8

Решение

Найдем основание a, подставив в уравнение функции точку $(1; 2)$, через которую проходит график:

$$f(1) = 2$$
$$a^1 = 2$$
$$a = 2$$

Значит, мы восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = 2^x$$

Тогда

$$f(3) = 2^3 = 8$$

№11.1 (*Дальний восток*)

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 24x^2 + 11$.

Ответ

16

Решение

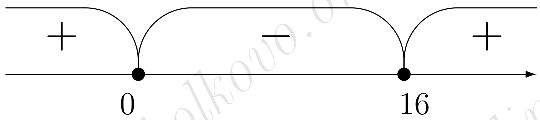
Найдем производную функции:

$$y' = \left(x^3 - 24x^2 + 11\right)' = 3x^2 - 48x$$

Нули производной:

$$y' = 0$$
$$3x^2 - 48x = 0$$
$$x(x-16) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 16 \end{array}\right.$$

Нули производной разбивают область определения функции (она равна $\mathbb{R}$) на промежутки, на каждом из которых производная непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знак производной на каждом таком промежутке:



Следовательно, функция убывает на промежутке $(0; 16)$ и возрастает на промежутке $(16; +\infty)$. Тогда точка минимума функции равна $x = 16$.

№11.2 *(Центр)*

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 19$ на отрезке $[1; 4]$.

Ответ

-13

Решение

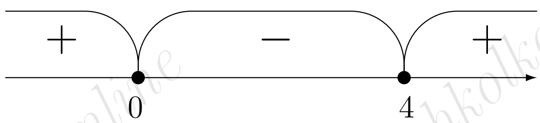
Найдем производную функции:

$$y' = \left(x^3 - 6x^2 + 19\right)' = 3x^2 - 12x$$

Нули производной:

$$y' = 0$$
$$3x^2 - 12x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Нули производной разбивают область определения функции (она равна $\mathbb{R}$) на промежутки, на каждом из которых производная непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знак производной на каждом таком промежутке:



Следовательно, на отрезке $[1; 4]$ производная неположительна, значит, функция убывает. Следовательно, наименьшее свое значение на этом отрезке она принимает в его правом конце, то есть в точке $x = 4$, и оно равно

$$y(4) = 64 - 6 \cdot 16 + 19 = -13.$$

№12

№12.1 (*Дальний восток*)

а) Решите уравнение

$$2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{11\pi}{6}; \dfrac{13\pi}{6}$

Решение

а) Сделаем замену $t = \log_3(2\cos x)$. Тогда уравнение примет вид

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}; 2$$

Сделаем обратную замену:

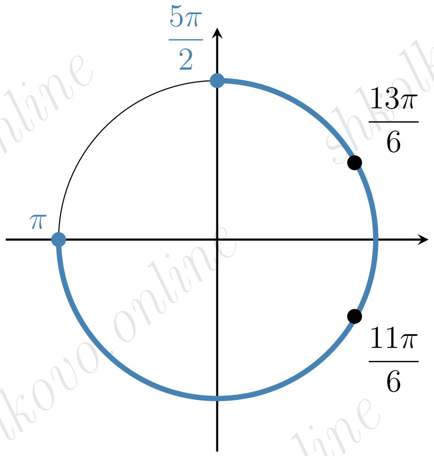
$$\left[\begin{aligned} &\log_3(2\cos x) = \frac{1}{2} \\ &\log_3(2\cos x) = 2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &2\cos x = \sqrt{3} \\ &2\cos x = 9 \end{aligned}\right.$$

Первое уравнение совокупности равносильно

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Второе уравнение не имеет решений, так как $\cos x \in [-1; 1]$. Следовательно, ответ в пункте а): $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и принадлежащие ей решения из серий пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ лежат корни $x = \frac{11\pi}{6}$ и $x = \frac{13\pi}{6}$.

№12.2 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение

$$\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x\right) = x$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}; \frac{10\pi}{3}; \frac{7\pi}{2}$

Решение

а) Данное уравнение равносильно

$$2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 4^x$$

Заметим, что в этом случае аргумент логарифма равен положительному числу 4^x, следовательно, он больше нуля, то есть выполнено ОДЗ уравнения. Преобразуем полученное уравнение, заметив, что $2^{2x} = 4^x$.

$$\sqrt{3}\cos x + 2\sin x\cos x = 0$$

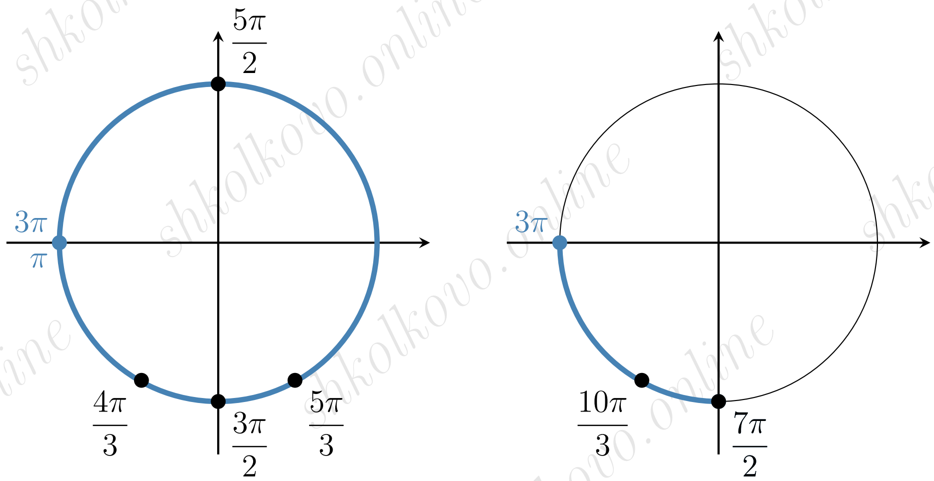
$$\cos x(2\sin x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\cos x = 0 \\ &\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

Полученные значения x и есть ответ в пункте а).

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$, с помощью тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и принадлежащие ей решения из серий пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ лежат корни $x = \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}; \frac{10\pi}{3}; \frac{7\pi}{2}$.

№13

№13.1 *(Дальний восток)*

Дан тетраэдр $ABCD$. На ребре AC выбрана точка K так, что $AK : KC = 3 : 7$. Также на ребрах AD, BD и BC выбраны точки L, M и N соответственно так, что $KLMN$ — квадрат со стороной 3.

а) Докажите, что ребра AB и CD взаимно перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости $KLMN$, если объем тетраэдра $ABCD$ равен 100.

