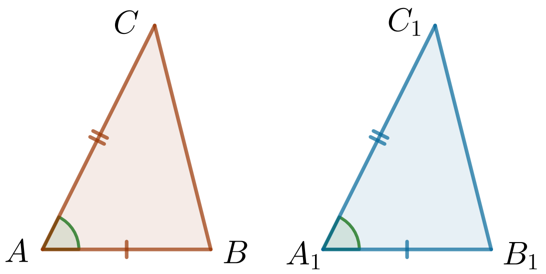
ЭТО БАЗА

Содержание

1 Признаки равенства треугольников

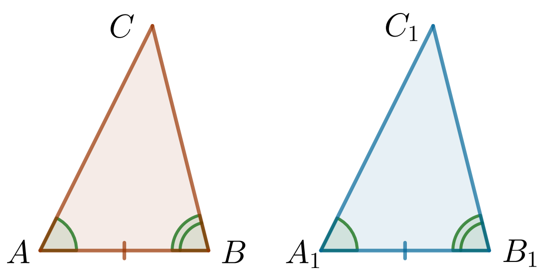
1.1 Первый признак (по двум сторонам и углу между ними)

Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



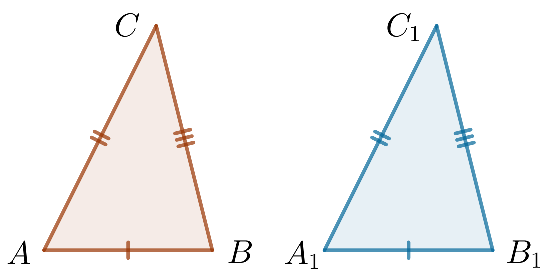
1.2 Второй признак (по стороне и двум прилежащим к ней углам)

Если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



1.3 Третий признак (по трем сторонам)

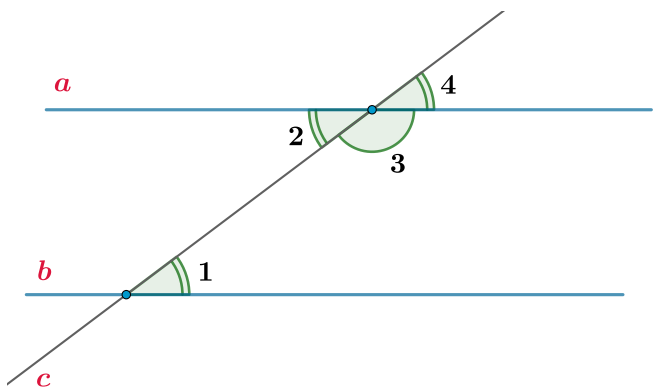
Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



2 Свойства и признаки параллельных прямых

Три свойства: если $a \parallel b$ и c — секущая, то

1. $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы)
2. $\angle 1 = \angle 4$ (соответственные углы)
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (односторонние углы)



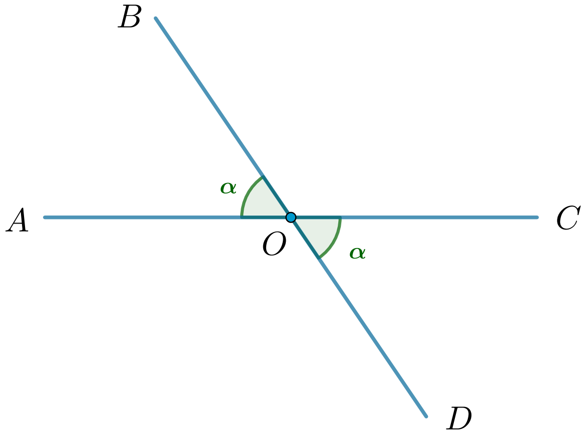
Три признака: $a \parallel b$ при секущей c, если:

1. $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы)
2. $\angle 1 = \angle 4$ (соответственные углы)
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (односторонние углы)

