

Серия 14. Квадратный трёхчлен–3. Вокруг параболы

18 июня

1. При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ меньше 2, а другой больше 2?

2. При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ лежат на интервале $(0, 3)$?

3. При каких a неравенство $ax^2 + (a + 1)x - 3 < 0$ выполняется при всех $x < 2$?

4. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

5. Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q . Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p + q$?

6. [Всеросс, округ, 2002] Приведённый квадратный трёхчлен (то есть со старшим коэффициентом 1) с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

7. [Всеросс, закл, 2017] На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые l_1 и l_2 . Известно, что отрезки, отсекаемые графиками на l_1 , равны, и отрезки, отсекаемые графиками на l_2 , также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают.

Домашнее задание

8. При каких a корни уравнения

$$x^2 + 2(a - 2)x - 4a + 5 = 0$$

различны и оба больше -1 ?

9. При каких значениях a один корень уравнения $ax^2 + 2x + 2a + 1 = 0$ меньше 1, а другой больше 1?

10. Рассматриваются всевозможные квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2002$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

11. Даны вещественные числа A, B, C, D . Известно, что модули всех корней уравнений $x^2 + Ax + B = 0$, $x^2 + Cx + D = 0$ меньше единицы. Докажите, что модули корней уравнения $x^2 + 1/2(A + C)x + 1/2(B + D) = 0$ также меньше единицы.

12. [Всеросс, округ, 2001] Длины сторон многоугольника равны a_1, a_2, \dots, a_n . Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \dots + a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A) = f(B)$.

13. [Кавказская мат. олимпиада, 2018] Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в точках A и B . Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB , которые пересекают второй график в точках C и D . Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс.