

Информатика. Алгебра логики, все основные сведения.

Алгебра логики - раздел математики, в котором изучаются логические операции над высказываниями. Нам нужно будет работать с бинарной логикой, то есть высказывания могут быть только истинными или ложными.

Например:

- 19 - простое число
- 8 кратно 3
- 21 - число палиндром

Логическая переменная - это переменная, которая обозначает любое высказывание и может принимать логические значения «истина» или «ложь».

Логическая операция - операция над высказываниями, которая позволяет составить новые высказывания путем соединения простых.

Например:

- 19 - простое число и число, делящееся на 3 (Ложно)
- 25 делится на 5 и делится на 7 (Ложно)
- 25 делится на 5 или делится на 7 (Истино)

Перечислим интересные нам операции:

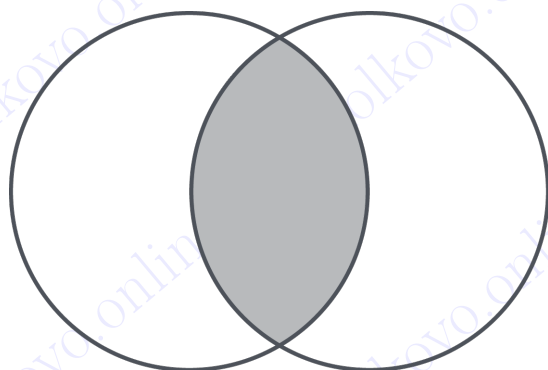
1. **Конъюнкция** - логическое И (логическое умножение). При конъюнкции высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания. Обозначается $\wedge$.

Например:

- $(25 \text{ делится на } 5) \wedge (25 \text{ делится на } 7)$ - выражение является ложным, так как правая скобка является ложной.
- $(\text{трава зелёная}) \wedge (2 + 2 = 4)$ - выражение является истинным, так как обе скобки являются истинными.

- $(\text{коровы пьют молоко}) \wedge (\text{овечки едят волков})$ - выражения является ложным, так как обе скобки являются ложными.

Наглядный вид конъюнкции на кругах Эйлера:



На картинке можно увидеть, что конъюнкция берет пересечение двух высказываний.

Таблица истинности для конъюнкции:

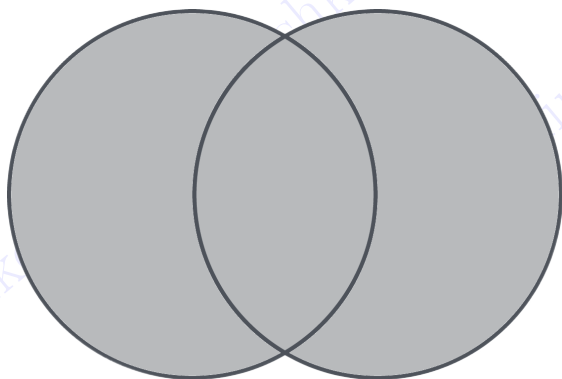
x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. **Дизъюнкция** - логическое ИЛИ (логическое сложение) При дизъюнкции выражение ложно тогда и только тогда, когда ложны все входящие в него простые высказывания. Обозначается $\vee$.

Например:

- $(25 \text{ делится на } 5) \vee (25 \text{ делится на } 7)$ - выражение истинно, так как истина левая скобка.
- $(\text{трава красная}) \vee (2 + 2 = 5)$ - выражение ложно, так как обе скобки являются ложными.

Наглядный вид дизъюнкции на кругах Эйлера:



На картинке можно увидеть, что дизъюнкция берет так называемое объединение двух высказываний, то есть ситуация, когда хоть одно является истинным.

Таблица истинности для дизъюнкции:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. **Отрицание** - операция, которая делает истинное высказывание ложным, а ложное истинным. Обозначается $\bar{x}$.

Например: НЕ(х равен 5) обозначает, что х не равен 5.

Наглядный вид отрицания на кругах Эйлера:



Как можно увидеть, отрицание берет все, что не входит данную область.

Таблица истинности для отрицания:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

4. **Эквиваленция** - проверка двух высказываний на совпадение значений, то есть она истина, когда оба высказывания истины или оба ложны.

Таблица истинности для эквиваленции:

x	y	$x \equiv y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. **Импликация** - логическое следование. Ложно тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложно. Обозначается $\rightarrow$.

Импликацию можно понять на примере дождя, но для этого сначала приведем таблицу истинности импликации:

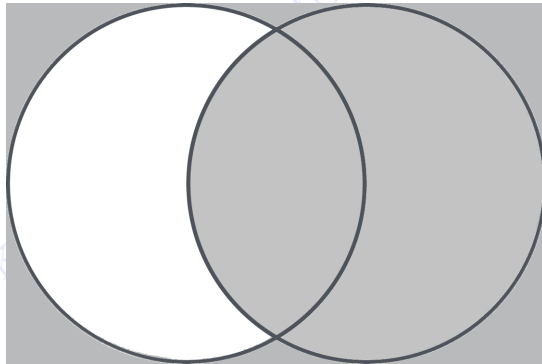
x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример про дождь:

- Если не идёт дождь ($x = 0$) и ты не взял зонт ($y = 0$), значит, ты сухой.
($x \rightarrow y = 1$)
- Если не идёт дождь ($x = 0$) и ты взял зонт ($y = 1$), значит, ты сухой.
($x \rightarrow y = 1$)

- Если идёт дождь ($x = 1$) и ты не взял зонт ($y = 0$), значит, ты промок.
($x \rightarrow y = 0$)
- Если идёт дождь ($x = 1$) и ты взял зонт ($y = 1$), значит, ты сухой.
($x \rightarrow y = 1$)

Наглядный вид импликации на кругах Эйлера:



Операции можно скрещивать. Например, чтобы составить отрицание импликации, распишите таблицу истинности импликации и навесьте отрицание. То есть:

x	y	$\overline{x \rightarrow y}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Основные формулы алгебры логики:

1. $x \wedge \bar{x} = 0$
2. $x \wedge x = x$
3. $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$

Переместительный закон:

4. $x \vee y = y \vee x$
5. $x \wedge y = y \wedge x$

Сочетательный закон:

6. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

$$7. (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

Формулы поглощения:

$$8. x \vee (x \wedge y) = x$$

$$9. x \wedge (x \vee y) = x$$

$$10. x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$$

$$11. x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge y$$

Законы де Моргана:

$$12. \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

$$13. \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

Формулы склеивания:

$$14. (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$$

$$15. (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x$$

Для лучшего понимания, лучше составьте таблицы истинности для каждого закона и проверьте их.

Задача на таблицу истинности:

Для лучшего понимания алгебры логики разберем еще 2 задачу ЕГЭ:

Логическая функция F задаётся выражением:

$$(x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (\bar{x} \equiv \bar{z})$$

Ниже представлен фрагмент таблицы истинности функции F .

???	???	???	F
1	0	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0

Определите, какому столбцу истинности функции F соответствует каждая переменная x, y, z .

Рассуждать нужно подобным образом:

Импликация ложна в случае, когда первая скобка будет истинной, а вторая скобка будет ложной. Вторая скобка ложна в случае, когда переменные x, z имеют разные значения. Из первой и третьей строчек мы можем сделать вывод о том, что эти переменные не могут занимать второй и третий, первый и второй столбцы. Следовательно, y занимает второй столбец. Рассмотрим вторую строку, в ней $y = 1$. Так как $(x \rightarrow \bar{y}) = 1$, то $x = 0$. Значит x занимает третий столбец, а z занимает первый.

Задача на неполную таблицу истинности:

Логическая функция F задаётся выражением:

$$(z \equiv x) \vee (\bar{y} \wedge x)$$

Ниже представлен фрагмент таблицы истинности функции F , содержащий неповторяющиеся строки, при которых функция F ложна.

???	???	???	F
0	0	1	0
0	???	???	0
???	1	0	0

Определите, какому столбцу истинности функции F соответствует каждая переменная x, y, z .

Рассуждать тут нужно подобным образом:

1. $F = 0$ тогда, когда дизъюнкция ложна, а ложна она в случае, когда обе скобки ложны. Значит z, x имеют разные значения. Предположим, что x занимает третий столбец. Обратимся к первой строке. Но тогда конъюнкция во второй скобке истинна, что делает $F = 1$. Если y занимает третий столбец, то $z = x = 0$, что также делает $F = 1$. Следовательно, третий столбец занят переменной z .

2. Обратимся к третьей строке, в ней $z = 0$, значит, $x = 1$. Тогда $y = 1$.

3. Теперь обратимся ко второй строчке. Предположим, что в ней $z = 0$. Тогда $x = 1$, а значит, занимает второй столбец. Но тогда $y = 1$, что не подходит для второй строки. Значит в ней $z = 1$. Тогда $x = 0$, а значит, $y = 0$, либо $y = 1$. В первом случае строка совпадет с первой строкой, значит подойдёт второй вариант. Таким образом, y занимает второй столбец, а x занимает первый.

Введение в метод друзей врагов:

Для примера разберем задачу:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [8; 12]$ и $Q = [4; 30]$. Укажите наибольшую возможную длину промежутка A , для которого формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \overline{(x \in A)}$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любых значениях переменной x).

Представим, что мы нажили неведомых врагов, которые во что бы то ни было хотят сделать это выражение ложным. Нужно помнить, что враги могут контролировать только x , A им не подконтрольно. Напишем, чего хотят враги:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in P \\ x \in Q \end{array} \right. \\ \left. \left[\begin{array}{l} x \notin P \\ x \notin Q \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Отсюда следует, что врагам нужно, чтобы или x был и в P , и в Q , или же x не был ни в P , ни в Q , при этом всё x должен находиться в промежутке A .

Так как нам нужно, чтобы выражение всегда было истинно, заведем друзей, которые будут ломать мечты врагов. Друзья уже имеют право изменять A по своему усмотрению в отличие от врагов. Как будут рассуждать друзья:

Обратим внимание, что отрезок P ($[8; 12]$) находится в отрезке Q ($[4; 30]$). Таким образом, получается, что система врагов ломается, если x принадлежит отрезку $[4; 30]$, но при этом не принадлежит отрезку $[8; 12]$, или же, если x не принадлежит промежутку A .

Следовательно, друзьям необходимо сделать такой A , что если x попадает в данный промежуток, то при этом x также будет входить в Q , но не входить в P . Под ответ подходят два промежутка - $[4; 8)$ (длина - 4) и $(12; 30]$ (длина - 18), но так как в условии задачи просят найти наибольшую возможную длину промежутка A , то ответ - 18.