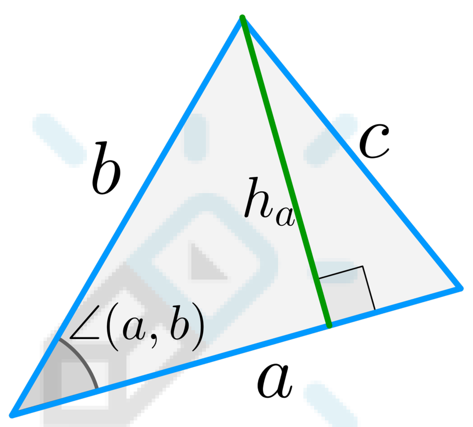
Планиметрия ЕГЭ 2023

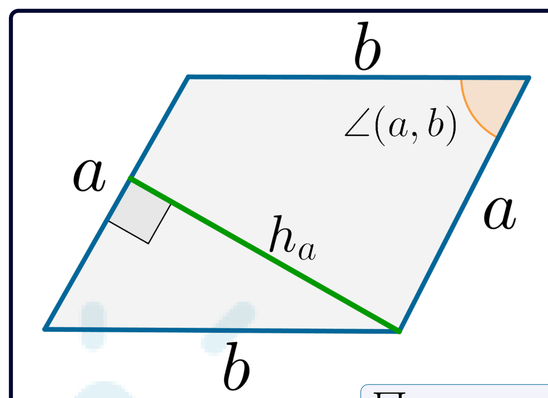
Факты, выделенные розовым, нужно уметь доказывать на экзамене

Площадь △:

$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\angle(a, b)$





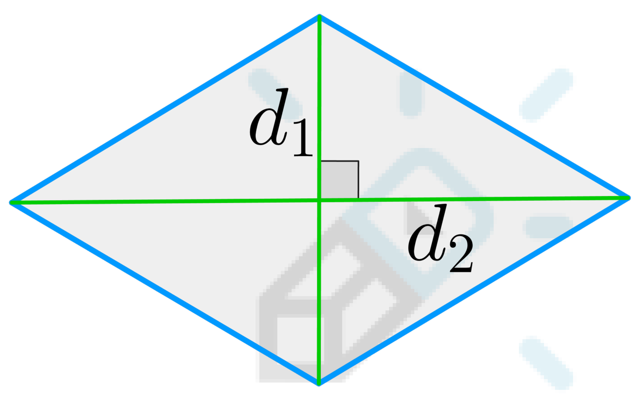
Площадь парал-ма

$S = ab \cdot \sin\angle(a, b)$

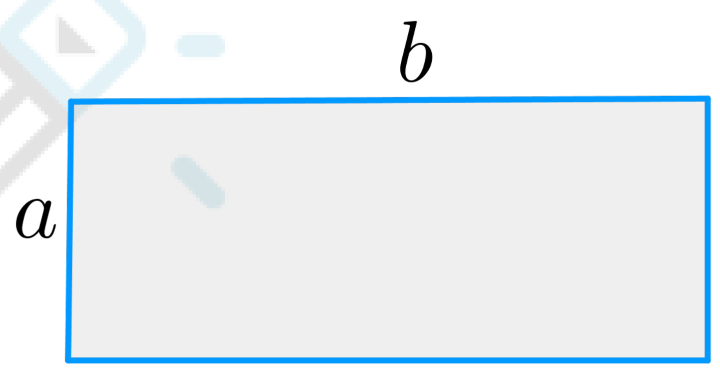
$S = a \cdot h_a$

Площадь ромба

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$



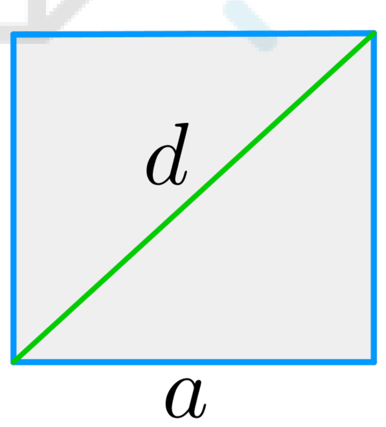
Площадь прямоугольника равна $S = ab$.



Площадь квадрата

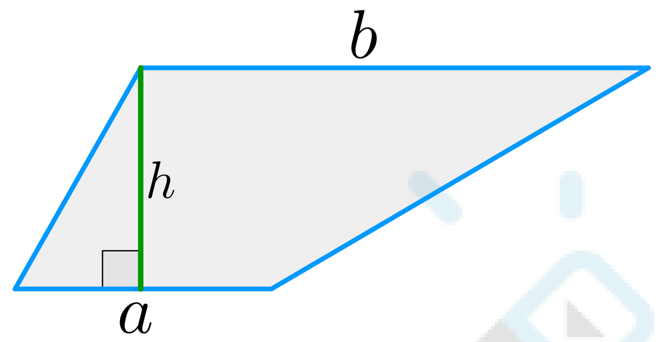
$S = a^2$

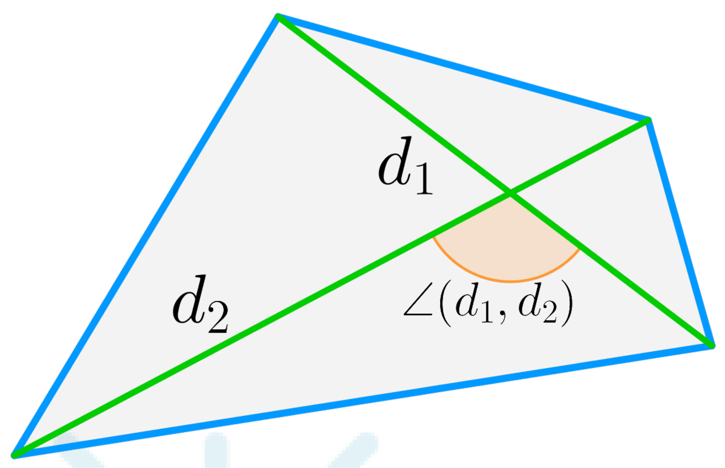
$S = \frac{1}{2}d^2$



Площадь трапеции

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$

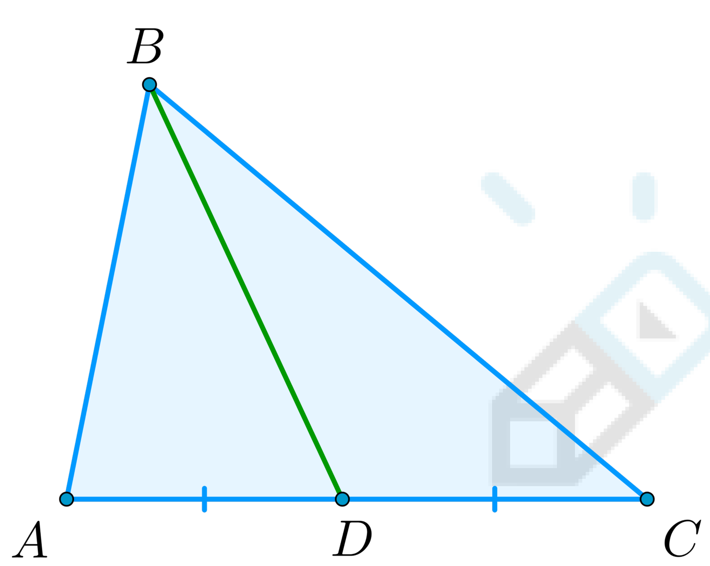




$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\angle(d_1, d_2)$

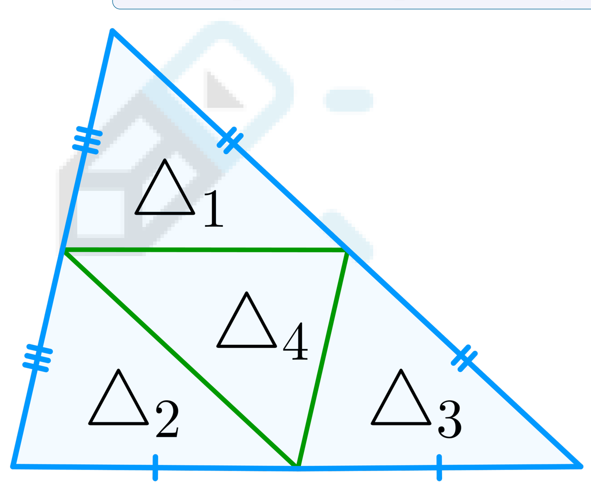
Медиана разбивает △ на два равновеликих.

$S_{ABD} = S_{CBD}$

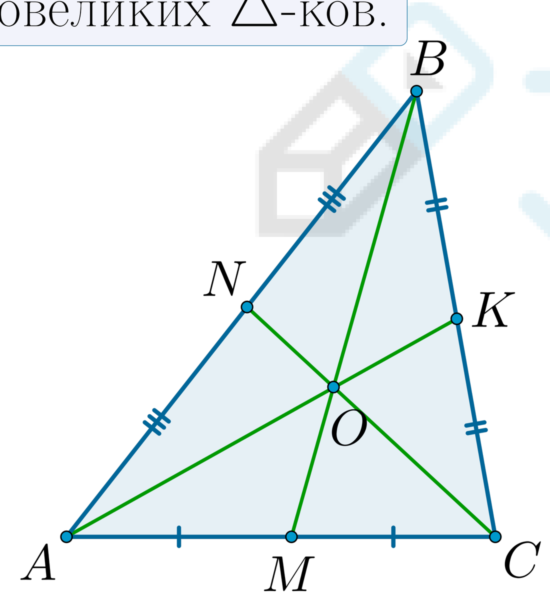


Среднии линии △-ка делят его на 4 равновеликих:

$S_{\triangle_1} = S_{\triangle_2} = S_{\triangle_3} = S_{\triangle_4}$

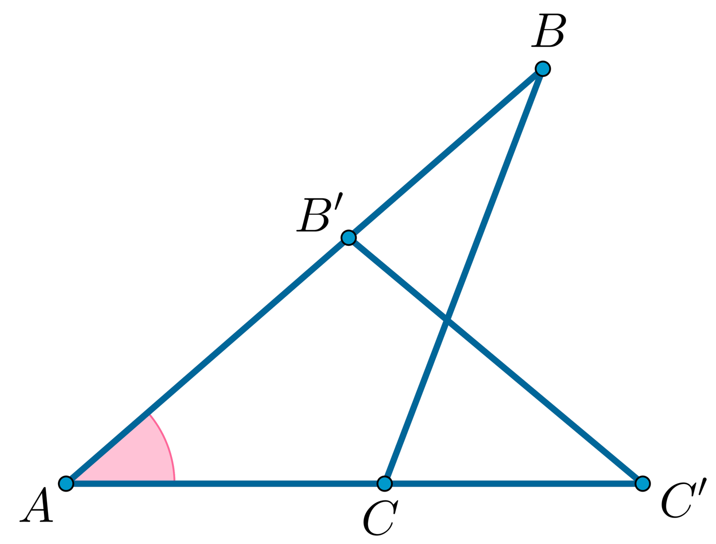


Медианы △-ка делят его на 6 равновеликих △-ков.