Ответ

б) 4,2

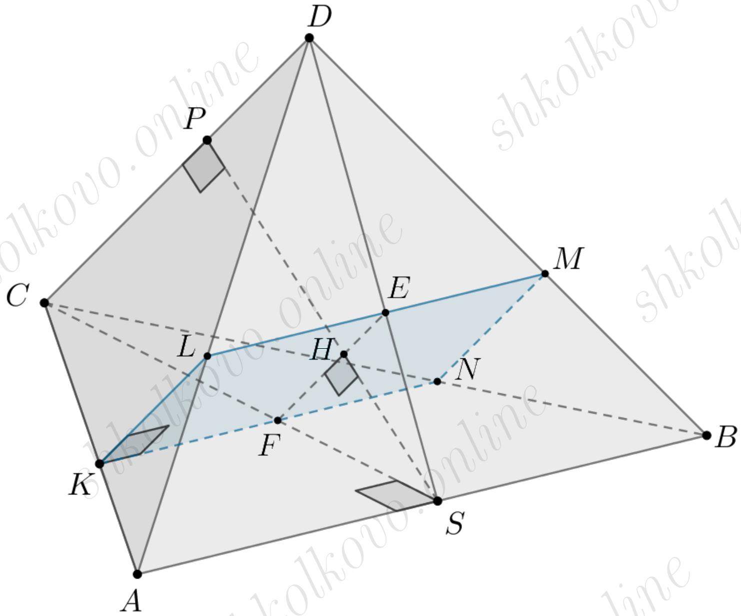
Решение

а) Так как $KLMN$ — квадрат, то $KL = KN$, $KL \perp KN$, $KL \parallel MN$, $KN \parallel ML$.

Докажем, что $KN \parallel AB$. Аналогично будет доказываться, что $KL \parallel CD$.

Плоскости KLM, ABC и ABD образуют теорему «домик». Следовательно, их линии пересечения KN, AB и ML либо параллельны друг другу, либо пересекаются в одной точке. Так как две из трех линий KN и ML друг другу параллельны, то и третья линия AB им параллельна. Следовательно, $KN \parallel AB \parallel ML$.

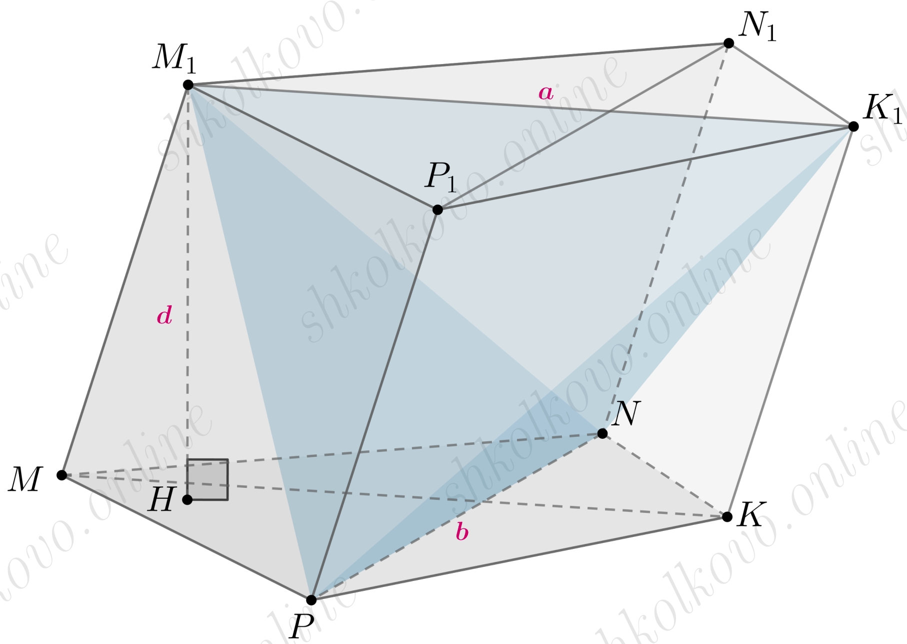
Значит и $KL \parallel CD \parallel MN$. Так как $KLMN$ — квадрат, то $KL \perp KN$. Следовательно, $AB \perp CD$. Что и требовалось доказать.



б) Докажем мини-задачу: если a и b — противоположные ребра тетраэдра, d — расстояние между ними, α — угол между ними, то объем этого тетраэдра равен $\dfrac{1}{6}abd\sin\alpha$.

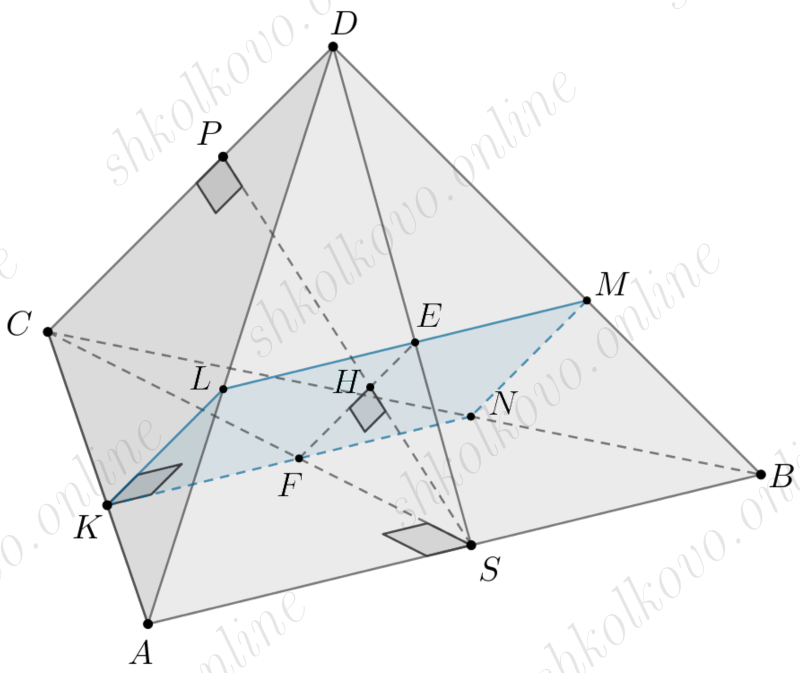
Рассмотрим призму $MNKPM_1N_1K_1P_1$, в основании которой лежит четырехугольник $MNKP$, диагонали которого соответственно равны и параллельны двум противоположным ребрам данного тетраэдра: $MK = a$, $NP = b$, $\angle(MK, NP) = \alpha$. Тогда расстояние между основаниями призмы равно d. Значит, объем этой призмы

$$V = d \cdot \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



Распишем, чему равен объем данного тетраэдра M_1NK_1P :

$$V_{M_1NK_1P} = V - \left(\underbrace{V_{M_1MNP} + V_{K_1NKP}}_{=V_{M_1MNKP}} + \underbrace{V_{NM_1N_1K_1} + V_{PM_1K_1P_1}}_{=V_{NM_1N_1K_1P_1}} \right) = V - \left(\frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V\right) = \frac{1}{3}V = \frac{1}{6}abd\sin\alpha$$



Заметим, что так как $AB \parallel (KLM)$, то расстояние от любой точки прямой AB до этой плоскости будет одинаковым.

Проведем $CS \perp AB$. Тогда $AB \perp (CSD)$. Проведем $SP \perp CD$. Пусть $SP \cap (KLM) = H$. Тогда $SH \perp (KLM)$, так как $SH \perp KN \parallel AB$ и $SH \perp KL \parallel CD$. Следовательно, SH — искомое расстояние.

Из $\triangle CKN \sim \triangle CAB$ следует, что $KN = \dfrac{7}{10}AB = 3$. Следовательно, $AB = \dfrac{30}{7}$. Аналогично $KL = \dfrac{3}{10}CD = 3$, откуда $CD = 10$.

