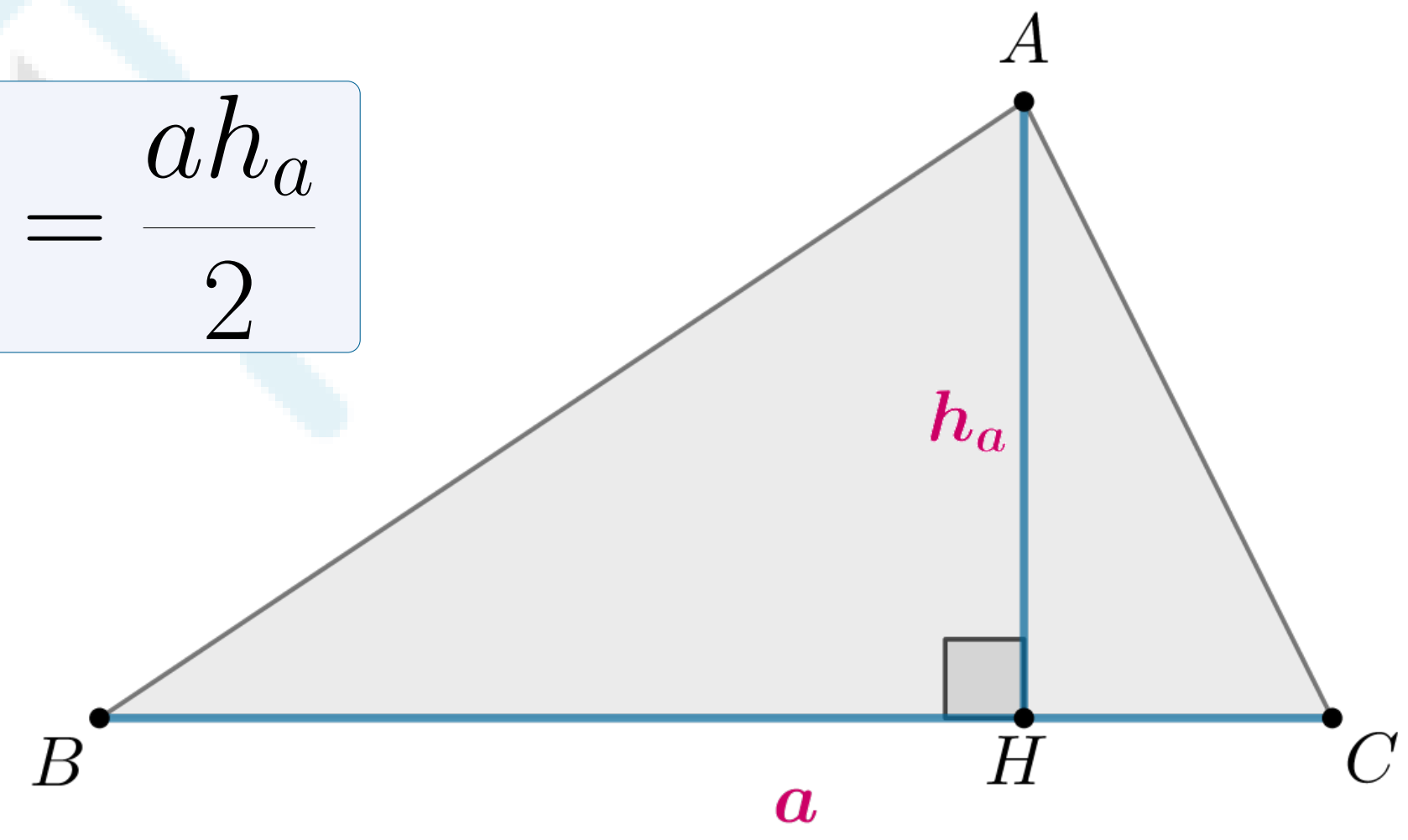


Площадь $\triangle ABC$ равна полупроизведению высоты AH на основание BC , к которому проведена эта высота.