3 Вертикальные углы

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

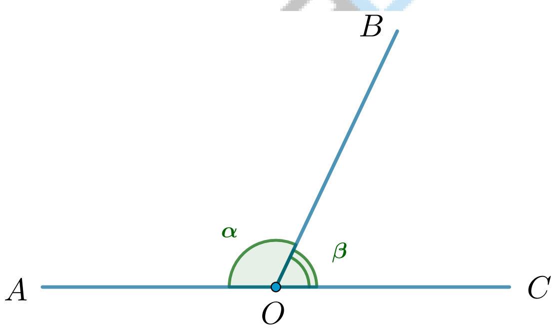
$$\angle AOB = \angle COD$$



4 Смежные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями друг друга, называются смежными. Сумма смежных углов равна 180°.

$$\angle AOB + \angle BOC = \alpha + \beta = 180^\circ$$

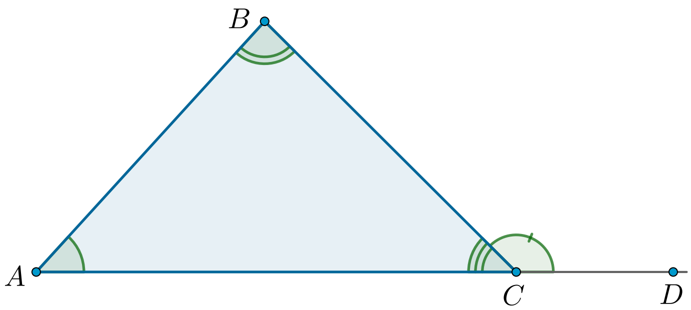


5 Сумма углов треугольника, внешний угол

Сумма углов треугольника равна 180°.
Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$$

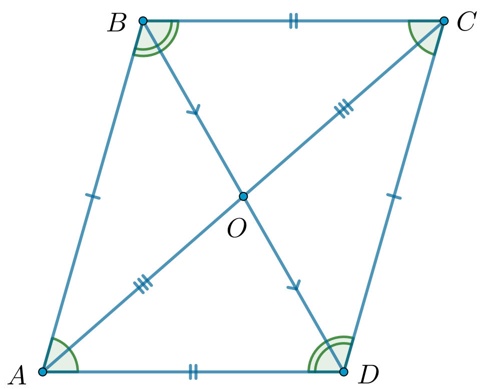


6 Параллелограмм

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

6.1 Свойства

1. Противоположные стороны попарно равны.
2. Противоположные углы попарно равны.
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

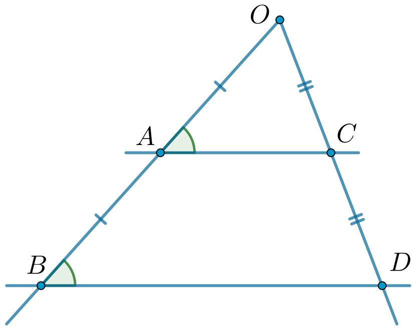


6.2 Признаки

Четырехугольник является параллелограммом, если
1. Противоположные стороны попарно равны.
2. Две стороны равны и параллельны.
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

7 Теорема Фалеса

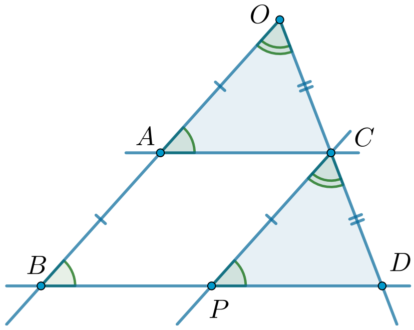
7.1 Прямая теорема Фалеса



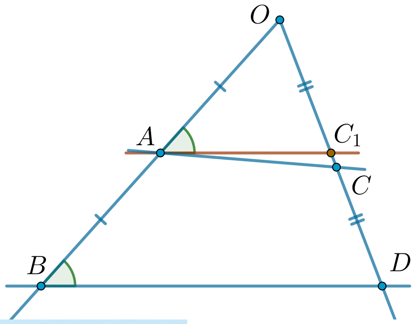
Если параллельные прямые высекают на одной из сторон угла равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла.

Доказательство

Пусть первая прямая соответственно пересекает стороны угла с вершиной O в точках A и C, а вторая — в точках B и D, и $OA = AB$.
Проведем через точку C прямую $CP \parallel AB$. Тогда $BACP$ — параллелограмм (т.к. $CP \parallel AB$ и $AC \parallel BD$). Тогда $AB = CP$.
Так как $AB \parallel CP$, то $\angle CPD = \angle ABD$ и $\angle PCD = \angle AOC$.
Так как $AC \parallel BD$, то $\angle OAC = \angle ABD$.
Значит, $\angle CPD = \angle OAC$. Тогда $\triangle AOC = \triangle PCD$ по второму признаку. Следовательно, $OC = CD$.



7.2 Обратная теорема Фалеса



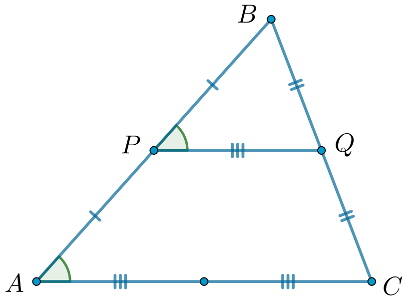
Если прямые высекают равные отрезки на сторонах угла, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть первая прямая соответственно пересекает стороны угла с вершиной O в точках A и C, а вторая — в точках B и D.
Тогда предположим противное. Пусть $AC \nparallel BD$. Тогда проведем $AC_1 \parallel BD$. По теореме Фалеса $OC_1 = C_1D$. Значит, и точка C, и точка C_1 делят отрезок OD пополам. Противоречие, следовательно, $AC \parallel BD$.

8 Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

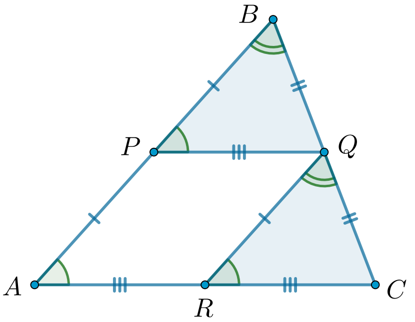


Средняя линия треугольника равна половине третьей стороны и параллельна ей, то есть

$$PQ = \frac{1}{2}AC \quad \text{и} \quad PQ \parallel AC$$

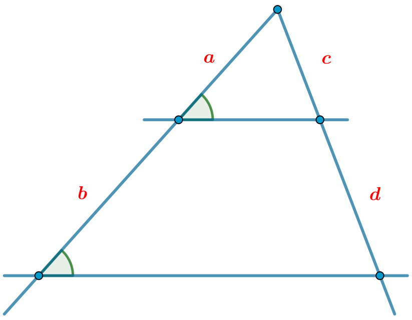
Доказательство

1) PQ — средняя линия, то есть $AP = PB$ и $CQ = QB$.
Тогда по обратной теореме Фалеса $PQ \parallel AC$.
2) Проведем через через точку Q прямую $OR \parallel AB$. Тогда $\triangle PBQ = \triangle RQC$ по второму признаку. Значит, $PQ = RC$. С другой стороны, $APQR$ — параллелограмм, следовательно, $PQ = AR$. Тогда $PQ = \frac{1}{2}AC$.



9 Обобщенная теорема Фалеса (т. о пропорциональных отрезках)

9.1 Прямая теорема о пропорциональных отрезках



Параллельные прямые высекают на сторонах угла пропорциональные отрезки:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

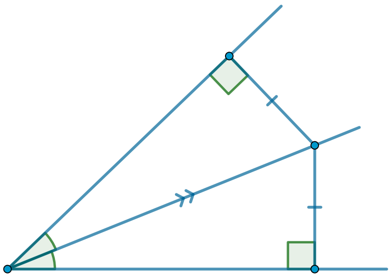
9.2 Обратная теорема о пропорциональных отрезках

Если прямые высекают пропорциональные отрезки на сторонах угла, то прямые параллельны.

10 Биссектриса

10.1 Что такое биссектриса?

Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных.

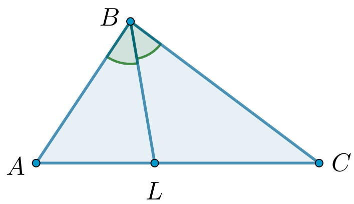


Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Верно и обратное: если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на его биссектрисе.