Из доказанной формулы следует, что объем тетраэдра $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{6}\cdot CD\cdot AB\cdot SP\cdot \sin 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 100 = \frac{1}{6}\cdot\frac{30}{7}\cdot 10\cdot SP \quad \Leftrightarrow \quad SP = 14$$

Так как по теореме Фалеса $AK : KC = SF : FC = SH : HP = 3 : 7$, то $SH : SP = 3 : 10$. Тогда

$$SH = \frac{3}{10}SP = 4,2$$

№13.2 (*Центр*)

Дан тетраэдр $ABCD$. На ребре AC выбрана точка K так, что $AK : KC = 3 : 7$. Также на ребрах AD, BD и BC выбраны точки L, M и N соответственно так, что $KLMN$ — квадрат со стороной 2.

а) Докажите, что $BM : MD = 3 : 7$.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости (KLM), если известно, что объем пирамиды $CKLM$ равен 50.

Ответ

75

Решение

а) Так как $KLMN$ — квадрат, то $KL = KN$, $KL \perp KN$, $KL \parallel MN$, $KN \parallel ML$.

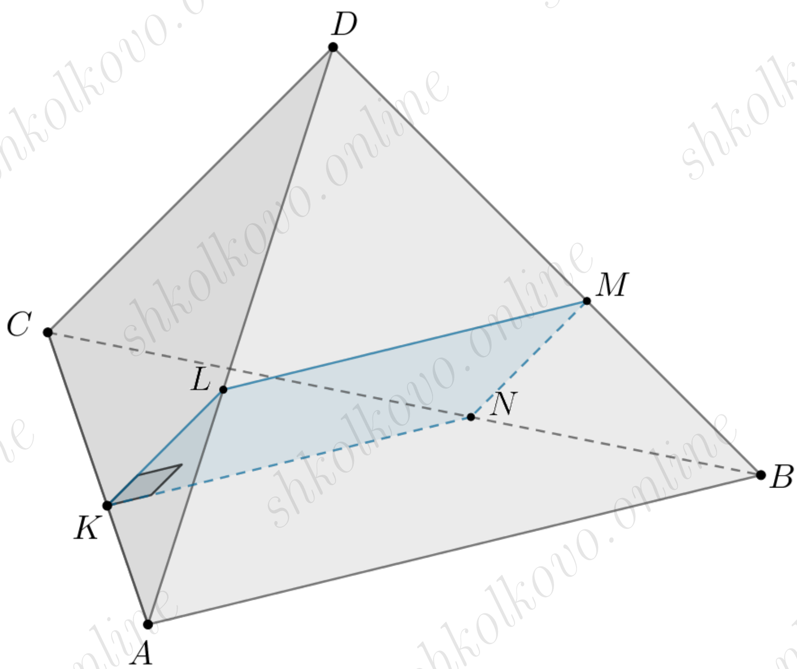
Докажем, что $KN \parallel AB$. Аналогично будет доказываться, что $KL \parallel CD$.

Плоскости KLM, ABC и ABD образуют теорему «домик». Следовательно, их линии пересечения KN, AB и ML либо параллельны друг другу, либо пересекаются в одной точке. Так как две из трех линий KN и ML друг другу параллельны, то и третья линия AB им параллельна. Следовательно, $KN \parallel AB \parallel ML$.

Значит и $KL \parallel CD \parallel MN$. Тогда по теореме Фалеса

$$BM : MD = AL : LD = AK : KC = 3 : 7.$$

Что и требовалось доказать.



б) Пусть h — расстояние от точки C до плоскости KLM. Тогда объем пирамиды $CKLM$ равен

$$50 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{2} S_{KLMN} \quad \Leftrightarrow \quad 50 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = 75.$$

№14

№14.1 (*Дальний восток*)
Решите неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5\cdot 2^x + 4} \leqslant \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}$$

Ответ

$(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (\log_2 6; 3]$

Решение

Преобразуем левую часть:

$$\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5\cdot 2^x + 4} = \frac{(2^x)^2 - 8\cdot 2^x + 7}{(2^x)^2 - 5\cdot 2^x + 4}$$

Сделаем замену $2^x = t > 0$. Тогда получим

$$\frac{t^2 - 8t + 7}{t^2 - 5t + 4} \leqslant \frac{t-9}{t-4} + \frac{1}{t-6}$$

Заметим, что $t^2 - 8t + 7 = (t-1)(t-7)$, а $t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$. Тогда

$$\frac{(t-1)(t-7)}{(t-1)(t-4)} \leqslant \frac{t-9}{t-4} + \frac{1}{t-6}$$

Сократим левую часть на $(t-1)$, запомнив, что $t \neq 1$.

$$\frac{t-7}{t-4} \leqslant \frac{t-9}{t-4} + \frac{1}{t-6}$$

$$\frac{t-7}{t-4} - \frac{t-9}{t-4} - \frac{1}{t-6} \leqslant 0$$

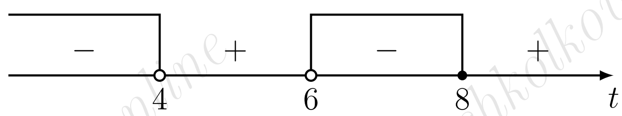
$$\frac{(t-6)((t-7)-(t-9)) - (t-4)}{(t-4)(t-6)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-6)(t-7-t+9) - t + 4}{(t-4)(t-6)} \leqslant 0$$

$$\frac{2t - 12 - t + 4}{(t-4)(t-6)} \leqslant 0$$

$$\frac{t-8}{(t-4)(t-6)} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Пересекая с условиями $t > 0$ и $t \neq 1$, получаем $t \in (0;1) \cup (1;4) \cup (6;8]$.
Сделаем обратную замену:

$$0 < t < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2^x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$
$$1 < t < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 2^x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^0 < 2^x < 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 2$$
$$6 < t \leqslant 8 \quad \Leftrightarrow \quad 6 < 2^x \leqslant 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\log_2 6} < 2^x \leqslant 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 6 < x \leqslant 3$$

Таким образом, $x \in (-\infty;0) \cup (0;2) \cup (\log_2 6;3]$.

№14.2 *(Центр)*
Решите неравенство

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10\cdot 9^x + 10\cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10\cdot 3^x + 3} \leqslant 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}$$

Ответ
$(-\infty;-1) \cup (-1;0] \cup (\log_3 2;1)$

Решение
Сделаем замену $3^x = t$. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{3t^3 - 10t^2 + 10t - 5}{3t^2 - 10t + 3} \leqslant t + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{3t-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3t^3 - 10t^2 + 10t - 5}{(3t-1)(t-3)} \leqslant t + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{3t-1} \quad \Leftrightarrow \quad (*)$$

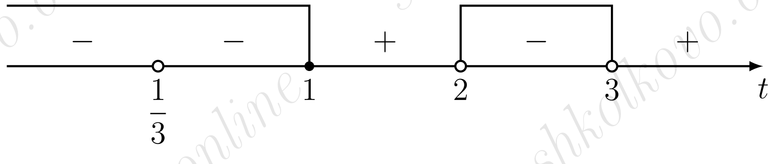
$$t + \frac{7t-5}{(3t-1)(t-3)} \leqslant t + \frac{4t-3}{(3t-1)(t-2)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{7t-5}{(3t-1)(t-3)} \leqslant \frac{4t-3}{(3t-1)(t-2)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3t^2 - 4t + 1}{(3t-1)(t-3)(t-2)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(3t-1)(t-1)}{(3t-1)(t-3)(t-2)} \leqslant 0$$

$(*)$ здесь разделим в столбик числитель $3t^3 - 10t^2 + 10t - 5$ на $(3t-1)(t-3)$.
Решим полученное неравенство методом интервалов.



Тогда получаем

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \leqslant 1 \\ 2 < t < 3 \end{array}\right. \\ t \neq \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3^x \leqslant 1 \\ 2 < 3^x < 3 \end{array}\right. \\ 3^x \neq \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \log_3 2 < x < 1 \end{array}\right. \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Итоговый ответ:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup (\log_3 2; 1).$$

№15

№15.1 *(Дальний восток)*

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с долгом на конец предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга одним платежом.

Известно, что сумма всех выплат составила 375 000 рублей. Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами?

Ответ

221 400 рублей

Решение

Так как по условию процентная ставка составляет 25%, то каждый январь долг становится в $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ раз больше долга на конец предыдущего года. Составим таблицу, отслеживающую изменения, связанные с долгом, где за S рублей примем сумму, взятую в кредит, а за x рублей — ежегодный платеж.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Платеж
1	S	$\frac{5}{4}S$	x
2	$\frac{5}{4}S-x$	$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}S-x\right)$	x
3	$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}S-x\right)-x$	$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}S-x\right)-x\right)$	x
4	$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}S-x\right)-x\right)-x$	$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}S-x\right)-x\right)-x\right)$	x

Так как после последнего платежа долг выплачен полностью, то получаем следующее уравнение (в левой части разность последних ячеек 3-его и 4-ого столбцов):

$$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}S-x\right)-x\right)-x\right)-x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{5}{4}\right)^4 S = x\left(\left(\frac{5}{4}\right)^3+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}+1\right)$$

По условию задачи общая сумма выплат равна

$$4x = 375\,000 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{375\,000}{4}$$

Подставим это значение x в полученное нами уравнение и выразим S :

$$S=\frac{\left(\left(\frac{5}{4}\right)^3+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}+1\right)\cdot\frac{375\,000}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^4}=\frac{\left(\frac{5}{4}+1\right)\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2+1\right)\cdot 375\,000}{\left(\frac{5}{4}\right)^4\cdot 4}=$$

$$=\frac{(5+4)(25+16)\cdot 375\,000}{5^4}=\frac{9\cdot 41\cdot 375\,000}{5^4}=\frac{9\cdot 41\cdot 600}{1}=221\,400.$$

Следовательно, в кредит было взято 221 400 рублей.

№16

№16.1 *(Дальний восток)*

Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

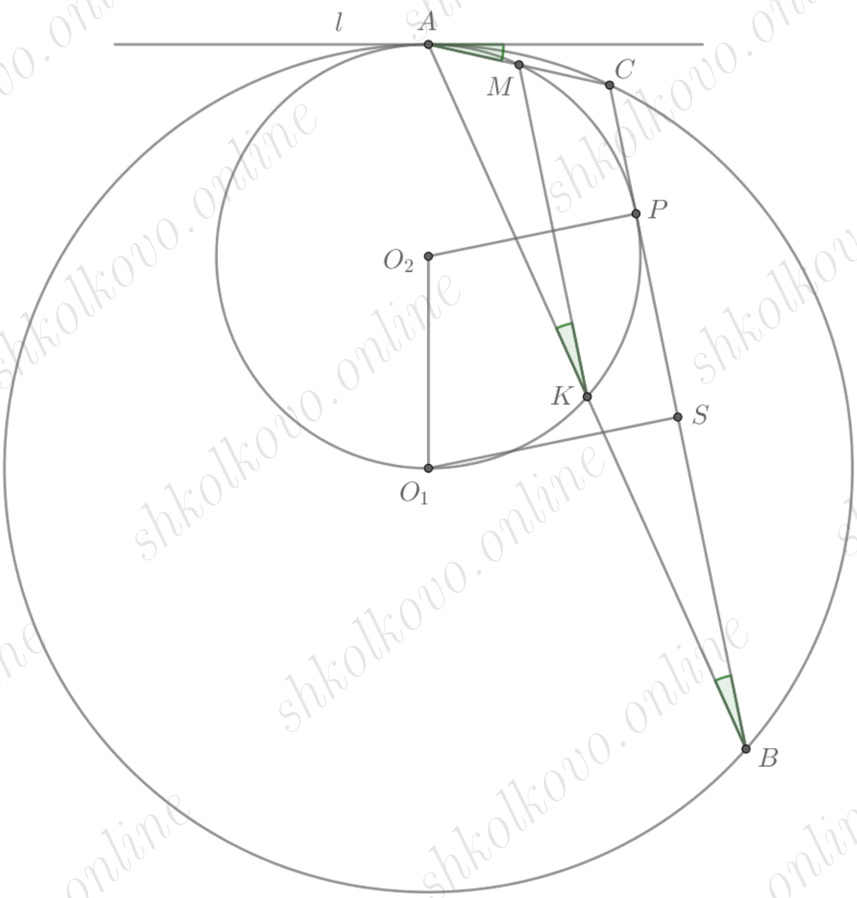
Ответ

б) $\sqrt{10}$

Решение

а) Проведем через точку A общую касательную l к окружностям.

Рассмотрим меньшую окружность. Мы знаем, что угол между хордой и касательной к окружности равен половине дуги, заключенной между ними, значит, угол между AM и l равен вписанному углу AKM.



Рассмотрим большую окружность. По аналогичным соображениям угол между AC и l равен углу ABC.

Тогда, так как точки A, M и C лежат на одной прямой, то $\angle AKM = \angle ABC$.

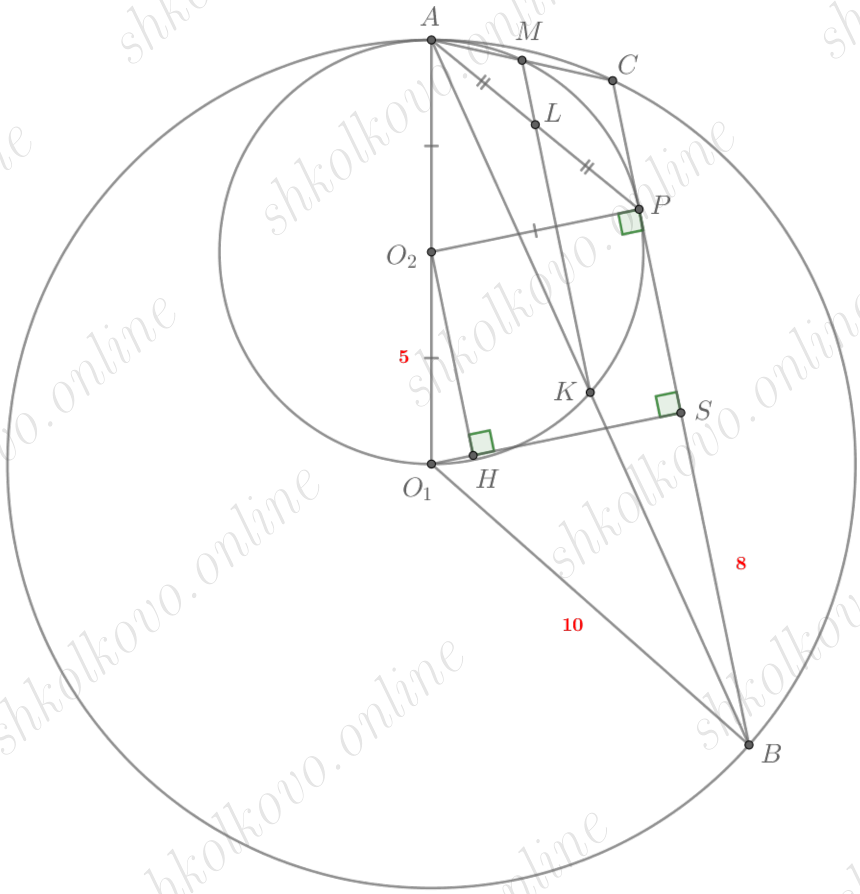
Таким образом, по признаку параллельных прямых $KM \parallel BC$.

б) Пусть O_1 и O_2 — центры большей и меньшей окружностей соответственно. Проведем радиус O_2P. Заметим, что $\angle BPO_2 = 90°$, так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Опустим перпендикуляр O_1S на BC. В равнобедренном треугольнике BO_1C отрезок O_1S — высота, а значит и медиана. Тогда $BS = SC$.

По теореме Пифагора для треугольника BO_1S :

$$O_1S^2 = BO_1^2 - BS^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2 \quad \Rightarrow \quad O_1S = 6$$



Так как отрезки O_1O_2 и O_2P — радиусы меньшей окружности, то

$$O_1O_2 = O_2P = 5$$

Рассмотрим прямоугольную трапецию O_2PSO_1.
Пусть O_2H — перпендикуляр к O_1S, тогда O_2HSP — прямоугольник и

$$O_1H = O_1S - HS = O_1S - O_2P = 6 - 5 = 1$$

Следовательно, по теореме Пифагора

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}$$

Тогда

$$BP = BS + SP = 8 + 2\sqrt{6}, \quad PC = BC - BP = 16 - 8 - 2\sqrt{6} = 8 - 2\sqrt{6}$$

Так как хорды данных окружностей, лежащие на одной прямой, проходящей через точку A, относятся как их диаметры, то KM — средняя линия в треугольнике ABC. Тогда KL — средняя линия в треугольнике ABP и ML — средняя линия в треугольнике ACP, следовательно,

$$KL = 0,5BP = 4 + \sqrt{6}, \quad ML = 0,5PC = 4 - \sqrt{6}$$

По теореме о произведении отрезков хорд имеем:

$$AL \cdot LP = ML \cdot KL = \left(4 - \sqrt{6}\right)\left(4 + \sqrt{6}\right) = 16 - 6 = 10$$

С учетом равенства $AL = LP$ получим $AL^2 = 10$, следовательно, $AL = \sqrt{10}$.

№16.2 *(Центр)*

Две окружности касаются внешним образом в точке B. AB и BC — диаметры первой и второй окружностей. Из точки A проведена касательная AM ко второй окружности, которая вторично пересекает первую окружность в точке K. Луч MB вторично пересекает первую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника BCD, если $AK = 7$, $KM = 14$.

Ответ

б) $\dfrac{147\sqrt{5}}{5}$

Решение

а) Вписанный угол BMC равен 90°, так как опирается на диаметр BC. Вписанный угол BDA равен 90°, так как опирается на диаметр BA. Таким образом, накрест лежащие углы BMC и BDA, образованные прямыми CM и AD и секущей MD, равны. Следовательно, прямые AD и CM параллельны.

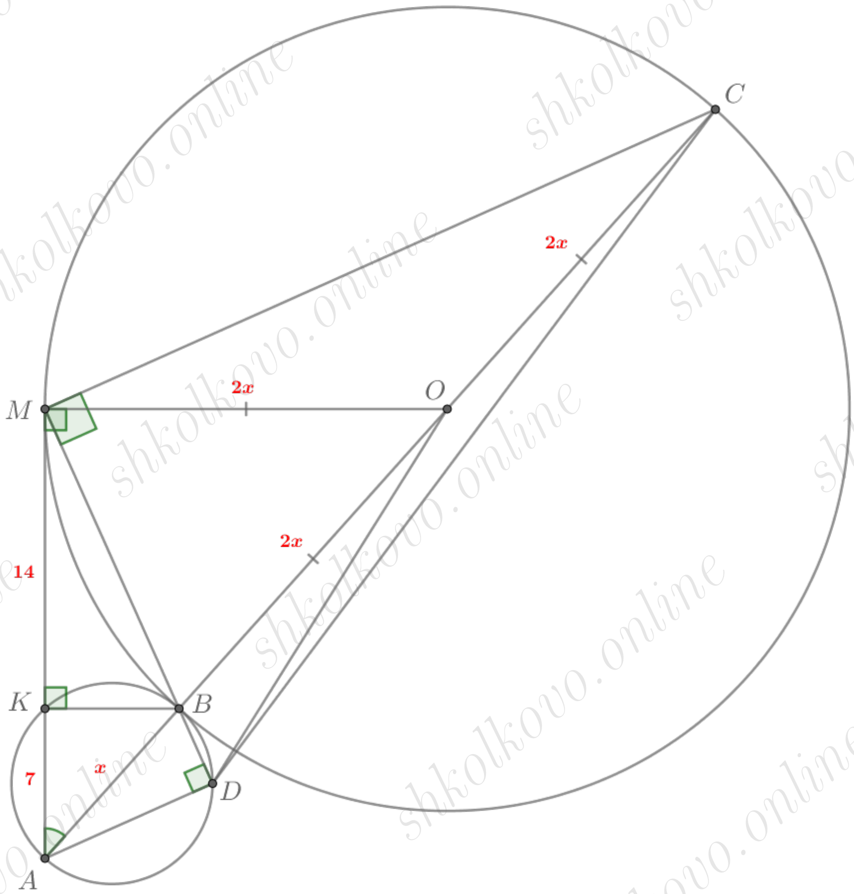
б) Пусть O — середина BC. Тогда O — центр окружности с диаметром BC. Проведем радиус OM к точке касания. Получим, что $\angle AMO = 90^\circ$.