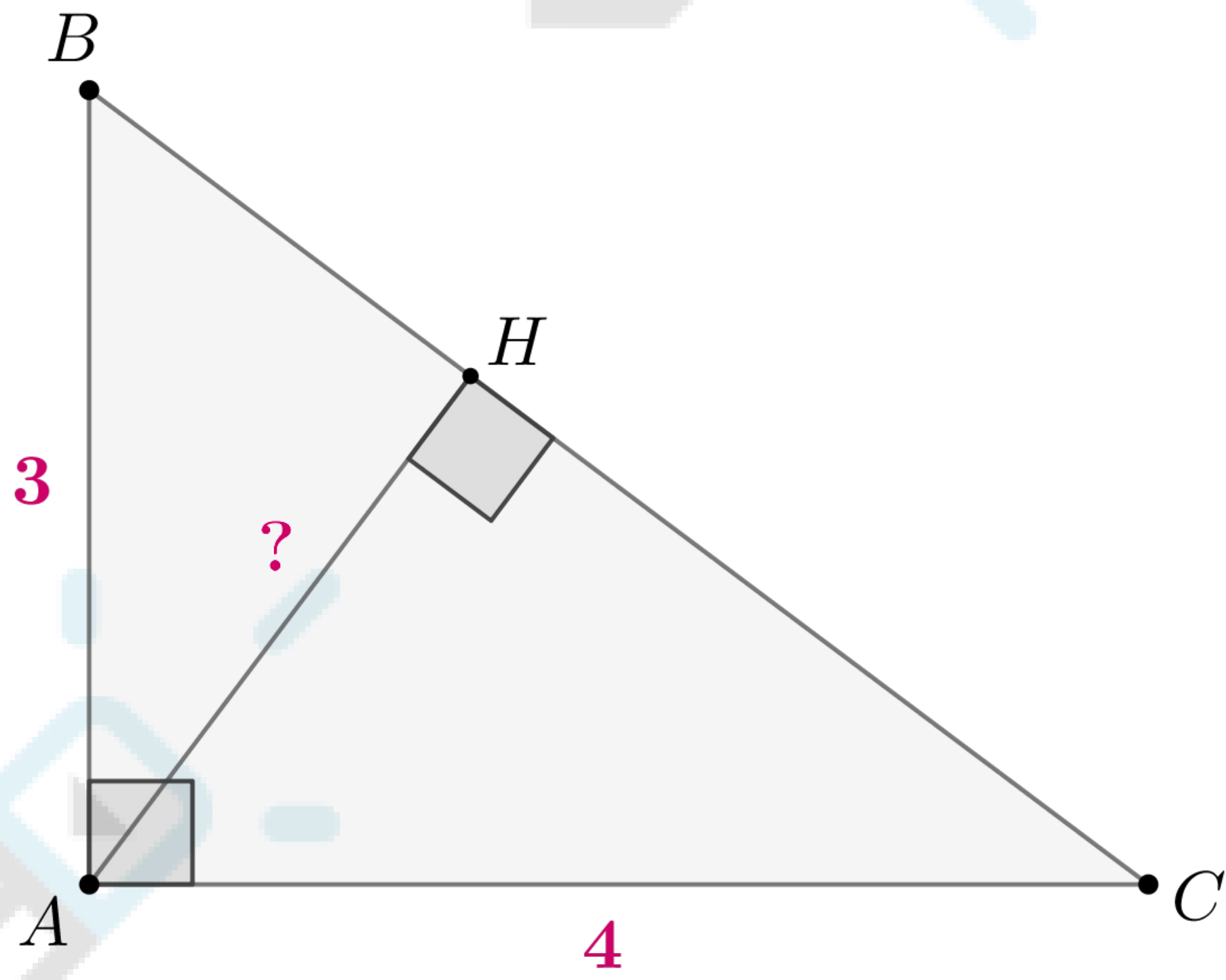
$$S = \frac{ah_a}{2}$$



Пример, где встречается

Найдите высоту прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, проведенную к гипотенузе.

► Пусть дан $\triangle ABC$ с $\angle A = 90^\circ$ и проведена $AH \perp BC$.



Тогда

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Leftrightarrow$$

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$

По теореме Пифагора $BC = 5$. Следовательно,

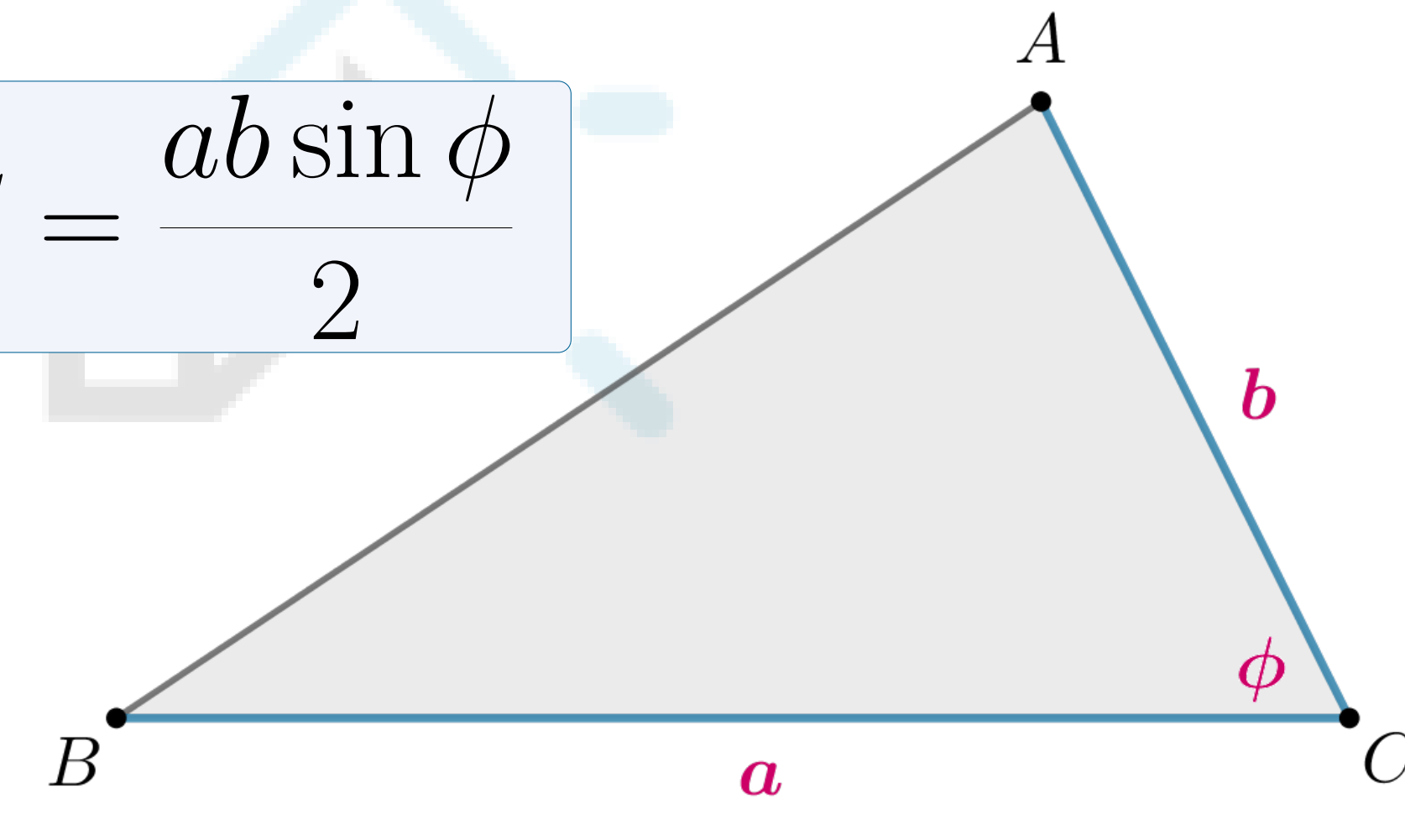
$$AH = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