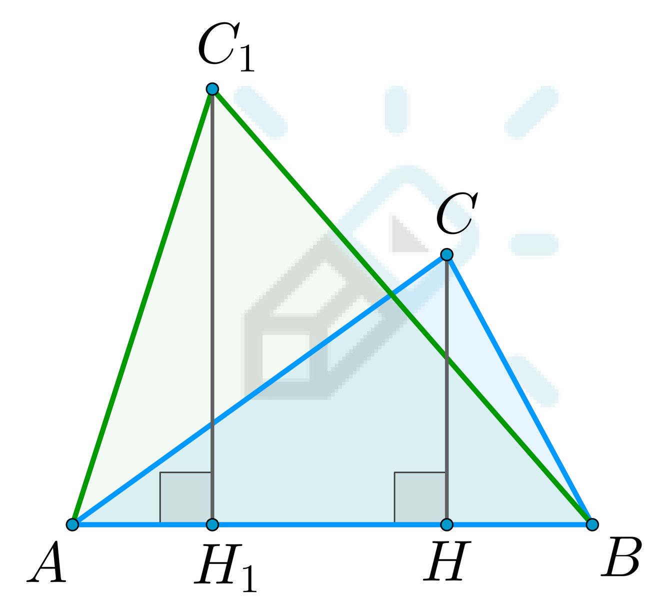
$\angle A$ – общий, значит

$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$



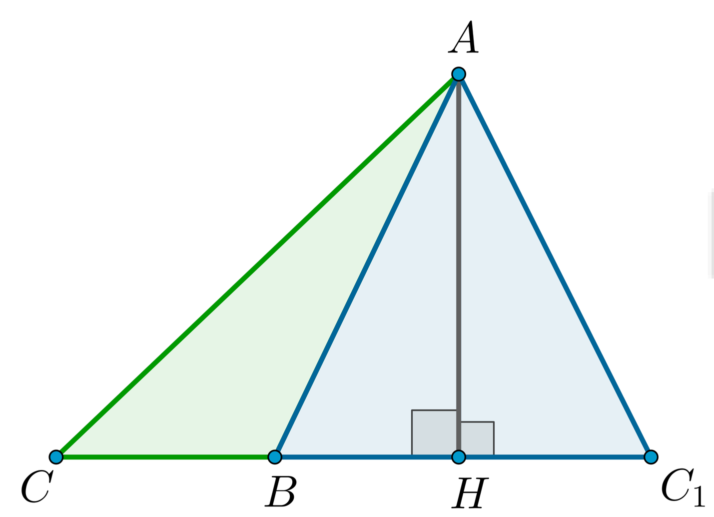
AB – общее основание, следовательно,

$S_{ABC} : S_{ABC_1} = CH : C_1H_1.$



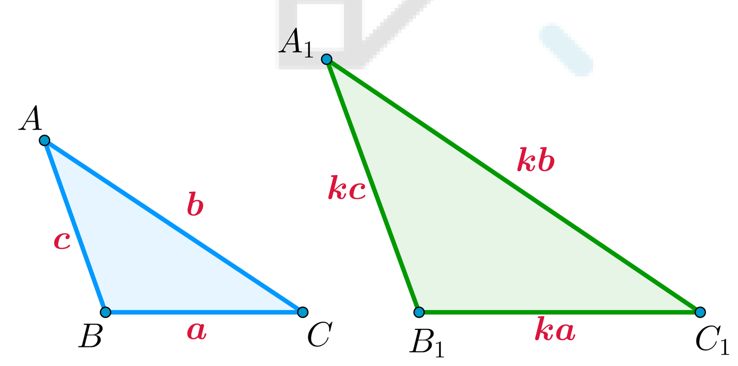
AH — общая высота, значит

$S_{ABC} : S_{ABC_1} = BC : BC_1.$



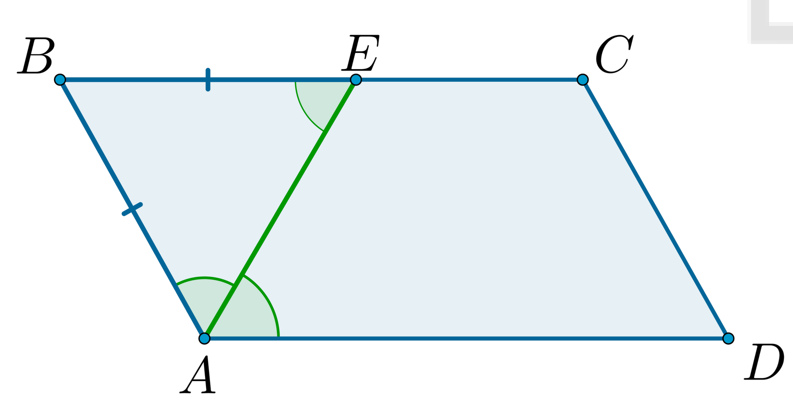
Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

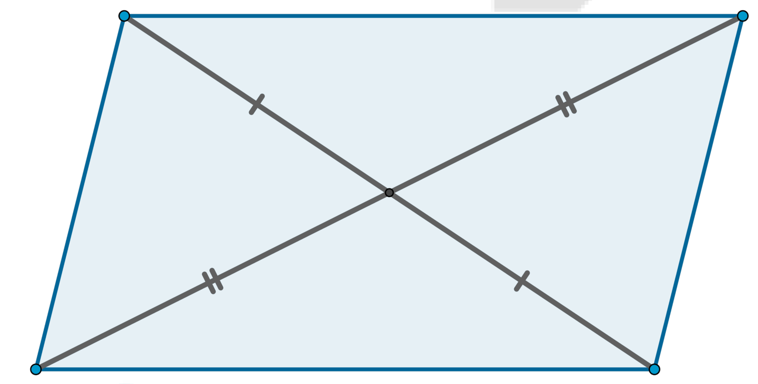
$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2$



Биссектриса AE параллелограмма отсекает от него равнобедренный $\triangle ABE$:

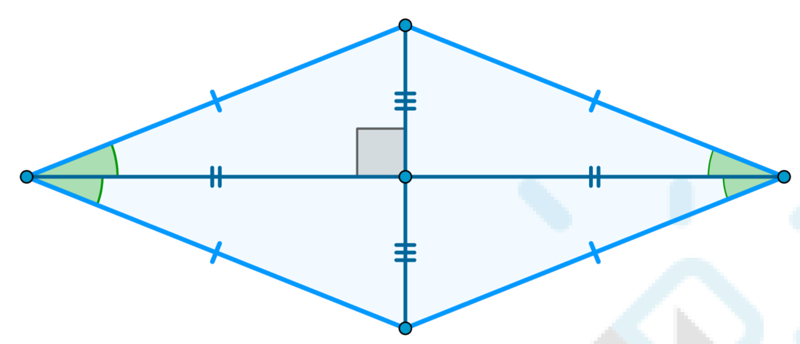
$AB = BE$

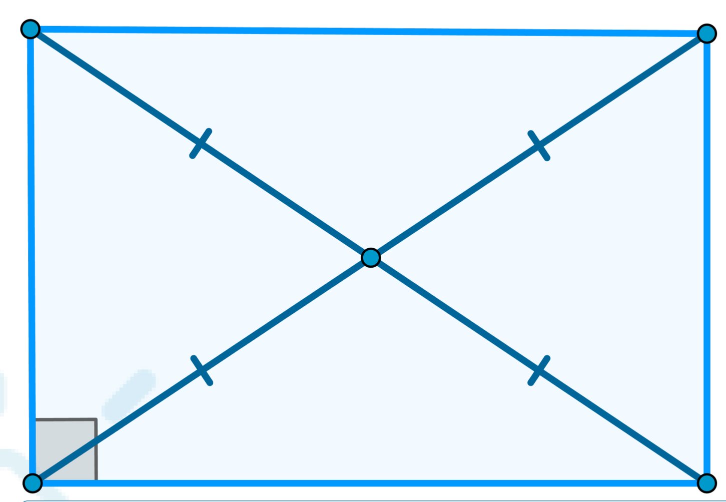




Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба.



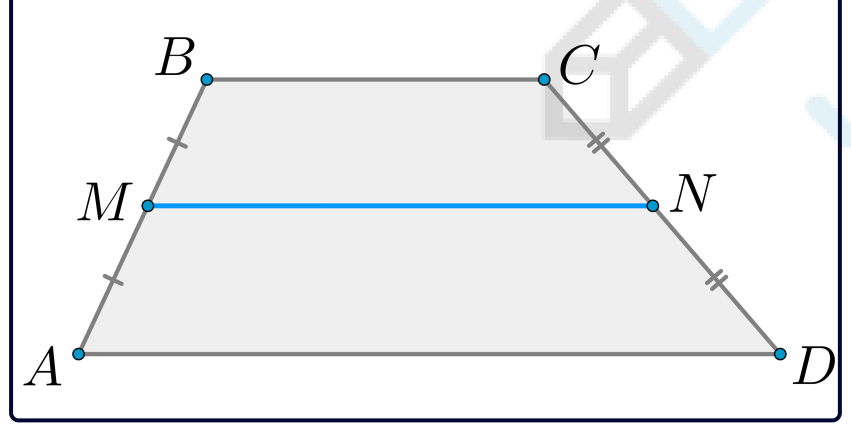


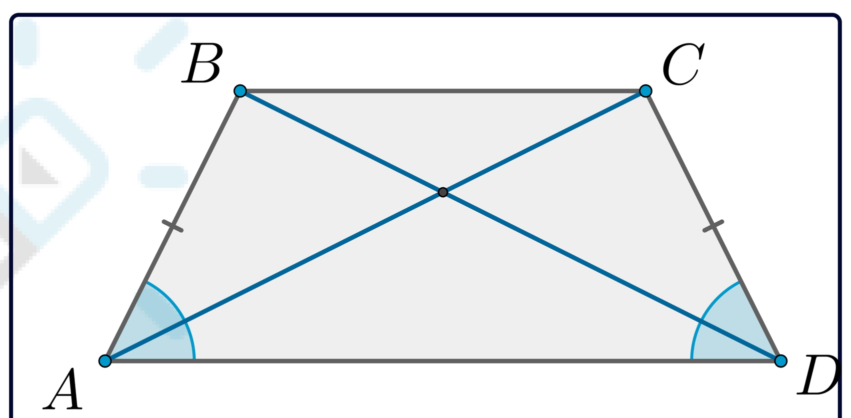
Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам

Средняя линия трапеции:

$MN \parallel AD \parallel BC$

$MN = \frac{AD + BC}{2}$

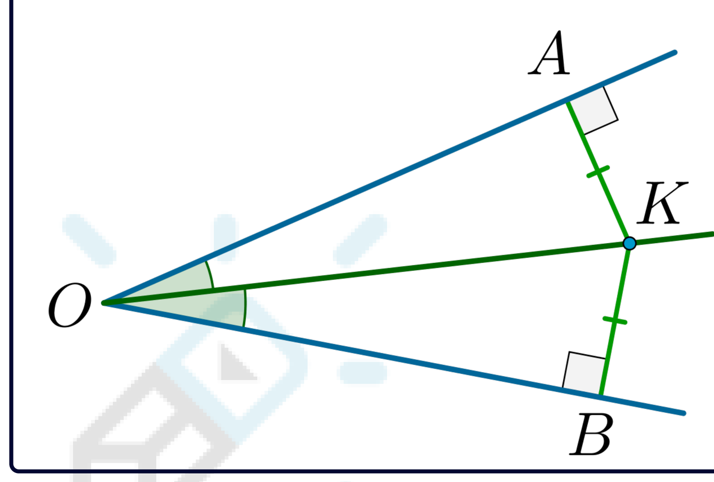




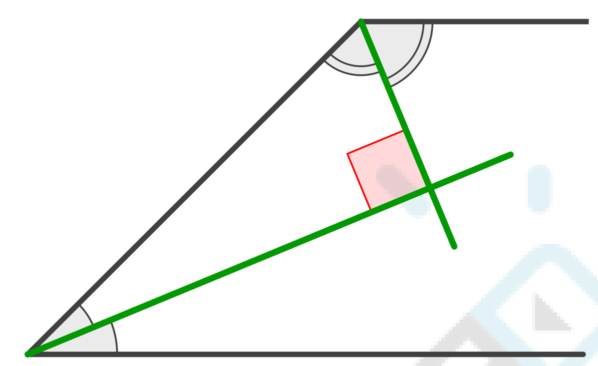
В равнобедренной трапеции углы при основании и диагонали равны.

OK – бис-са $\Leftrightarrow KA = KB$,

KA, KB – расстояния до сторон угла.

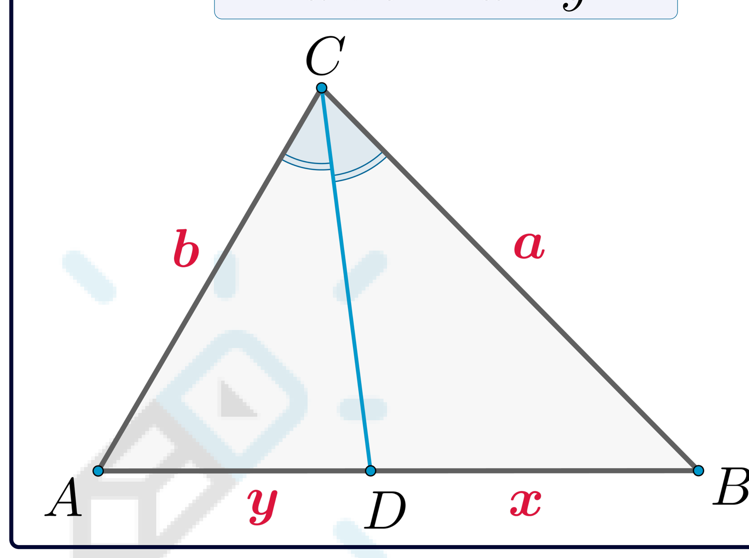


Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых перпендикулярны.

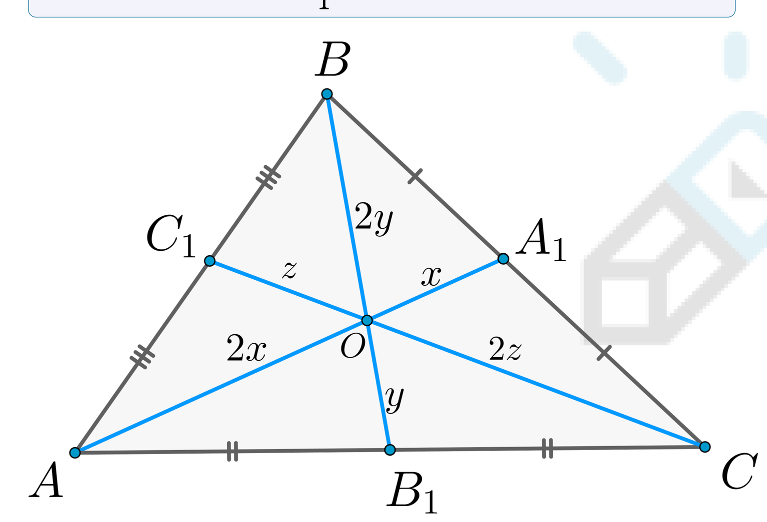


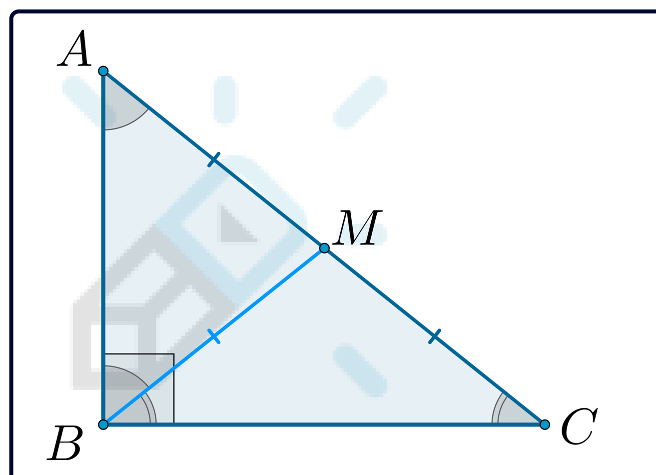
CD – биссектриса

$a : b = x : y$



Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.





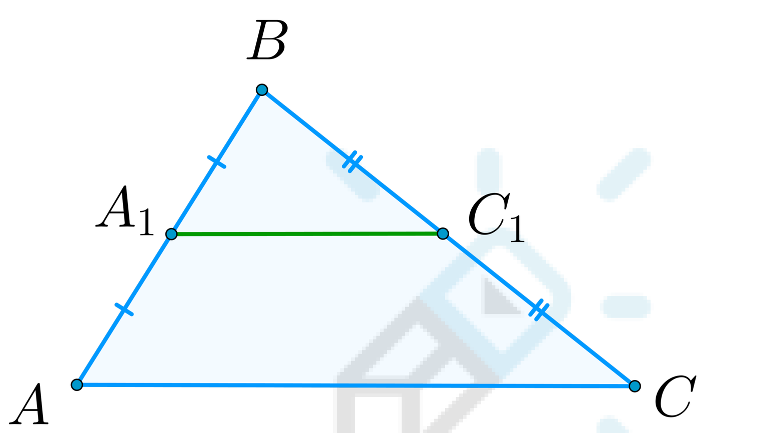
$AM = CM = BM$

В прямоугольном △-ке медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

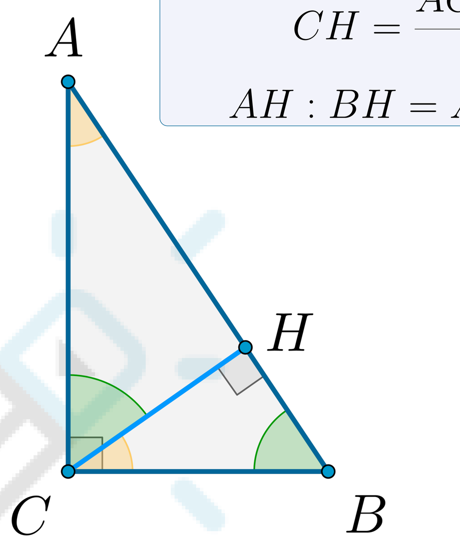
Планиметрия ЕГЭ 2023

Факты, выделенные розовым, нужно уметь доказывать на экзамене

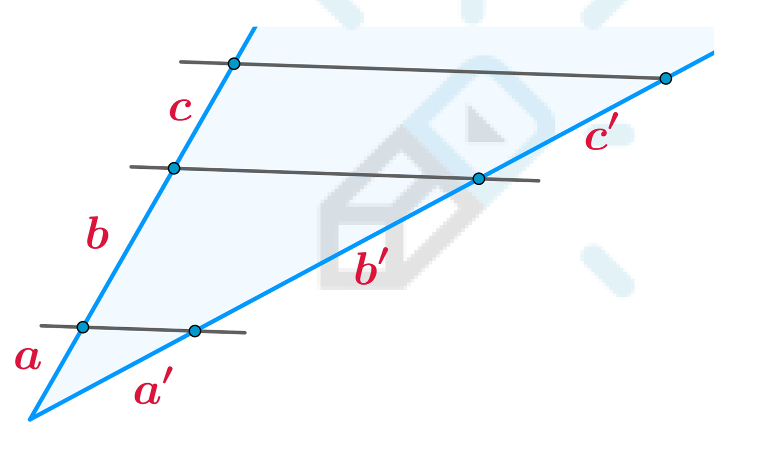
Средняя линия треугольника: $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$



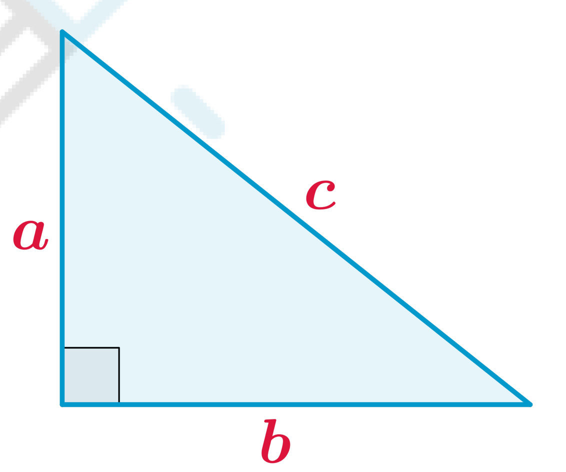
В прямоугольном $\triangle$
$CH^2 = AH \cdot BH$
$CH = \dfrac{AC \cdot BC}{AB}$
$AH : BH = AC^2 : BC^2$



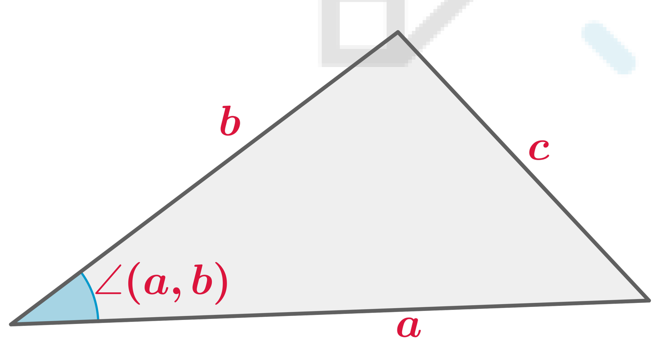
$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \Leftrightarrow$ прямые, отсекающие эти отрезки, параллельны.

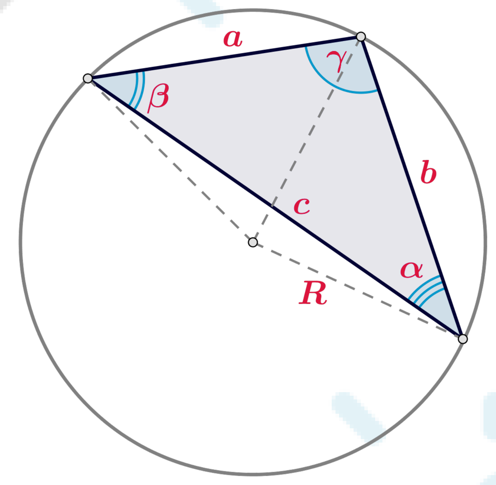


Теорема Пифагора + обратная
$\triangle$ прямоугольный $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.



Теорема косинусов
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle(a, b)$

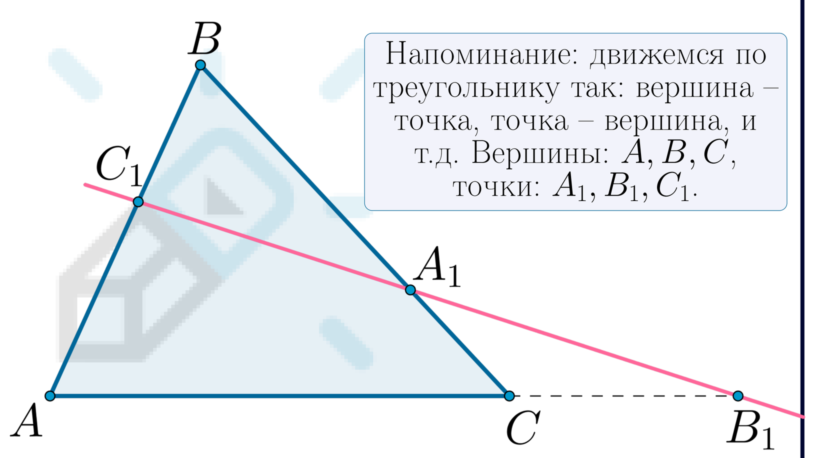


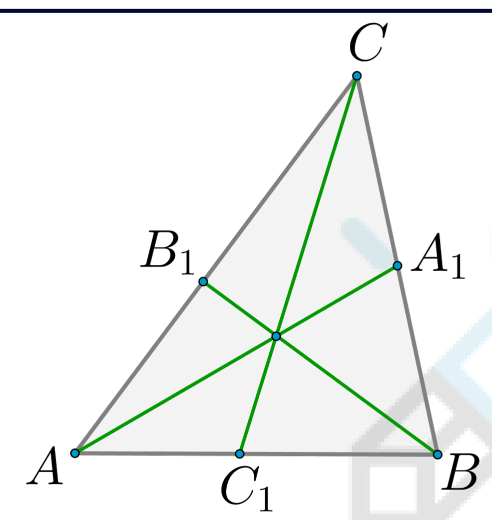


Теорема синусов
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Теорема Менелая
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

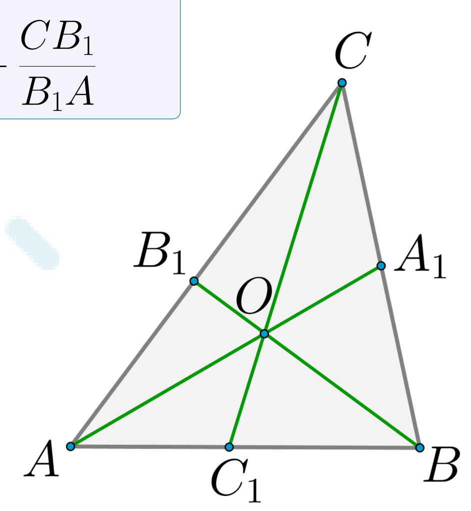
Напоминание: движемся по треугольнику так: вершина – точка, точка – вершина, и т.д. Вершины: A, B, C, точки: A_1, B_1, C_1.



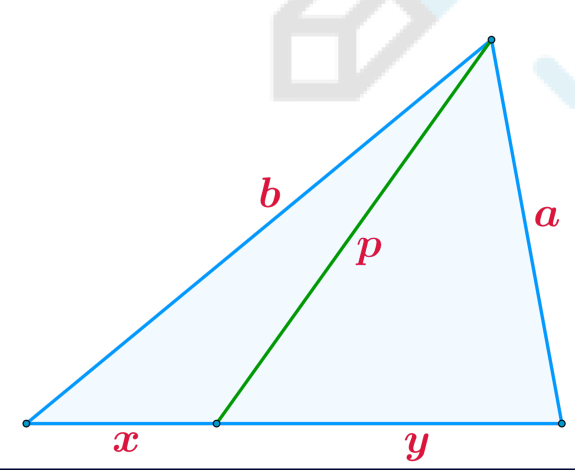


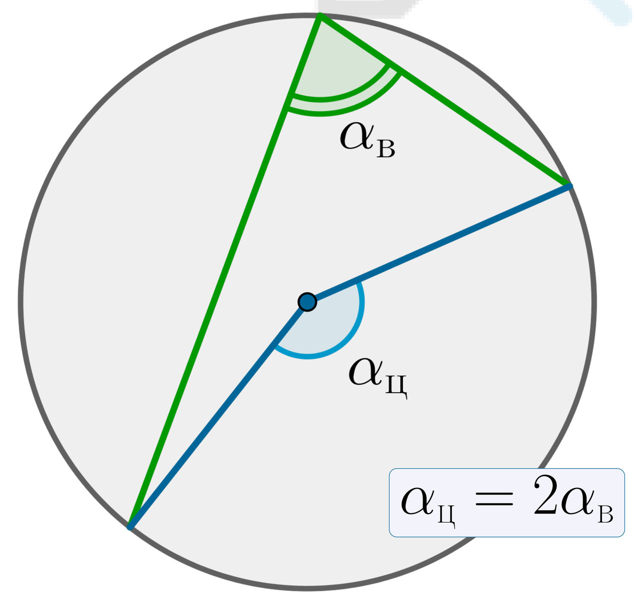
Теорема Чевы
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Теорема Ван-Обеля
$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$$

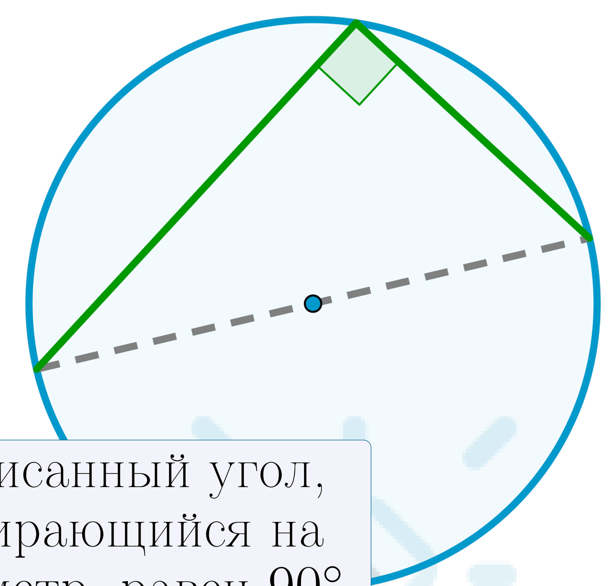


Теорема Стюарта
$$p^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy$$

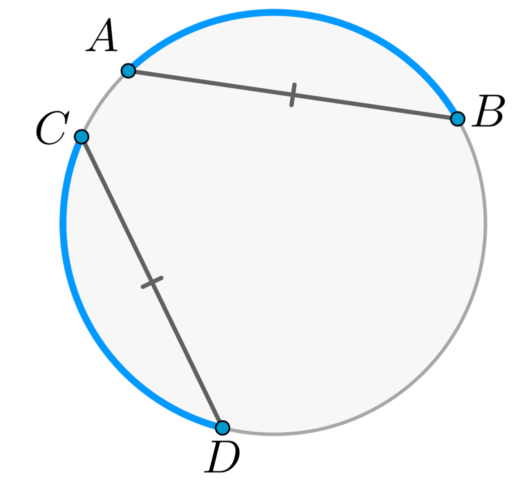




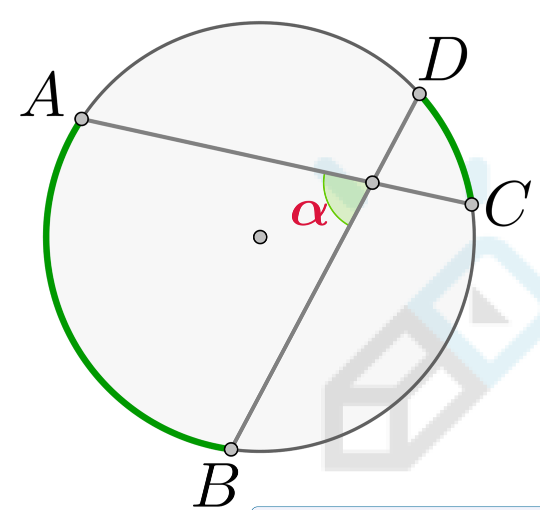
$\alpha_ц = 2\alpha_в$



Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

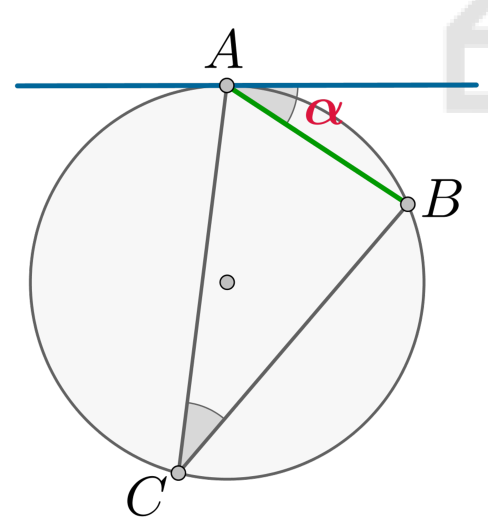


Хорды AB и CD равны тогда и только тогда, когда равны дуги AB и CD.

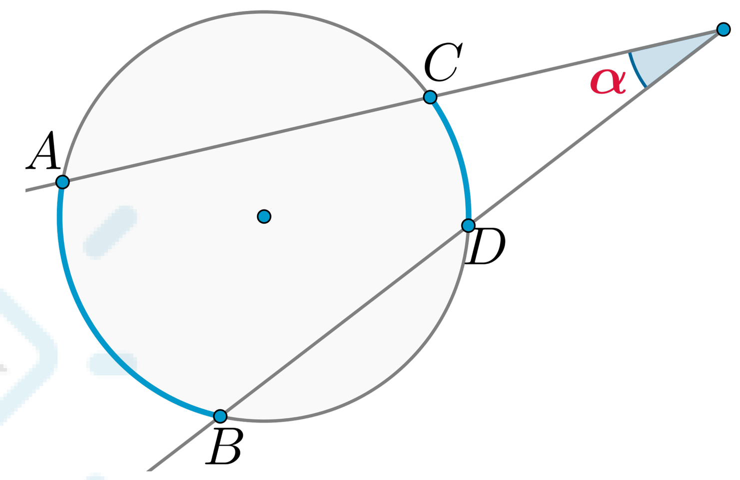


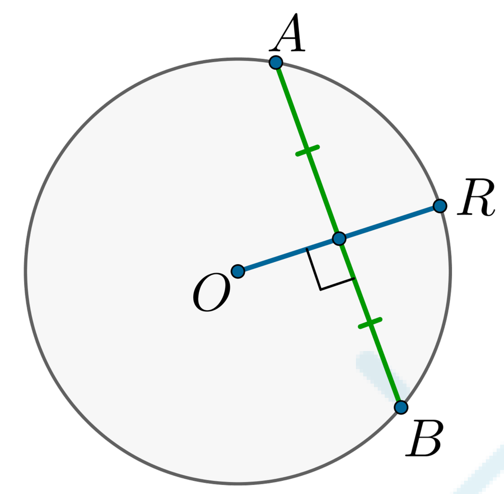
$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$

Угол α между касательной и хордой равен половине дуги, заключенной между ними, то есть равен $\angle ACB$.



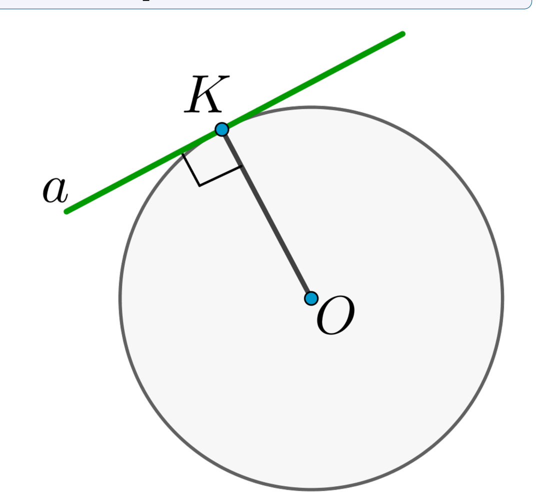
$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} - \breve{CD}\right)$



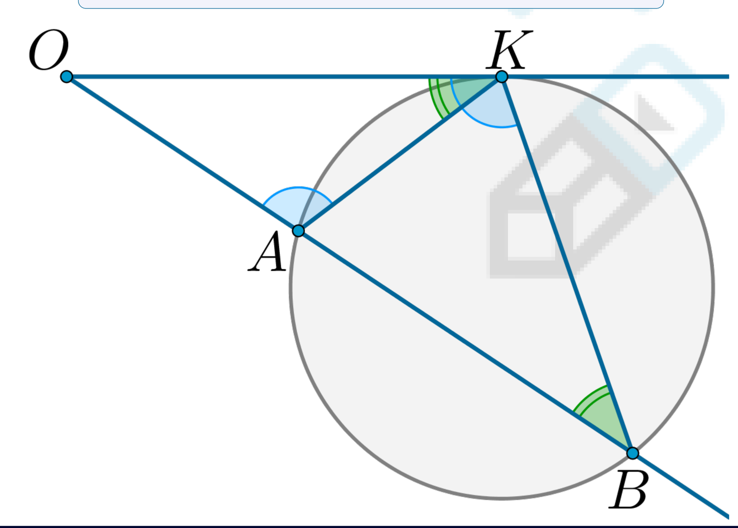


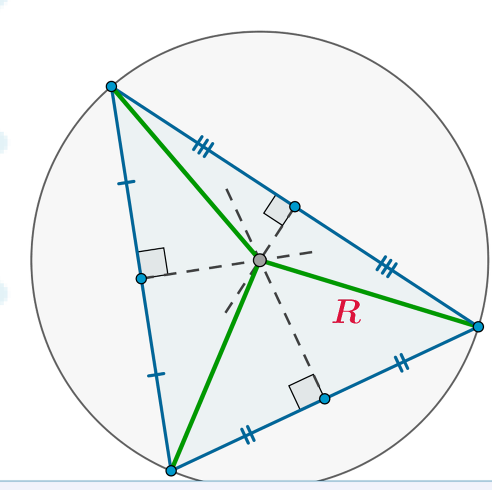
$OR \perp AB \Leftrightarrow OR$ делит AB пополам.

Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
Наоборот: если радиус перпендикулярен прямой и пересекает ее в точке на окружности, то эта прямая – касательная.

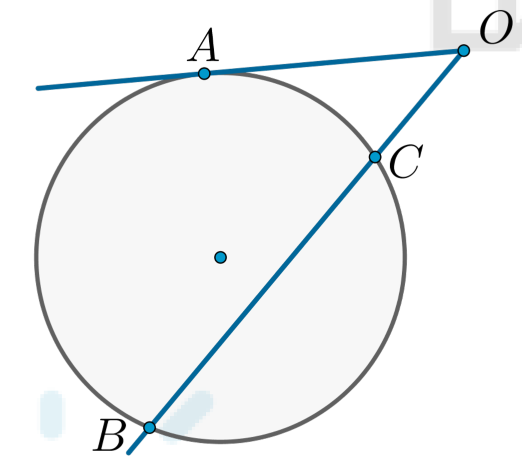


OK — касательная
$\triangle OAK \sim \triangle OKB$



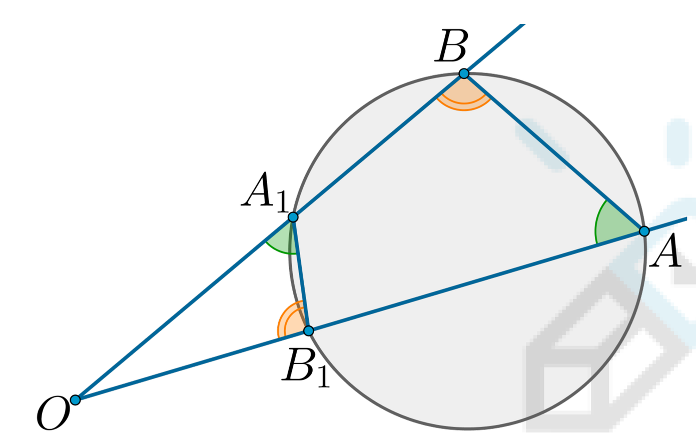


Центр окружности, описанной около треугольника, есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

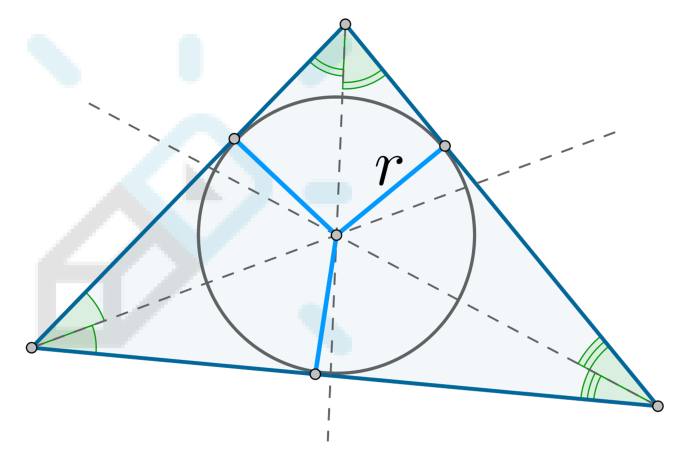


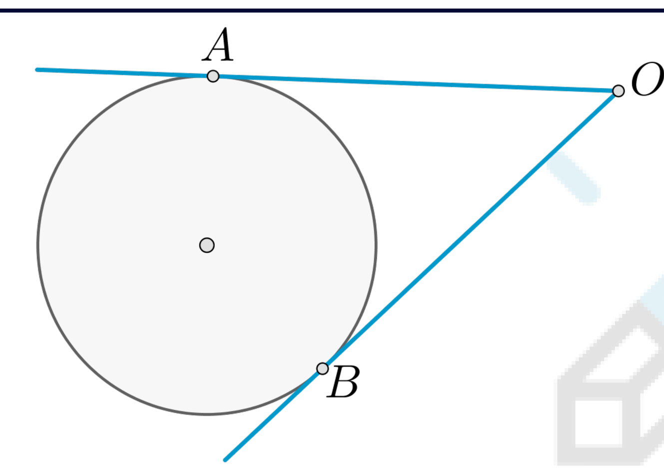
Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.
$OA^2 = OB \cdot OC$

$\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$
Прямые A_1B_1 и AB не параллельны!



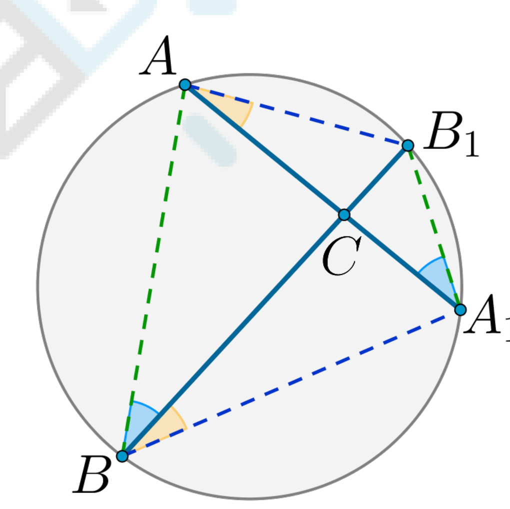
Центр вписанной в треугольник окружности есть точка пересечения биссектрис его углов.





Отрезки касательных из одной точки к окружности равны:
$OA = OB$

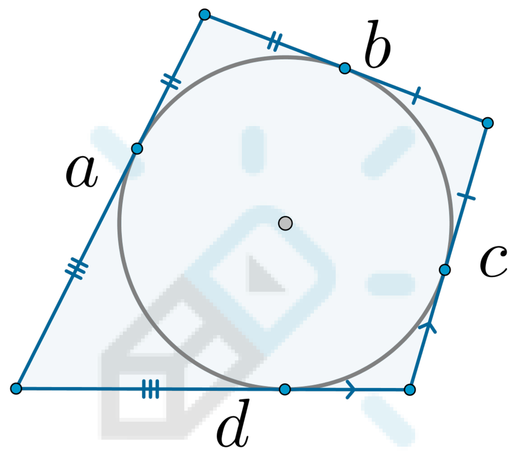
$\triangle A_1CB_1 \sim \triangle BCA$
$AC \cdot A_1C = BC \cdot B_1C$

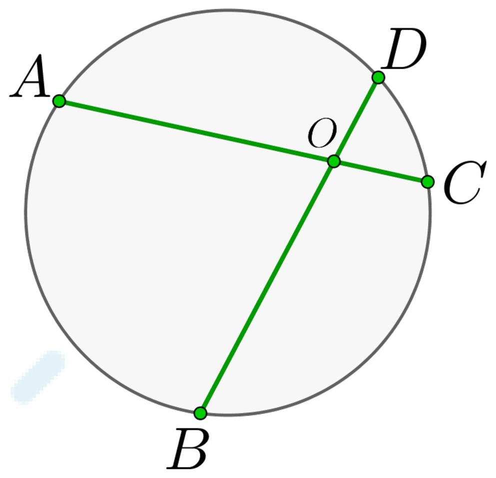


Планиметрия ЕГЭ 2023

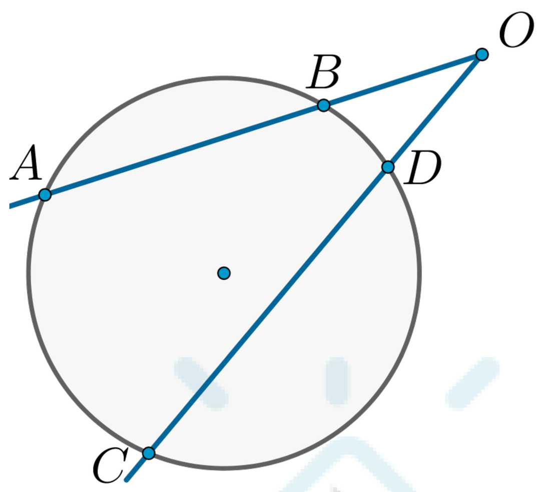
Факты, выделенные розовым, нужно уметь доказывать на экзамене

В выпуклый четырехугольник вписана окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон у него одинаковы: $a + c = b + d$





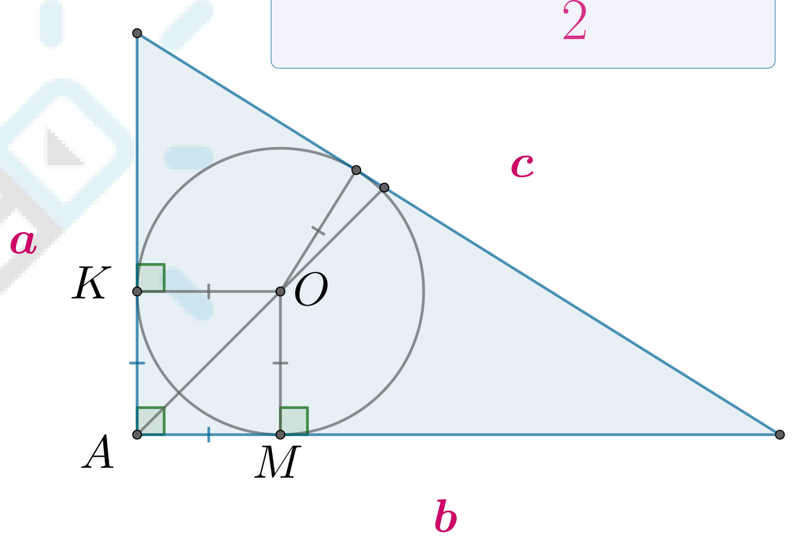
Произведения отрезков хорд равны: $AO \cdot OC = BO \cdot OD$



Произведение секущей (из фиксированной точки O) на ее внешнюю часть — величина постоянная для каждой окружности.

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD (= \text{const})$$

$AKOM$ — квадрат со стороной $r = \dfrac{a + b - c}{2}$

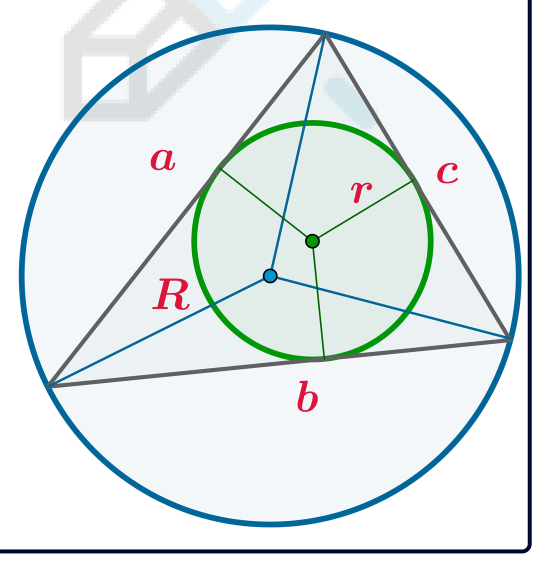


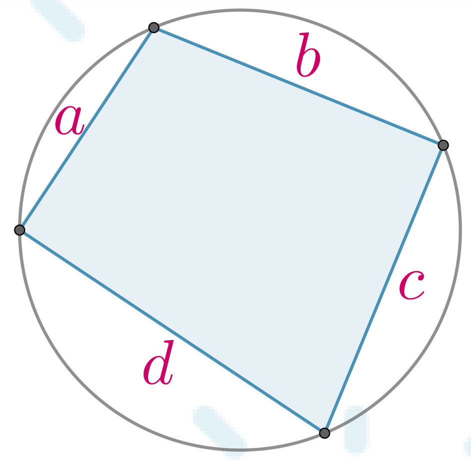
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

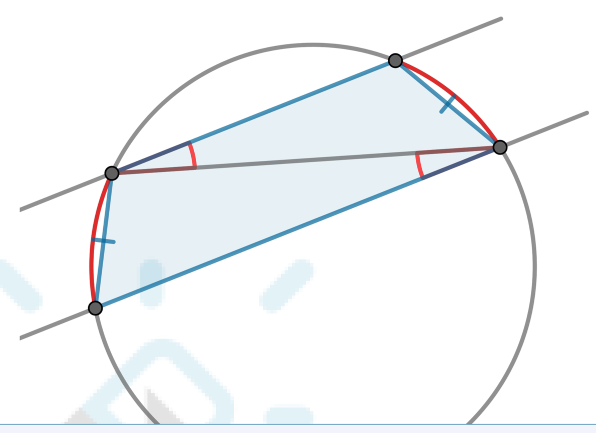




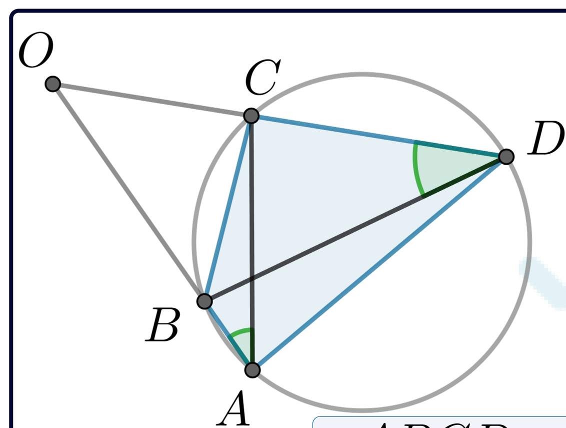
Формулы Брахмагупты:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$



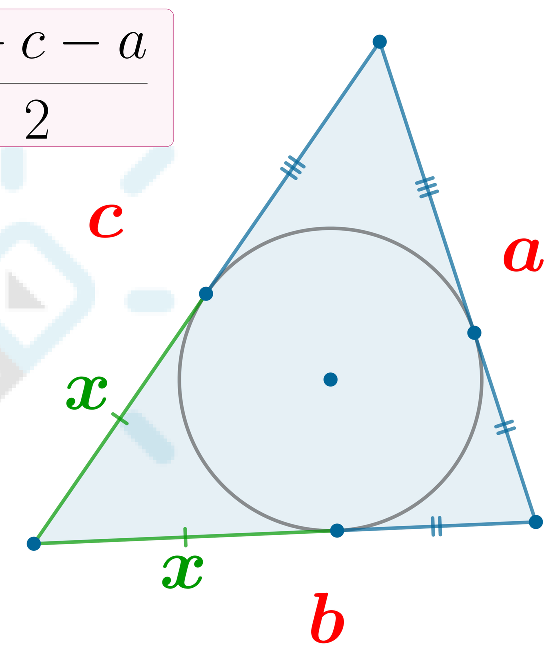
Точки пересечения окружности и двух параллельных прямых — вершины равнобокой трапеции.

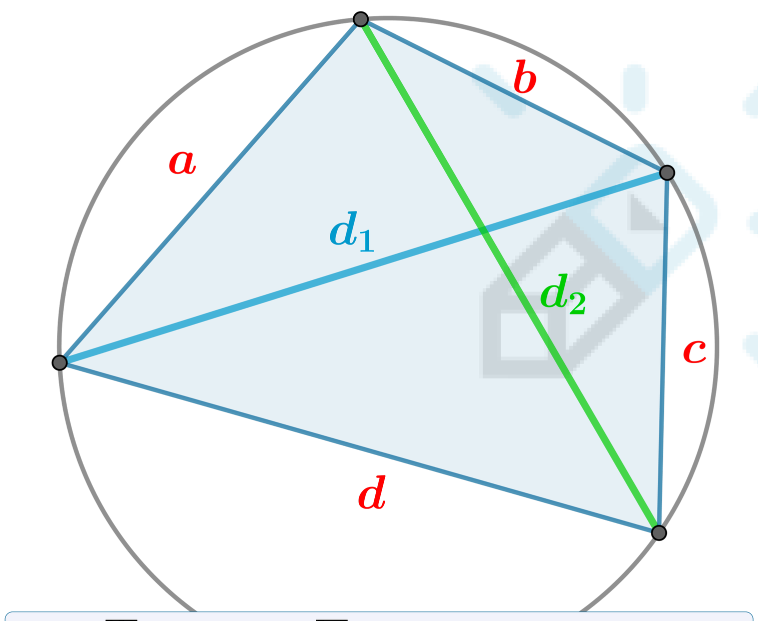


$ABCD$ вписан, если

- $\angle BAC = \angle BDC$
- $\angle A + \angle C = 180°$
- $OA \cdot OB = OC \cdot OD$

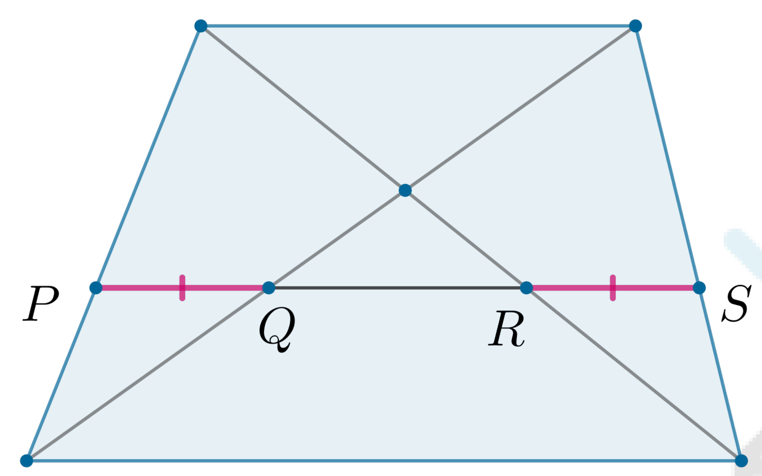
$$x = \frac{b + c - a}{2}$$



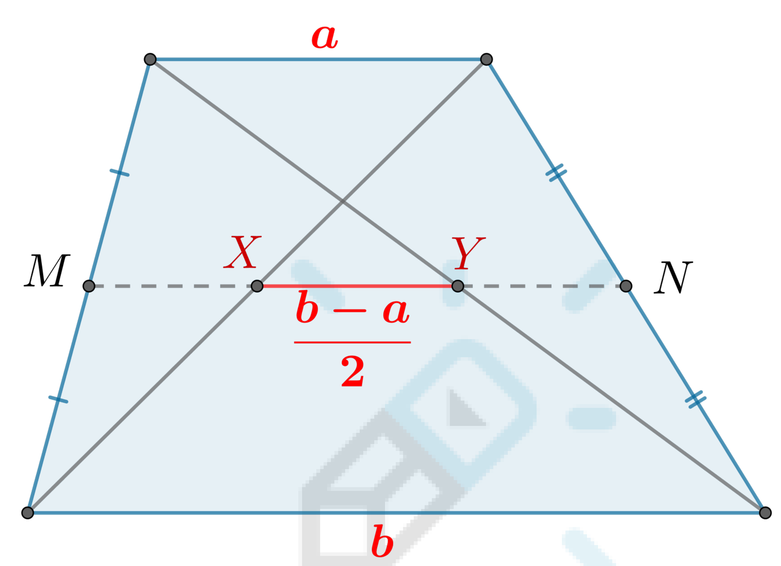


Теорема Птолемея: для вписанного четырехугольника верно $ac + bd = d_1 d_2$

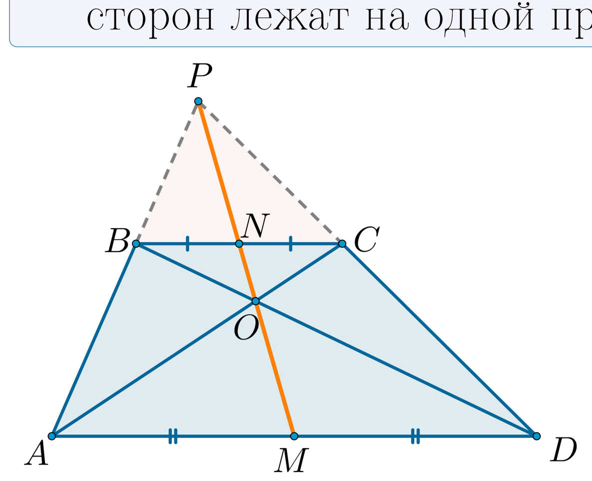
В трапеции PS параллельна основаниям $\Rightarrow PQ = RS$



M и N – середины боковых сторон
X и Y – середины диагоналей

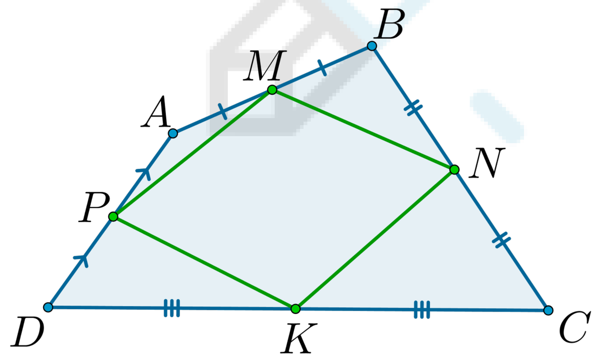


У трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

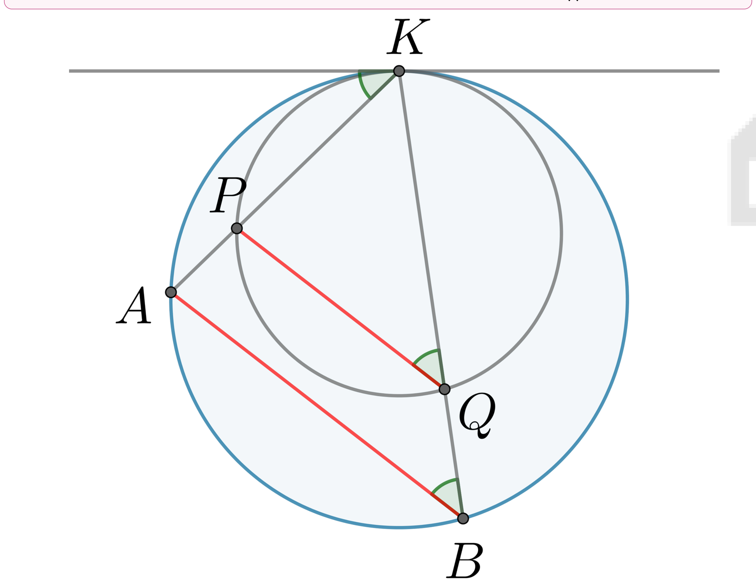


Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Следствие: отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, делятся точкой пересечения пополам.

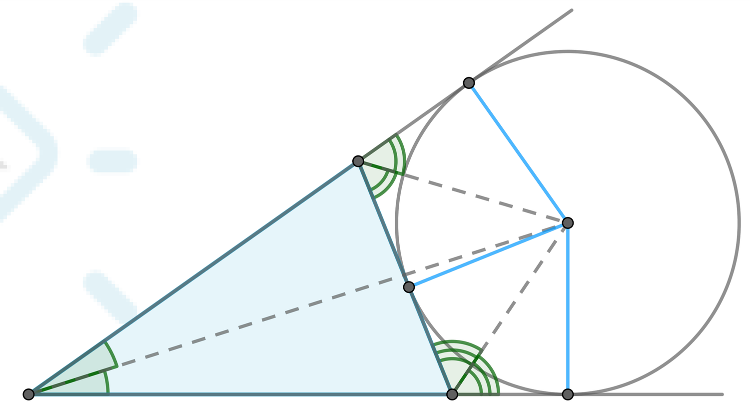


Окружности касаются в точке K. Хорды AK, PK лежат на одной прямой, как и хорды BK, QK. Тогда $AB \parallel PQ$.



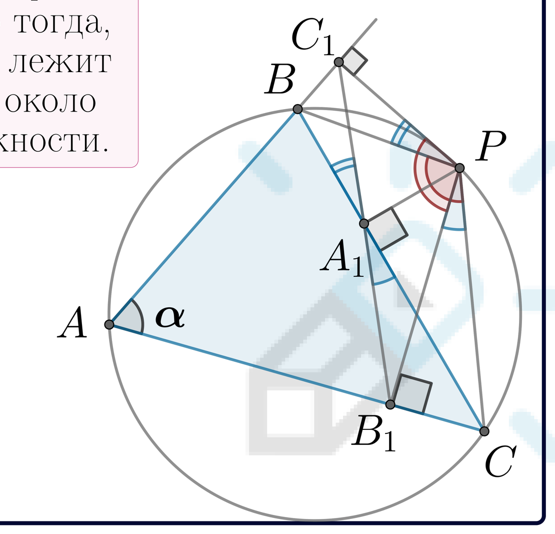
Вневписанная окружность треугольника — окружность, которая касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон.
Центр вневписанной окружности треугольника лежит на пересечении внутренней биссектрисы угла, в который вписана окружность, и внешних биссектрис двух других углов.

Ее радиус вычисляется по формуле $r_b = \dfrac{S}{p - b}$,
где b — сторона, которой она касается,
S, p — площадь и полупериметр треугольника.

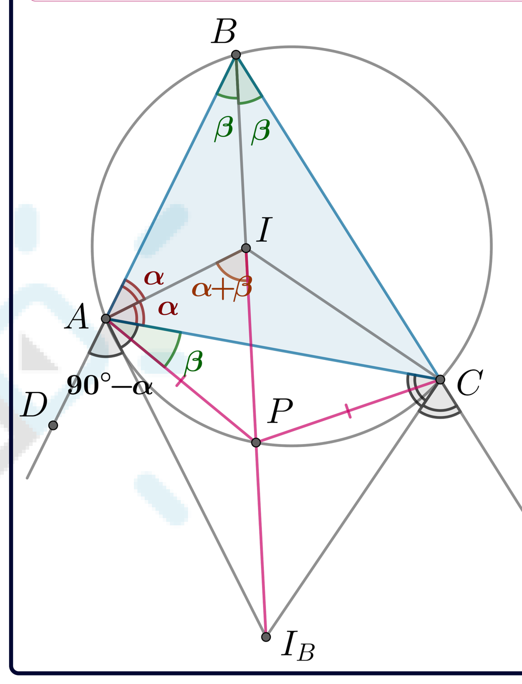


Прямая Симсона

Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной около $\triangle ABC$ окружности.

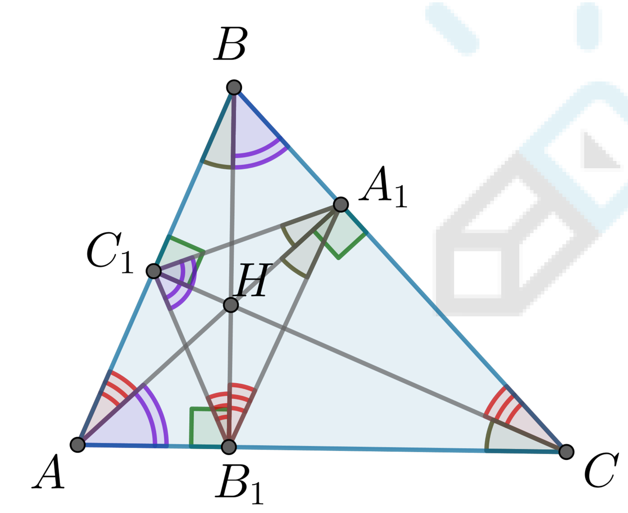


Лемма о трезубце: P равноудалена от A, C, I, I_B.

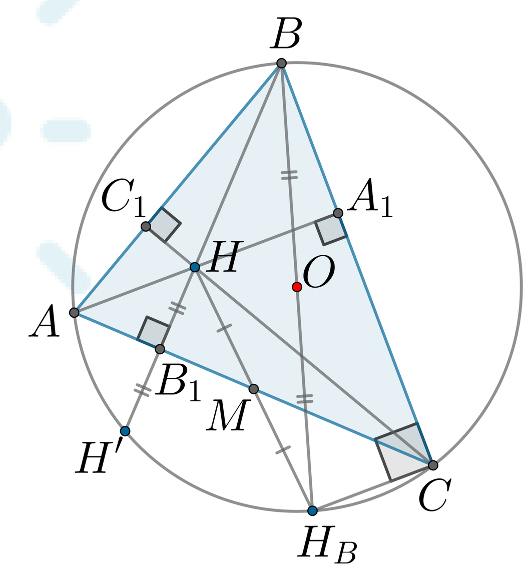


BP – биссектриса, P лежит на описанной около $\triangle ABC$ окружности, I, I_B – центры вписанной и вневписанной в $\triangle ABC$ окружностей соответственно.

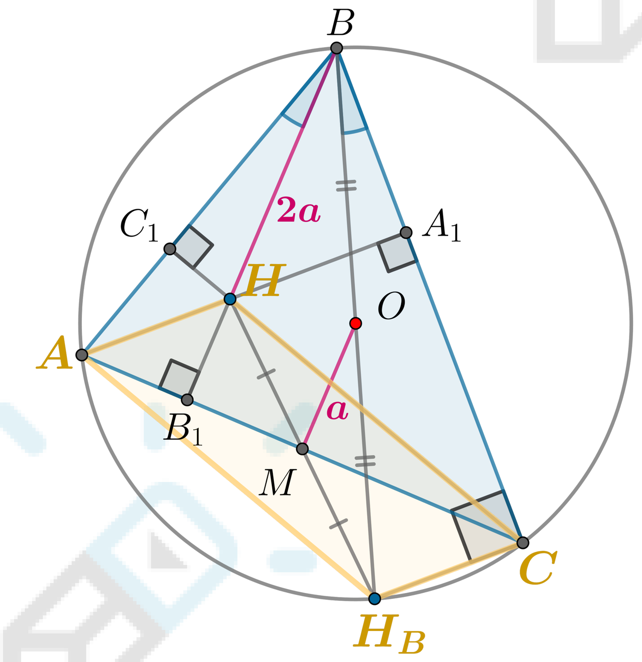
AB_1HC_1 и AB_1A_1B – вписанные
H – инцентр для $\triangle A_1B_1C_1$



H' и H_B лежат на описанной около $\triangle ABC$ окружности.



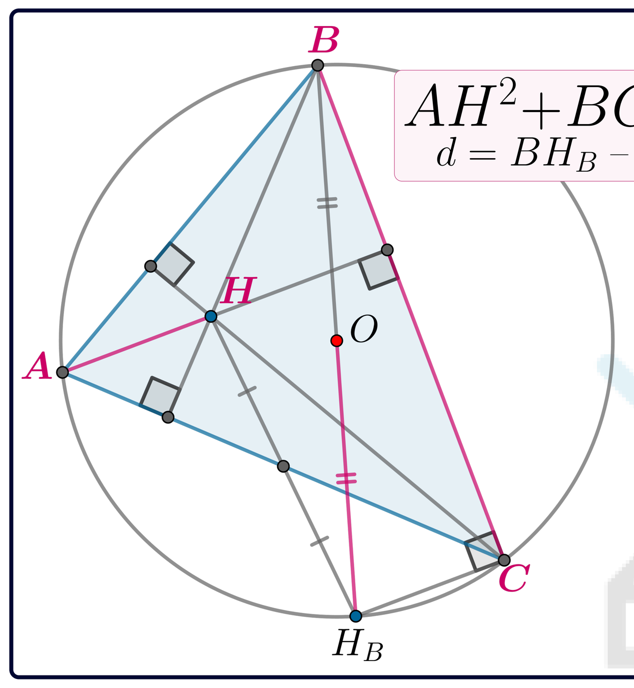
- H' симметрична H относительно AC
- H_B симметрична H относительно середины M стороны AC

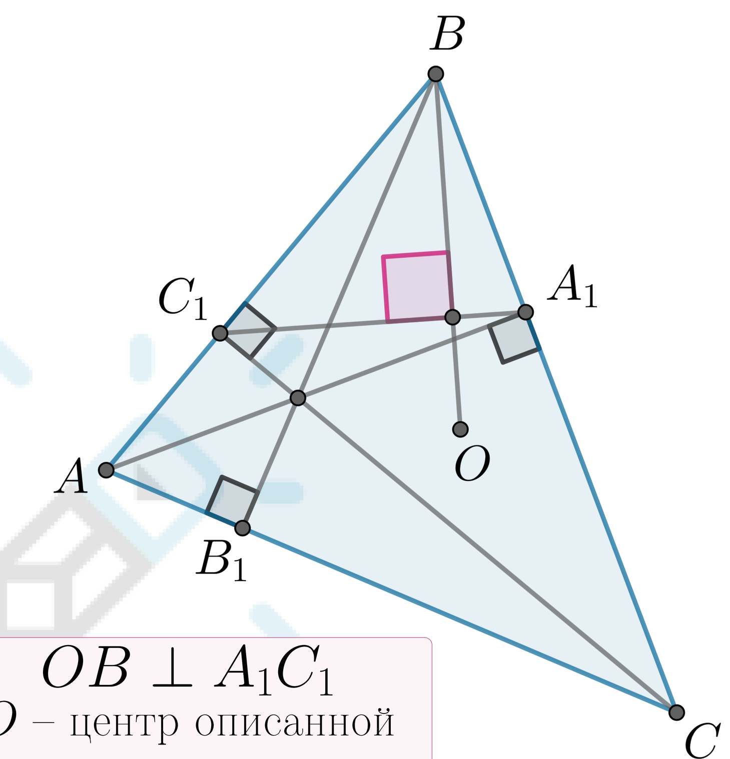


- $BH = 2OM$, где O – центр опис. окр-ти
- $\angle ABH = \angle CBO$ (H и O изогональны)
- $AHCH_B$ – параллелограмм

$$AH^2 + BC^2 = d^2$$

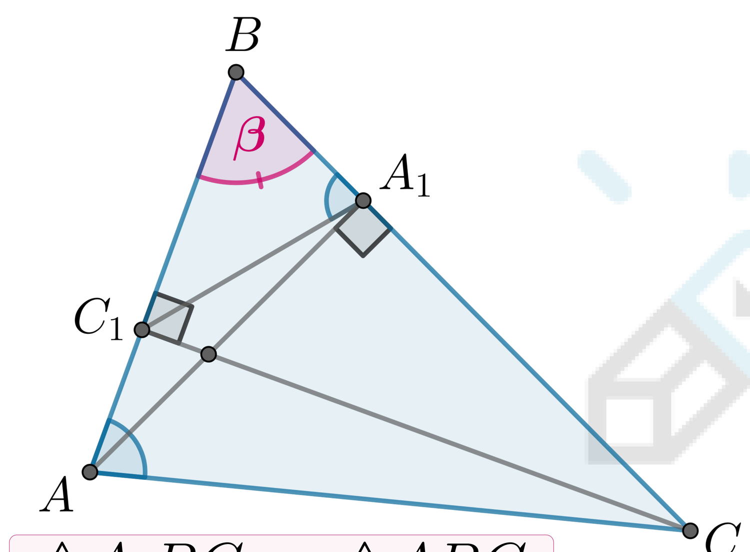
$d = BH_B$ – диаметр



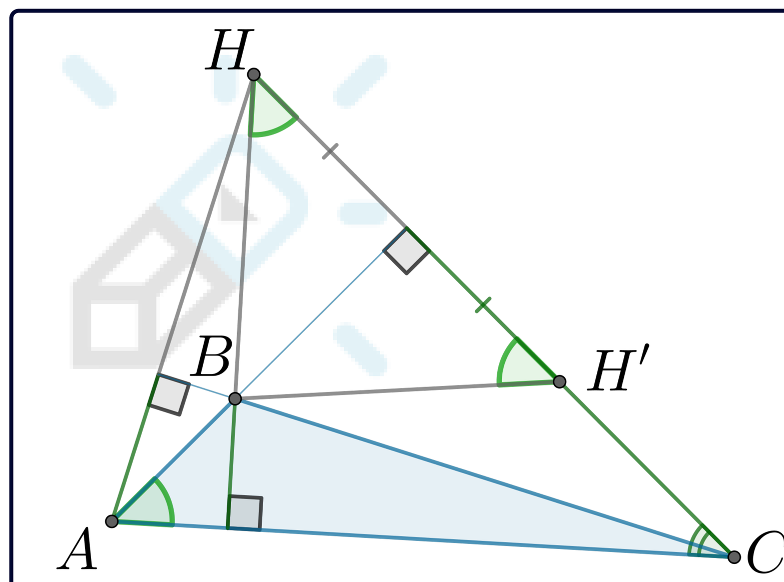


$OB \perp A_1C_1$

O – центр описанной окружности



$\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \cos\beta$



$ABH'C$ – вписанный

H' симметрична ортоцентру H относительно продолжения AB