

Интенсив по фурам. Веб 1, разные идеи

9 июля

1. Решите функциональное уравнение $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x$.
2. [ПВГ, 2015, 9–10 класс] Найдите функцию $f(x)$, о которой известно, что

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) + 3 & \text{при } x \neq 2 \\ 0 & \text{при } x = 2 \end{cases}.$$

3. Решите функциональное уравнение $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.
4. Решите функциональное уравнение $f(x + y) = x + f(y)$.
5. Решите функциональное уравнение $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$.
6. Решите функциональное уравнение $f(x) + y^2 = f(y) + x^2 - y + x$.
7. [ОММО, 2023] Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a , что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$2f(xy + 3) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Домашнее задание

8. Решите функциональное уравнение $2xf(x) + 1 = 4f(1 - x)$.
9. Решите функциональное уравнение $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$.
10. Решите функциональное уравнение $f(x^2 - y) = f(x^3 + 2y) + f(x^4)$.
11. Решите функциональное уравнение $f(x + y) = f(x - y) + 4xy(x + y)$.
12. [ДВИ, 2008] Найдите все функции f , удовлетворяющие уравнению

$$f(x) + (x - 2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

13. [ПВГ, 2019, 10–11 класс] Найдите все возможные значения величины

$$T = \frac{f(t) - f(0)}{f(t^2) + f(t) - 2f(0) + 2},$$

если $f(2x + y) - f(x + y) = 2x$ для всех действительных значений x и y .