Тем самым мы вывели формулу: высота прямоугольного треугольника с катетами a и b , проведенная к гипотенузе c , равна

$$h = \frac{ab}{c}$$

Площадь $\triangle ABC$ равна полупроизведению двух сторон CA и CB на синус угла C между ними.

$$S = \frac{ab \sin \phi}{2}$$



Пример, где встречается

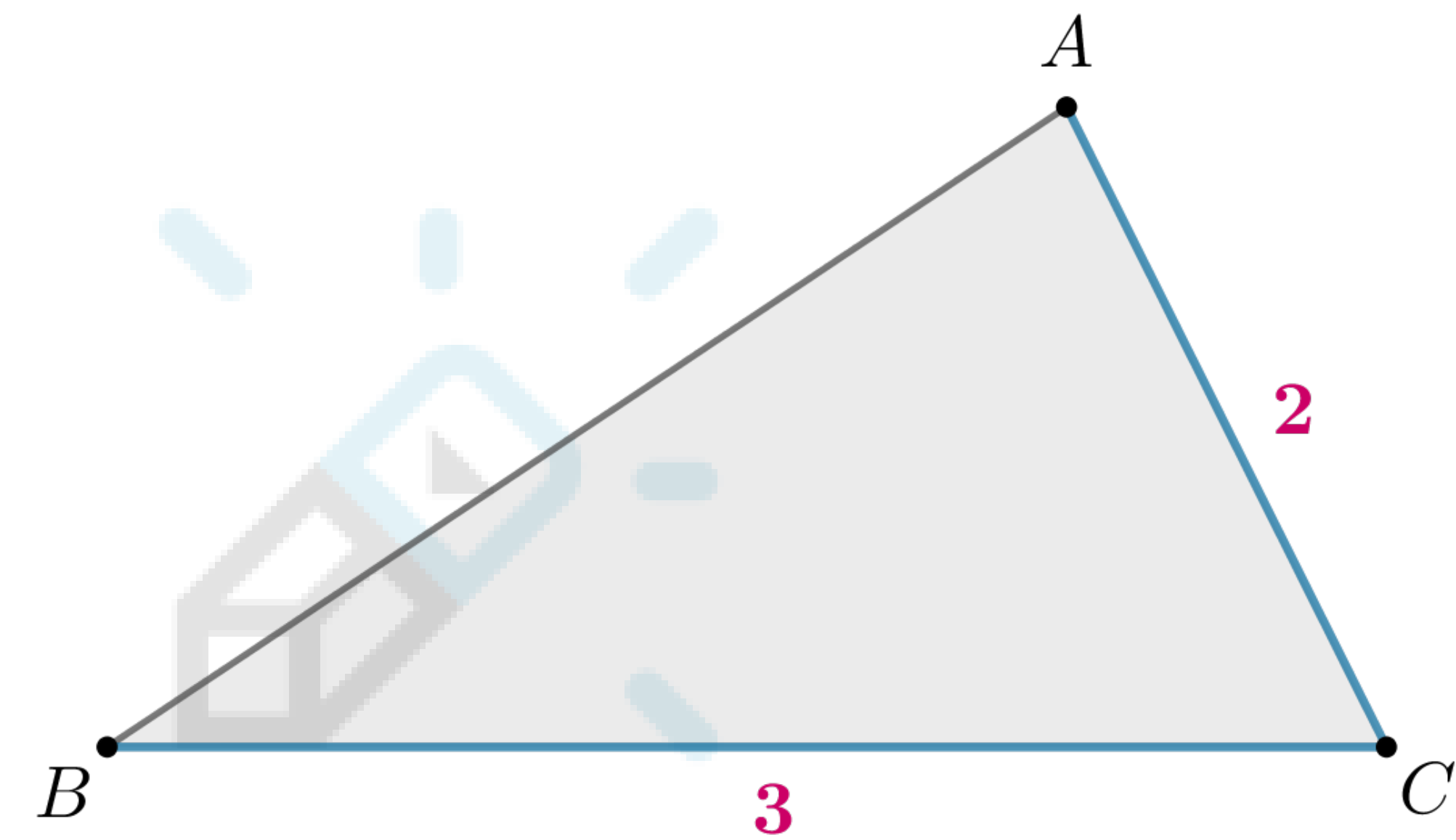
Две стороны треугольника равны 2 и 3, а косинус угла между ними равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь треугольника.

► Рассмотрим $\triangle ABC$:

$$AC = 2,$$

$$BC = 3,$$

$$\cos \angle C = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 \angle C + \cos^2 \angle C = 1$, следовательно,

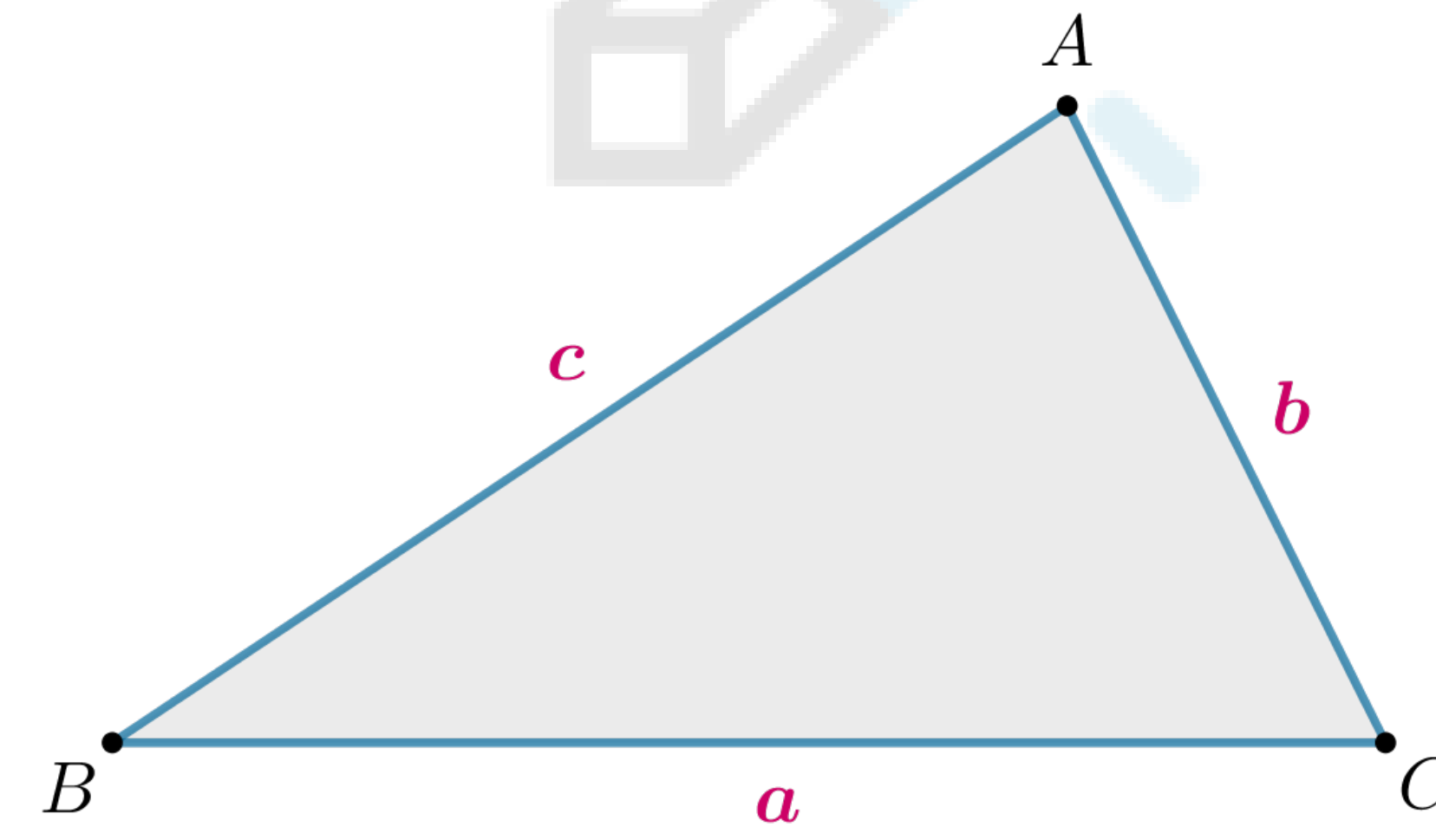
$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$$

Тогда площадь $\triangle ABC$ равна

$$S = \frac{2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}}{2} = 1$$

Формула Герона: площадь $\triangle$ -ка со сторонами a, b, c и полупериметром p ищется по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

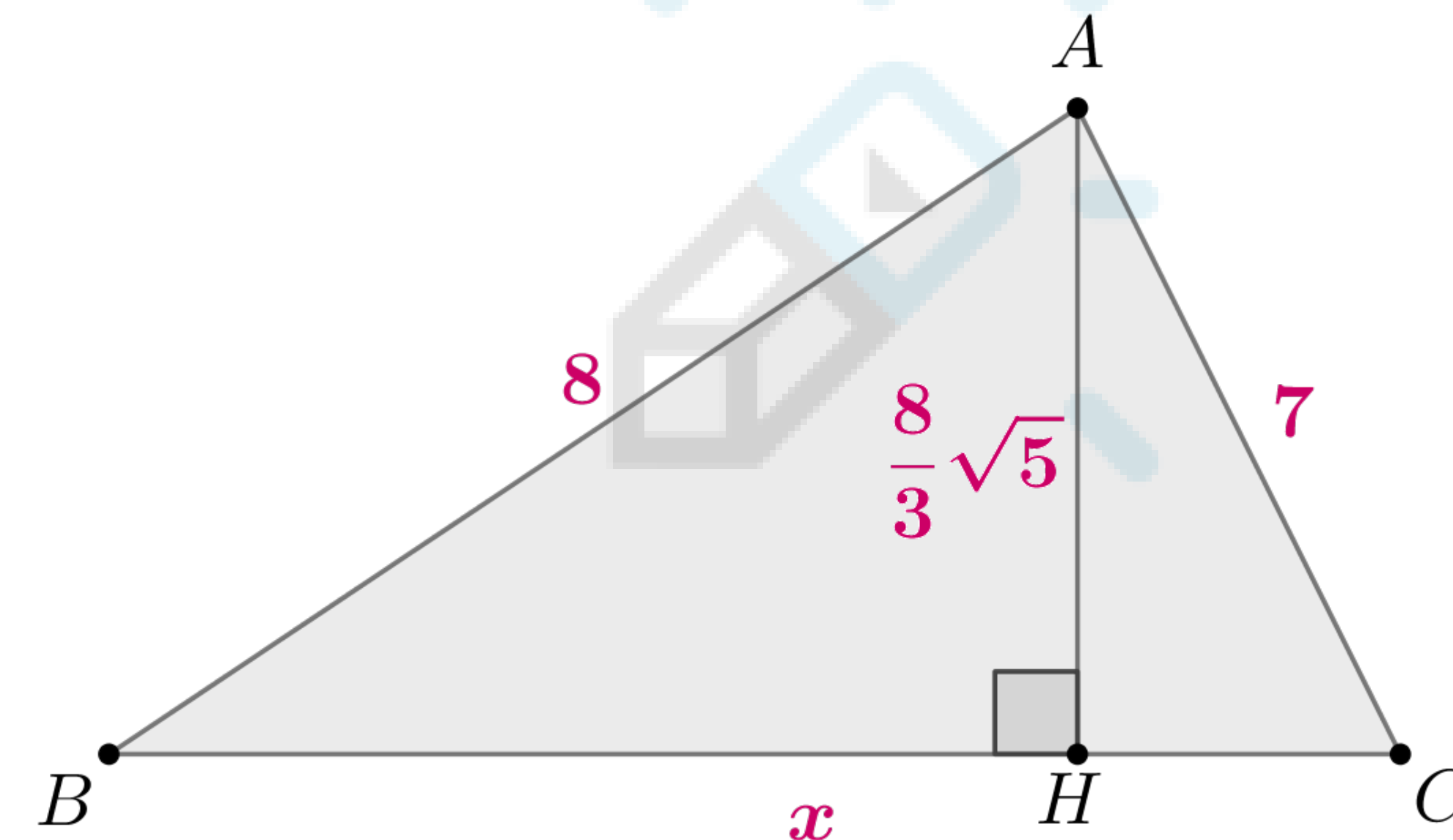


Пример, где встречается

Две стороны треугольника равны 7 и 8, а высота, проведенная к третьей стороне, равна $\frac{8}{3}\sqrt{5}$. Найдите третью сторону, если она — большая из сторон.

► Пусть $x > 8$ — третья сторона. Значит, полупериметр треугольника равен $p = \frac{15+x}{2}$. Тогда площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{8}{3}\sqrt{5} = S = \sqrt{p(p-x)(p-7)(p-8)}$$



Преобразуем:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-x)(p-7)(p-8)} = \\ &= \sqrt{\frac{15+x}{2} \cdot \frac{15-x}{2} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-1}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(225-x^2)(x^2-1)} \end{aligned}$$

Получаем уравнение

$$\frac{4}{3}x\sqrt{5} = \frac{1}{4} \sqrt{(225-x^2)(x^2-1)} \Leftrightarrow$$

$$9x^4 - 754x^2 + 81 \cdot 25 = 0 \Leftrightarrow$$

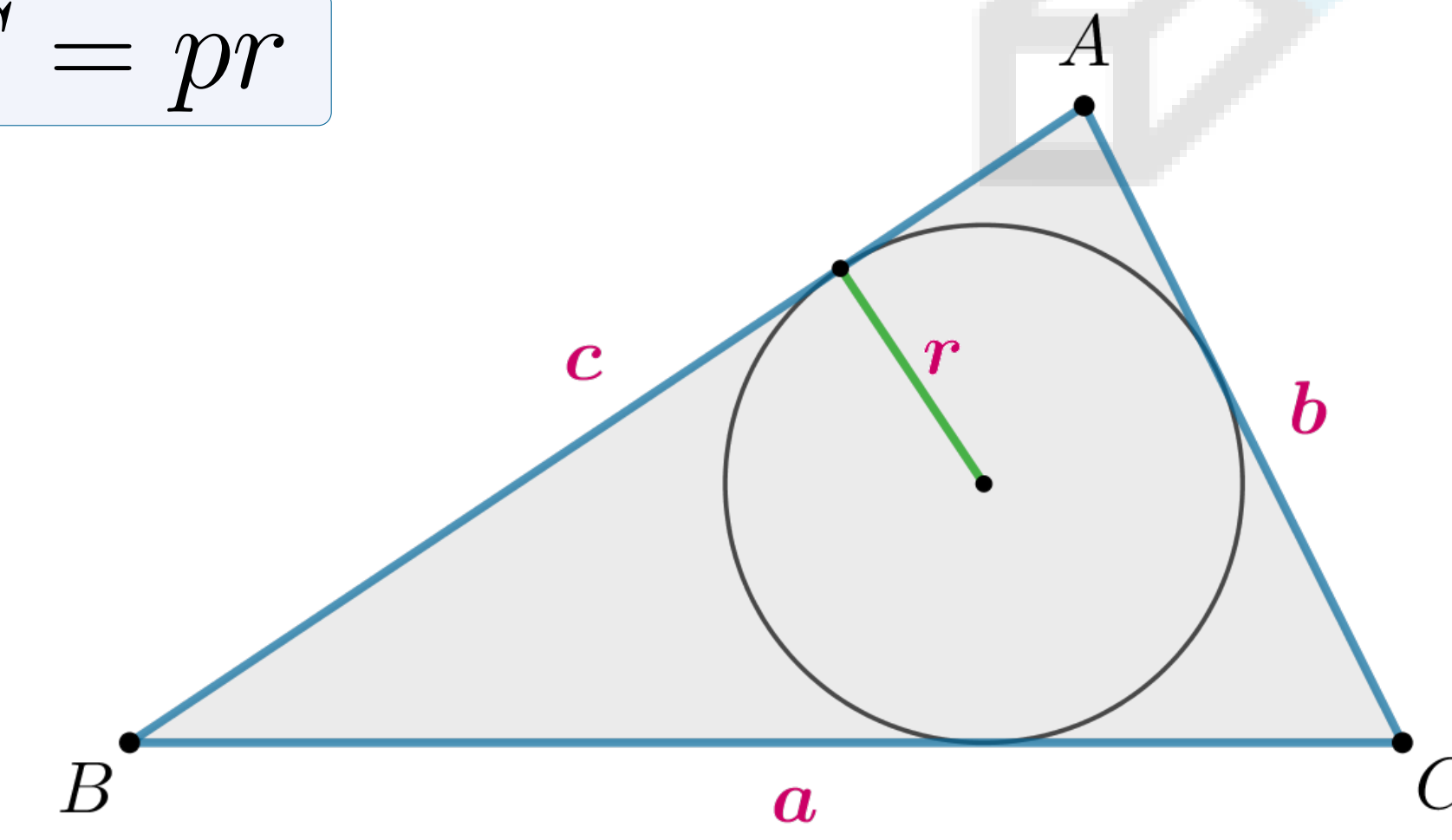
$$x^2 = 81; \frac{25}{9} \Rightarrow$$

$$x = 9; \frac{5}{3}$$

Так как $x > 8$, то $x = 9$.

Площадь $\triangle$ -ка со сторонами a, b, c , полупериметром p и радиусом r вписанной окружности ищется по формуле

$$S = pr$$

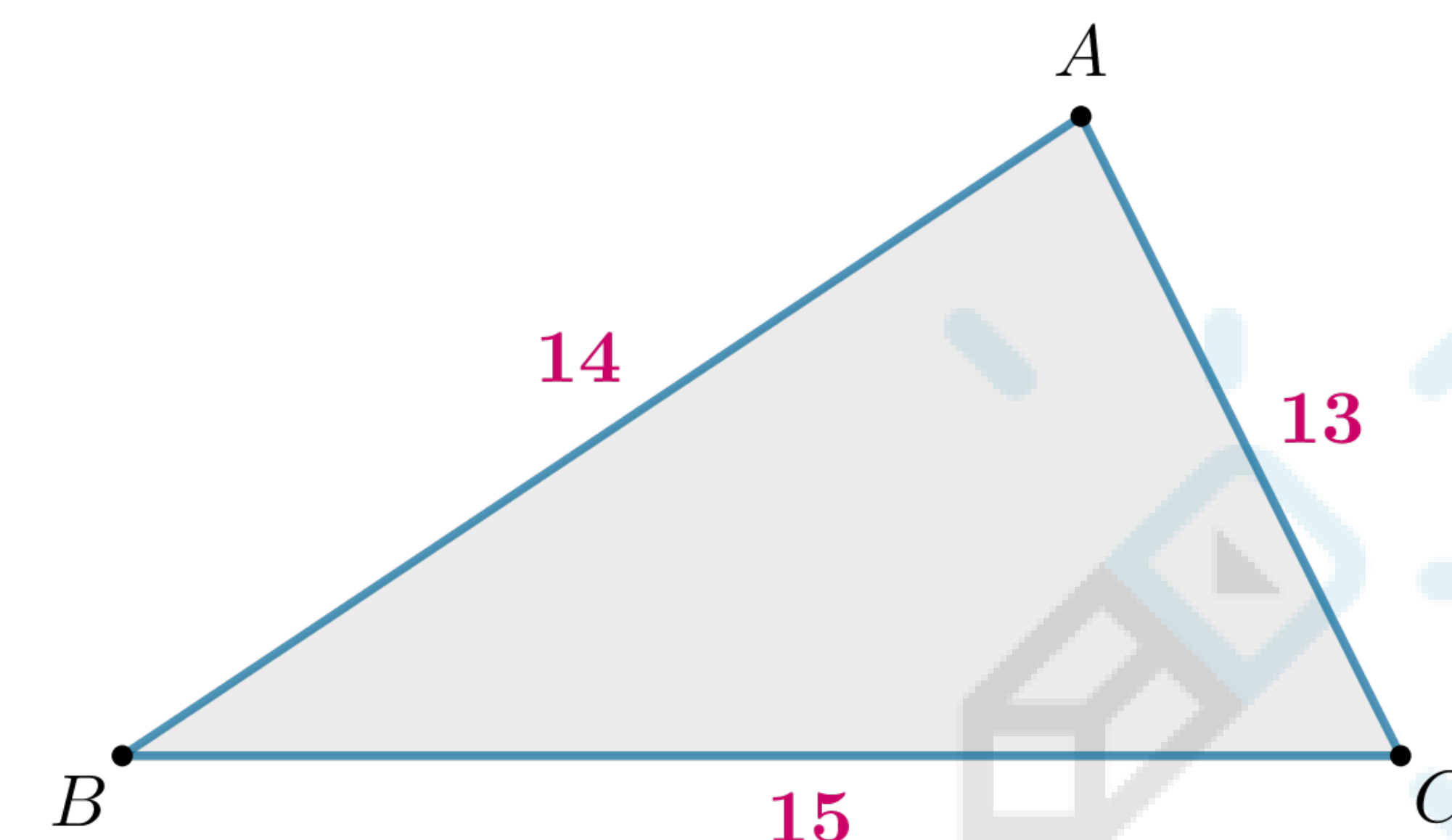


Пример, где встречается

Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 13, 14 и 15.

► Будем искать радиус вписанной окружности по формуле

$$S = pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{p}$$



Полупериметр $\triangle ABC$ равен

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

По формуле Герона площадь $\triangle ABC$ равна

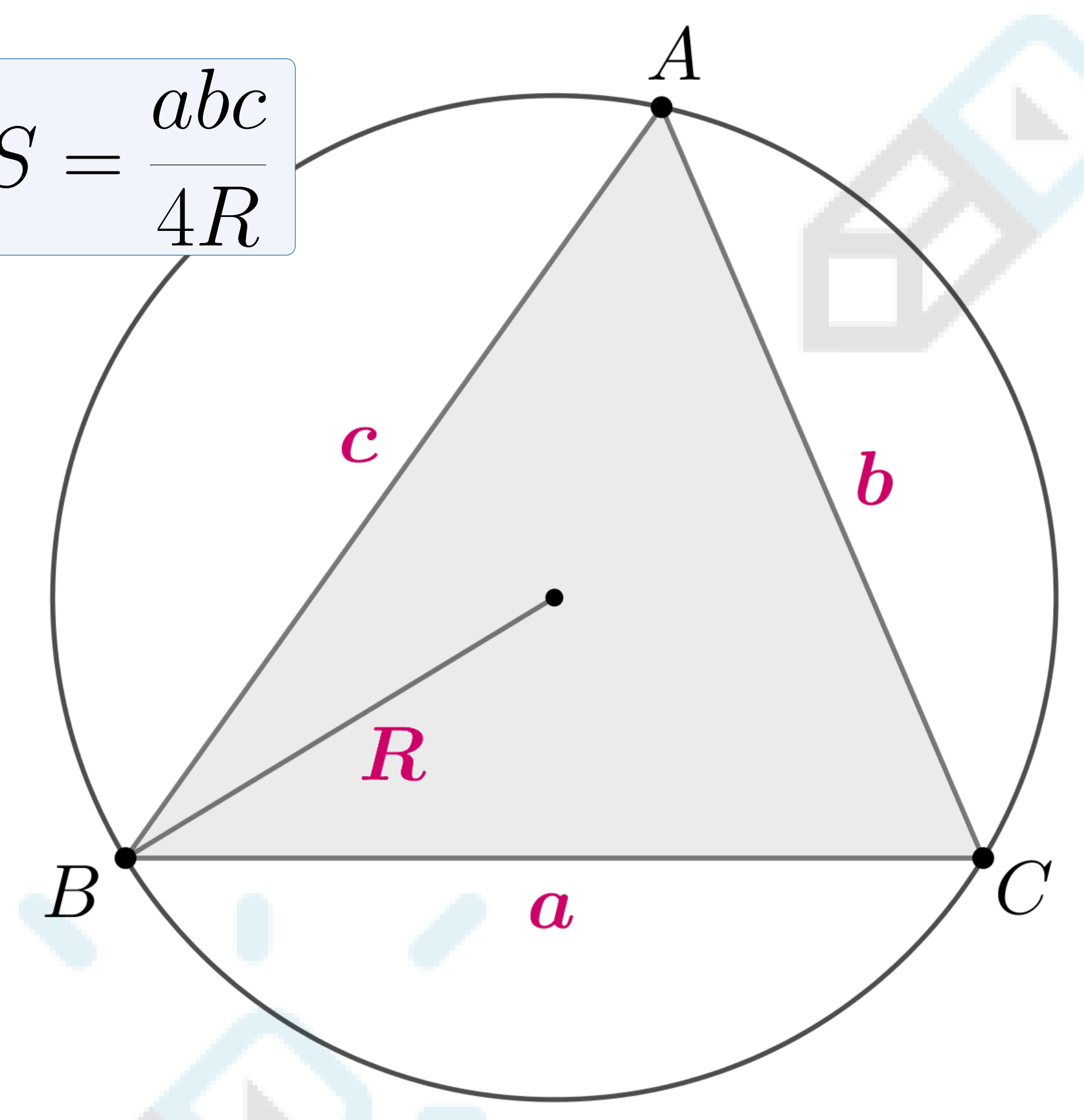
$$\begin{aligned} S &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \\ &= \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 4 \end{aligned}$$

Тогда

$$r = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4}{21} = 4$$

Площадь $\triangle$ -ка со сторонами a, b, c и радиусом R описанной окружности ищется по формуле

$$S = \frac{abc}{4R}$$



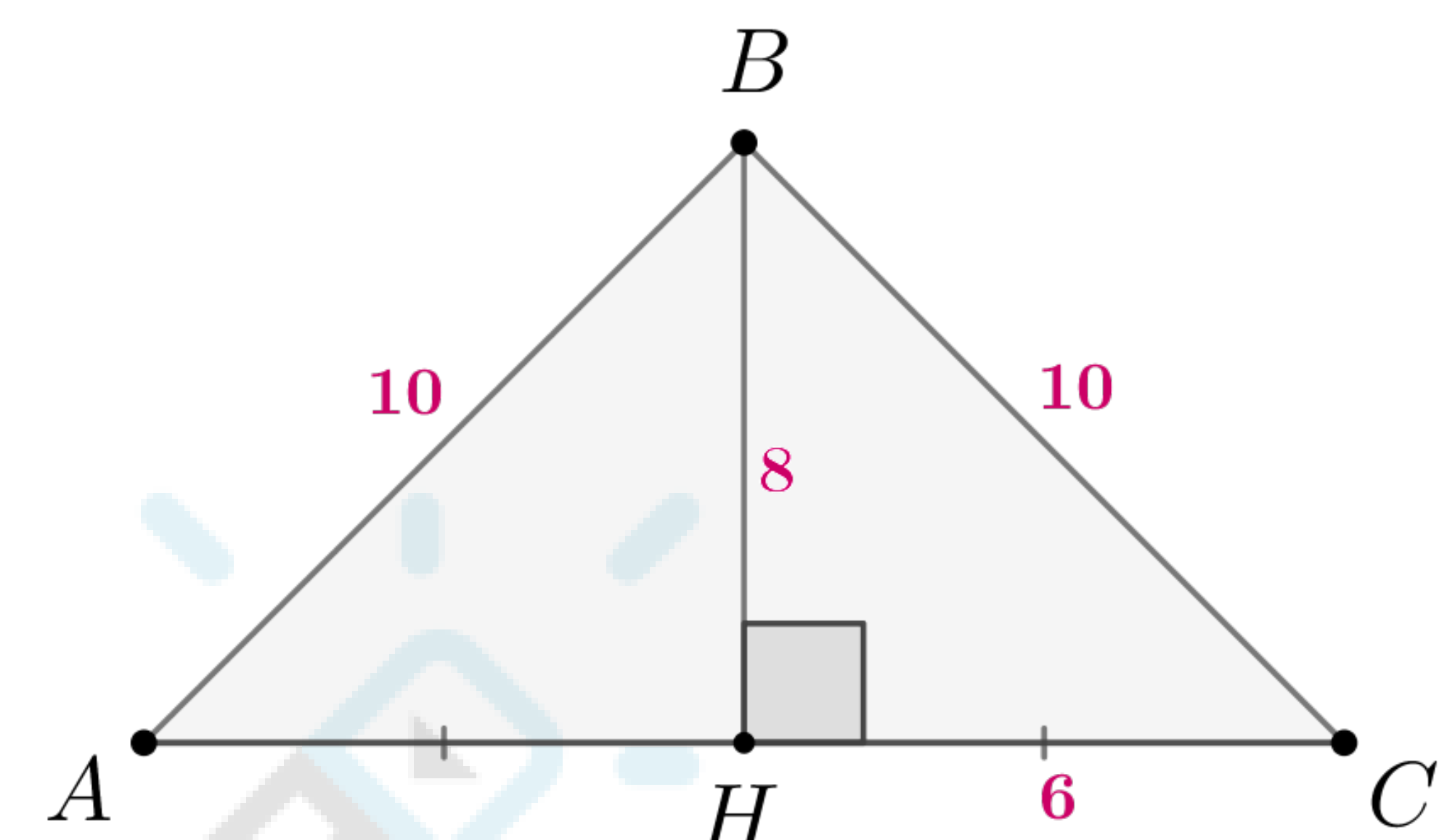
Пример, где встречается

Дан треугольник ABC со сторонами 10, 10 и 12. Найдите радиус описанной около него окружности.

► Будем искать радиус описанной окружности по формуле

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Опустим высоту BH к основанию $\triangle ABC$. Так как он равнобедренный, то BH — медиана, следовательно, $HC = 6$.



Тогда по теореме Пифагора $BH = 8$. Следовательно,

$$R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8} = \frac{25}{4}$$