Рассмотрим треугольники AKB и AMO. Они подобны по двум углам: $\angle AKB = \angle AMO = 90^\circ$, $\angle MAB$ — общий. Пусть $AB = x$. Запишем отношение подобия:

$$\frac{AK}{AM} = \frac{AB}{AO} \quad \Rightarrow \quad AO = \frac{21x}{7} = 3x \quad \Rightarrow \quad BO = 2x$$

Таким образом,

$$CO = MO = BO = 2x$$



Из отношения подобия треугольников AKB и AMO:

$$\frac{KB}{MO} = \frac{AK}{AM} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad KB = \frac{MO}{3} = \frac{2}{3}x$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник AKB. В нем по теореме Пифагора

$$AK^2 + KB^2 = AB^2$$

$$49 + \frac{4x^2}{9} = x^2$$

$$9 \cdot 49 + 4x^2 = 9x^2$$

$$9 \cdot 49 = 5x^2$$

$$x = \frac{21\sqrt{5}}{5}$$

Тогда

$$KB = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot \frac{21\sqrt{5}}{5} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$AMCD$ — трапеция, MD и AC — ее диагонали, а B — их точка пересечения. Значит, $S_{BCD} = S_{BMA}$. Тогда

$$S_{BCD} = S_{BMA} = \frac{1}{2} \cdot KB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{14\sqrt{5}}{5} \cdot 21 = \frac{147\sqrt{5}}{5}$$

№17

№17.1 *(Дальний восток)*
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ
$a \in (-3; +\infty) \backslash \{0; 2; 6; 12\}$

Решение
Перепишем уравнение в виде системы

$$\begin{cases} a = |4x| - x - 3 \\ a \neq x^2 - x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} & a = 3x - 3, \ x \geqslant 0 \\ & a = -5x - 3, \ x < 0 \end{aligned}\right. \\ a \neq x^2 - x \end{cases}$$

Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений системы. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из решений системы. Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых ровно две из точек вида $(x_0; a_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, принадлежат множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет ровно две точки пересечения с множеством S.

Решением совокупности на плоскости xOa является объединение двух лучей, а решением уравнения $a = x^2 - x$ является парабола. Следовательно, множеством S на плоскости xOa будет являться множество точек эти лучей за исключением тех точек параболы $a = x^2 - x$, которые являются точками пересечения параболы и этих лучей.

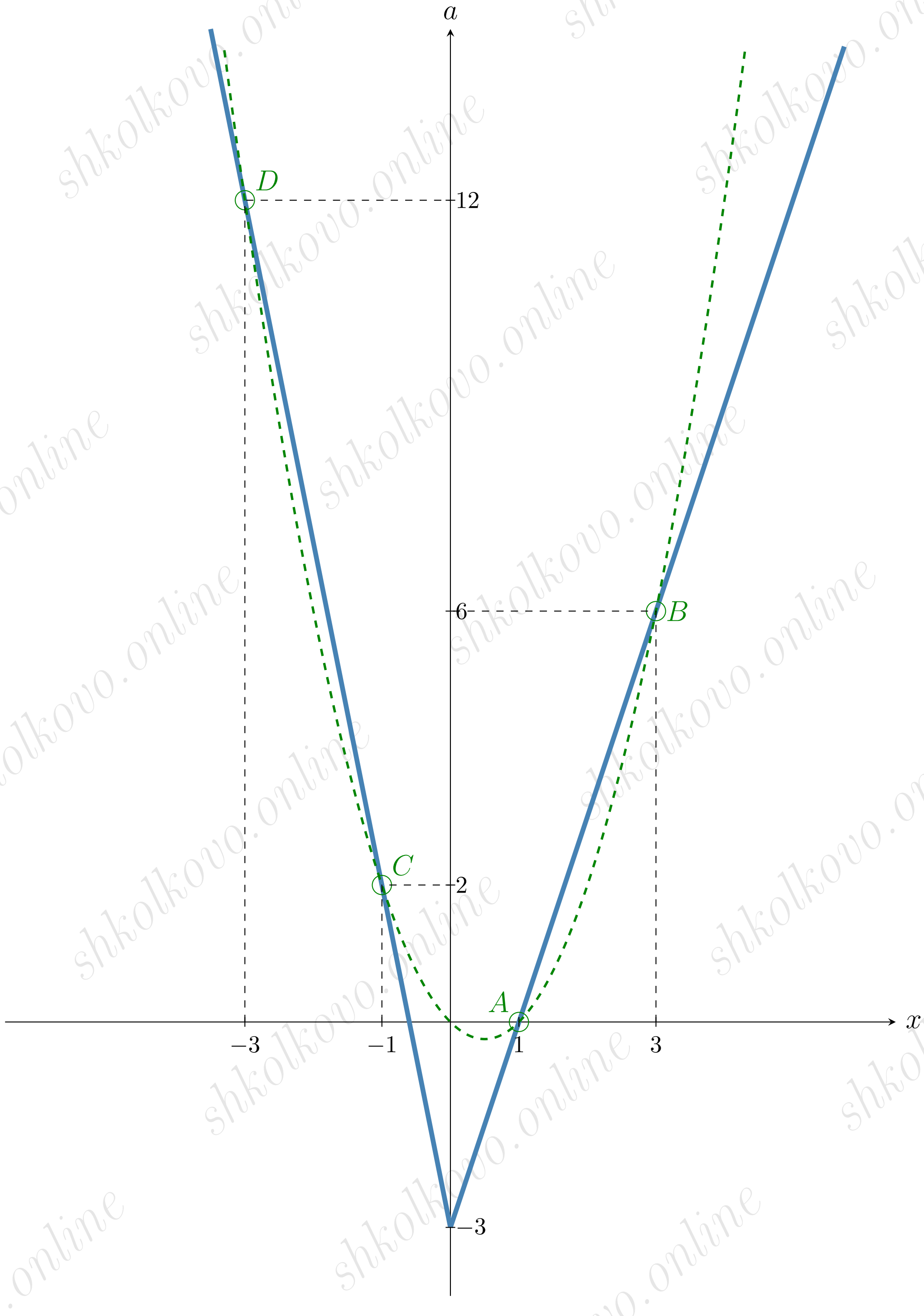
Найдем точки пересечения луча $a = 3x - 3$, $x \geqslant 0$, и параболы $a = x^2 - x$:

$$\begin{cases} a = x^2 - x \\ a = 3x - 3 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x = 3x - 3 \\ x \geqslant 0 \\ a = 3x - 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A(1; 0), B(3; 6).$$

Найдем точки пересечения луча $a = -5x - 3$, $x < 0$, и параболы $a = x^2 - x$:

$$\begin{cases} a = x^2 - x \\ a = -5x - 3 \\ x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x = -5x - 3 \\ x < 0 \\ a = -5x - 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad C(-1; 2), D(-3; 12).$$

Изобразим множество S на плоскости xOa (получим множество всех точек двух лучей с выколотыми точками A, B, C, D):



Таким образом, горизонтальная прямая $a = a_0$ пересекает множество S в двух точках, если $a_0 > -3$ и $a_0 \neq 0; 2; 6; 12$. Следовательно, ответ

$$a \in (-3; +\infty) \backslash \{0; 2; 6; 12\}.$$

№17.2 *(Дальний восток)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-3}\cdot\ln(5x-a)=\sqrt{4x-3}\cdot\ln(6x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Ответ

$a\in\left(-\dfrac{9}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[-\dfrac{3}{8};\dfrac{15}{4}\right)$

Решение

Уравнение на отрезке $[0;1]$ равносильно

$$\begin{cases}\sqrt{4x-3}\cdot(\ln(5x-a)-\ln(6x+a))=0\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{4x-3}=0\\ 5x-a>0\\ 6x+a>0\end{cases}\\ \begin{cases}\ln(5x-a)=\ln(6x+a)\\ 5x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ 4x-3\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$

После преобразований получаем следующую совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{4}\\ a<5x\\ a>-6x\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=-2a\\ a<5x\\ \dfrac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right.$$

Назовем корень хорошим, если он удовлетворяет всем условиям, находящимся с ним в системе. В противном случае будем называть корень плохим.

Найдем a, при которых x_1 — хороший:

$$\begin{cases}a<5\cdot\dfrac{3}{4}\\ a>-6\cdot\dfrac{3}{4}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad -\frac{9}{2}<a<\frac{15}{4}.$$

Найдем a, при которых x_2 — хороший:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4} \leqslant -2a \leqslant 1 \\ a < 5\cdot(-2a) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant -\dfrac{3}{8}.$$

В таком случае нам подходят ситуации, когда x_1 — хороший, x_2 — плохой, или наоборот, а также ситуация, когда $x_1 = x_2$ — хороший.

x_1 — хороший, а x_2 — плохой, если

$$\begin{cases} -\dfrac{9}{2} < a < \dfrac{15}{4} \\ \left[\begin{aligned} &a < -\dfrac{1}{2} \\ &a > -\dfrac{3}{8} \end{aligned}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{8}; \dfrac{15}{4}\right).$$

x_2 — хороший, а x_1 — плохой, если

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &a \leqslant -\dfrac{9}{2} \\ &a \geqslant \dfrac{15}{4} \end{aligned}\right. \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant -\dfrac{3}{8} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \varnothing.$$

$x_1 = x_2$ — хороший, если

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4} = -2a \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant -\dfrac{3}{8} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = -\dfrac{3}{8}.$$

Следовательно, объединяя полученные значения параметра, получаем ответ

$$a \in \left(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[-\dfrac{3}{8}; \dfrac{15}{4}\right).$$

№17.3 (*Томская обл.*)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-7}\cdot\ln(x^2-6x+10-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$.

Ответ

$a\in\left(-\dfrac{\sqrt{89}}{5};-\dfrac{8}{5}\right]\cup\left[\dfrac{8}{5};\dfrac{\sqrt{89}}{5}\right)$

Решение

На отрезке $[0;3]$ уравнение равносильно

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{5x-7}=0\\0\leqslant x\leqslant 3\\x^2-6x+10-a^2>0\end{cases}\\\begin{cases}x^2-6x+10-a^2=1\\5x-7\geqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\dfrac{7}{5}\\a^2<(x-3)^2+1\end{cases}\\\begin{cases}x_2=3+a\\\dfrac{7}{5}\leqslant x\leqslant 3\end{cases}\\\begin{cases}x_3=3-a\\\dfrac{7}{5}\leqslant x\leqslant 3\end{cases}\end{array}\right.$$

Назовем корень хорошим, если он удовлетворяет всем условиям, находящимся с ним в системе. В противном случае будем называть корень плохим. В такой терминологии нам подходят ситуации, когда среди корней совокупности есть ровно один хороший. Определим, когда каждый из корней x_1, x_2 или x_3 хороший.

x_1 — хороший, если

$$a^2<\frac{89}{25}\quad\Leftrightarrow\quad-\frac{\sqrt{89}}{5}<a<\frac{\sqrt{89}}{5}.$$

x_2 — хороший, если

$$\frac{7}{5}\leqslant 3+a\leqslant 3\quad\Leftrightarrow\quad-\frac{8}{5}\leqslant a\leqslant 0.$$

x_3 — хороший, если

$$\frac{7}{5}\leqslant 3-a\leqslant 3\quad\Leftrightarrow\quad 0\leqslant a\leqslant\frac{8}{5}.$$

Теперь рассмотрим подходящие нам комбинации.

x_1 — хороший, x_2, x_3 — плохие:

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{89}}{5} < a < \dfrac{\sqrt{89}}{5} \\ \left[\begin{aligned} & a < -\dfrac{8}{5} \\ & a > 0 \end{aligned}\right. \\ \left[\begin{aligned} & a < 0 \\ & a > \dfrac{8}{5} \end{aligned}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(-\dfrac{\sqrt{89}}{5}; -\dfrac{8}{5}\right) \cup \left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{\sqrt{89}}{5}\right).$$

x_2 — хороший, x_1, x_3 — плохие:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & a \leqslant -\dfrac{\sqrt{89}}{5} \\ & a \geqslant \dfrac{\sqrt{89}}{5} \end{aligned}\right. \\ -\dfrac{8}{5} \leqslant a \leqslant 0 \\ \left[\begin{aligned} & a < 0 \\ & a > \dfrac{8}{5} \end{aligned}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \varnothing.$$

x_3 — хороший, x_1, x_2 — плохие:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & a \leqslant -\dfrac{\sqrt{89}}{5} \\ & a \geqslant \dfrac{\sqrt{89}}{5} \end{aligned}\right. \\ \left[\begin{aligned} & a < -\dfrac{8}{5} \\ & a > 0 \end{aligned}\right. \\ 0 \leqslant a \leqslant \dfrac{8}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \varnothing.$$

$x_1 = x_2$ — хороший, x_3 — плохой:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{5} = 3 + a \\ -\dfrac{8}{5} \leqslant a \leqslant 0 \\ \left[\begin{aligned} & a < 0 \\ & a > \dfrac{8}{5} \end{aligned}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = -\dfrac{8}{5}.$$

$x_1 = x_3$ — хороший, x_2 — плохой:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{5} = 3 - a \\ \left[\begin{aligned} & a < -\dfrac{8}{5} \\ & a > 0 \end{aligned}\right. \\ 0 \leqslant a \leqslant \dfrac{8}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{8}{5}.$$

$x_2 = x_3$ — хороший, x_1 — плохой:

$$\begin{cases} 3 + a = 3 - a \\ \left[\begin{aligned} & a \leqslant -\dfrac{\sqrt{89}}{5} \\ & a \geqslant \dfrac{\sqrt{89}}{5} \end{aligned}\right. \\ -\dfrac{8}{5} \leqslant a \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \varnothing.$$

Объединяя полученные значения параметра. получаем ответ

$$a \in \left(-\dfrac{\sqrt{89}}{5}; -\dfrac{8}{5}\right] \cup \left[\dfrac{8}{5}; \dfrac{\sqrt{89}}{5}\right).$$

№18

№18.1 *(Дальний восток)*

Егор делит линейку на части. За одно действие он может отрезать от любого количества линеек равные части, имеющие целую длину.

а) Может ли Егор за 4 хода разделить линейку длиной в 16 см на части по 1 см?

б) Может ли Егор за 5 ходов разделить линейку длиной в 100 см на части по 1 см?

в) За какое наименьшее количество ходов Егор может разделить линейку длиной в 300 см на части по 1 см?

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 9

Решение

а) Да, Егор может за 4 хода разделить линейку длиной в 16 см на части по 1 см.

Первым ходом он разделит линейку на две части по 8 см.

Вторым ходом он отрежет от обеих частей по 4 см и получит четыре части по 4 см.

Третим ходом Егор отрежет от всех частей по 2 см и получит восемь частей по 2 см.

Четвертым ходом он отрежет от всех частей по 1 см и получит требуемое.

б) Пусть у Егора в какой-то момент есть x частей линейки. Тогда после следующего действия у него будет не более $2x$ частей. Таким образом, за ход Егор максимум может удвоить количество частей. Значит, за 5 ходов у Егора будет не более $2^5 = 32$ частей. Но если линейка длиной в 100 см поделена на части по 1 см, то у Егора должно быть 100 частей.

Значит, Егор не сможет за 5 ходов разделить линейку длиной в 100 см на части по 1 см.

в) Из пункта б) мы понимаем, что Егору нужно хотя бы 9 действий, так как $300 > 2^8 = 256$.

Приведем пример на 9 действий:

Первым действием Егор отрежет часть длиной в 44 см и получит две части: 256 см и 44 см.

Вторым действием Егор отрежет от части в 256 см часть длиной в 128 см и получит три части: две по 128 см и одну 44 см.

Третим действием Егор отрежет от частей в 128 см части длиной в 64 см и получит пять частей: четыре по 64 см и одну 44 см.

Четвертым действием Егор отрежет от всех частей часть длиной в 32 см и получит десять частей: девять по 32 см и одну 12 см.

Пятым действием Егор отрежет от частей в 32 см часть длиной в 16 см и получит 19 частей: 18 по 16 см и одну 12 см.

Шестым действием Егор отрежет от всех частей часть длиной в 8 см и получит 38 частей: 37 по 8 см и одну 4 см.

Седьмым действием Егор отрежет от частей в 8 см часть длиной в 4 см и получит 75 частей по 4 см.

Восьмым и девятым действиями Егор поделит все части пополам и в итоге получит 300 частей по 1 см.

№18.2 *(Дальний восток)*

У Пети дома лежат по 100 монет номинала 1, 2, 5 и 10 рублей. Он хочет купить пирожное в магазине без сдачи, но до момента покупки Петя не знает, сколько стоит пирожное.

а) Может ли Петя выбрать дома 16 монет так, чтобы гарантированно купить пирожное стоимостью до 100 рублей?

б) Может ли Петя выбрать дома 5 монет так, чтобы гарантированно купить пирожное стоимостью до 25 рублей?

в) Какое наименьшее количество монет нужно взять Пете, если он знает, что пирожное стоит не более 100 рублей?

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 13

Решение

а) Петя может взять десять монет номиналом 10. Тем самым он сможет без сдачи оплатить пирожное, стоимость которого кратна 10.

Еще Петя возьмет одну монету номиналом 5 и сможет без сдачи оплатить пирожное, стоимость которого кратна 5.

Петя возьмет одну монету номиналом 1 и сможет без сдачи оплатить пирожное, стоимость которого дает остаток 1 при делении на 5.

Петя возьмет две монеты номиналом 2 и сможет без сдачи оплатить пирожное, стоимость которого дает остаток 2 или 4 при делении на 5.

Еще Петя возьмет одну монету номиналом 1 и одну монету номиналом 2 и сможет без сдачи оплатить пирожное, стоимость которого дает остаток 3 при делении на 5.

Таким образом, Петя возьмет с собой $10 + 1 + 1 + 2 + 2 = 16$ монет и сможет без сдачи оплатить пирожное стоимостью до 100 рублей.

б) Чтобы без сдачи оплатить пирожное, стоимость которого дает остаток 1 при делении на 5, Петя обязательно должен взять с собой монету номиналом 1.

Чтобы без сдачи оплатить пирожное, стоимость которого дает остаток 4 при делении на 5, Петя обязательно должен взять с собой две монеты номиналом 2.

Чтобы без сдачи оплатить пирожное, стоимость которого дает остаток 9 при делении на 10, Петя обязательно должен взять с собой монету номиналом 5.

Итого, Петя уже обязательно должен взять четыре монеты, которые в сумме дают 10 рублей. Тогда максимум Петя можем взять с собой 20 рублей. Следовательно, Петя не может выбрать дома 5 монет так, чтобы гарантированно купить пирожное стоимостью до 25 рублей.

в) По соображениям из пункта б) Петя обязательно должен взять четыре монеты следующими номиналами: 1, 2, 2 и 5.

Чтобы оплатить пирожное стоимостью 100 рублей, Петя должен взять дома еще 90 рублей. Минимальное количество монет, которыми можно набрать 90 рублей — 9. Тогда Петя обязан взять с собой хотя бы 13 монет: 1, 2, 2, 5 и 9 монет по 10 рублей.

Докажем, что любую цену Петя сможет оплатить без сдачи. Очевидно, что он может оплатить любую стоимость, кратную 10. При этом, если стоимость не равна 100, то у него всегда останутся монеты 1, 2, 2 и 5. Тогда осталось доказать, что монетами 1, 2, 2 и 5 Петя может набрать любое число от 1 до 9.

$$1 = 1$$
$$2 = 2$$
$$3 = 1 + 2$$
$$4 = 2 + 2$$
$$5 = 5$$
$$6 = 5 + 1$$
$$7 = 5 + 2$$
$$8 = 5 + 1 + 2$$
$$9 = 5 + 2 + 2$$

Значит, Петя должен взять дома минимум 13 монет, чтобы гарантированно оплатить без сдачи пирожное стоимостью не более 100 рублей.

№18.3 (*Центр*)

Дано натуральное число. Из него либо вычитают утроенную сумму цифр, либо прибавляют утроенную сумму цифр, при этом полученное число должно быть натуральным.

а) Могло ли из числа 128 получиться число 29?

б) Могло ли из числа 128 получиться число 31?

в) Какое наименьшее число можно получить из 128?

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 2

Решение

а) Построим пример:

$$128 \xrightarrow[-33]{} 95 \xrightarrow[-42]{} 53 \xrightarrow[-24]{} 29$$

б) Заметим, что утроенная сумма цифр натурального числа делится на 3. Тогда если к натуральному числу прибавить или вычесть из него утроенную сумму его цифр, то остаток при делении на 3 не изменится. Значит, у всех полученных чисел остаток будет таким же, как у числа 128.

Число 128 дает остаток 2 при делении на 3. Значит, у чисел, полученных в результате таких операций, остаток также будет равен 2. Так как число 31 дает остаток 1 при делении на 3, то из 128 не могло получиться число 31.

в) Наименьшее натуральное число — это 1. Так как 1 дает остаток 1 при делении на 3, а 128 — остаток 2, то из числа 128 не могло получиться число 1. Тогда наименьшее число, которое могло получиться из 128, — это 2. Приведем пример на 2:

$$128 \xrightarrow[-33]{} 95 \xrightarrow[-42]{} 53 \xrightarrow[+24]{} 77 \xrightarrow[-42]{} 35 \xrightarrow[+24]{} 59 \xrightarrow[-42]{} 17 \xrightarrow[+24]{} 41 \xrightarrow[-15]{} 26 \xrightarrow[-24]{} 2$$