Доказательство

В обоих случаях образующиеся прямоугольные треугольники будут равны. В первом — по острому углу и гипотенузе, а во втором — по катету и гипотенузе.

10.2 Бомбическое свойство биссектрисы



Пусть BL — биссектриса в треугольнике ABC. Тогда

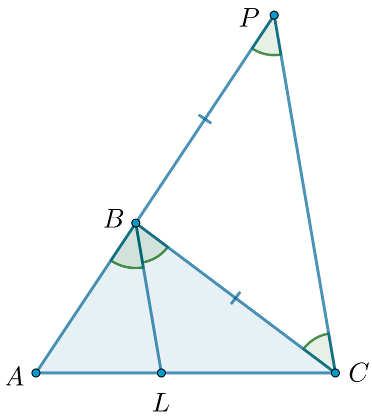
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$$

Доказательство

Проведем через точку C прямую $CP \parallel BL$. Тогда $\angle LBC = \angle PCB$ как накрест лежащие, образованные параллельными прямыми CP и BL и секущей BC. Также $\angle ABL = \angle BPC$ как соответственные, образованные параллельными прямыми CP и BL и секущей BC.

BL — биссектриса, значит,

$$\angle PCB = \angle LBC = \angle ABL = \angle BPC$$



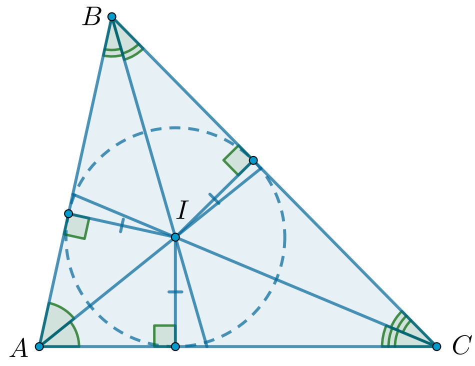
Таким образом, $\triangle BCP$ — равнобедренный, то есть $BC = BP$.

По теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BP} = \frac{AB}{BC}$$

10.3 Точка пересечения биссектрис, вписанная окружность

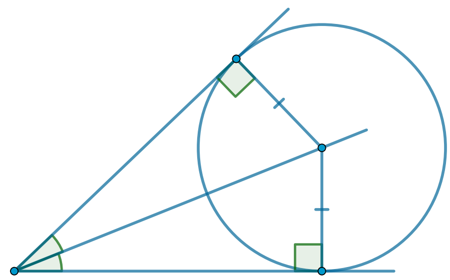
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности этого треугольника.



Доказательство

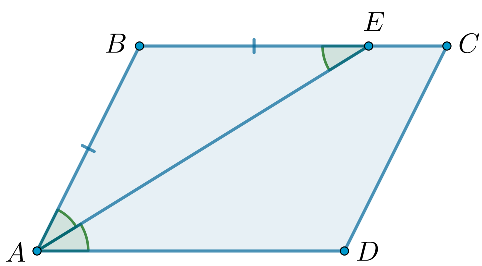
Пусть I — точка пересечения биссектрис углов A и B треугольника ABC. Тогда расстояния от точки I до прямых AB и AC равны и расстояния от точки I до прямых BA и BC равны, значит, расстояния от точки I до прямых CA и CB также равны. Таким образом, I лежит на биссектрисе угла C треугольника ABC.

Мы получили, что расстояния от точки I до прямых AB, BC и AC равны, значит, I — центр вписанной окружности треугольника ABC.



Если окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла.

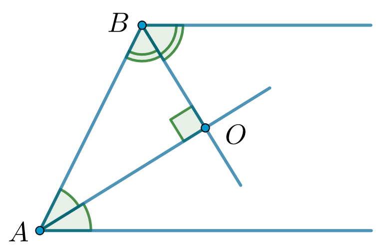
10.4 Биссектриса в параллелограмме



Биссектриса AE параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть

$$\angle BAE = \angle DAE = \angle BEA \quad \Rightarrow \quad AB = BE$$

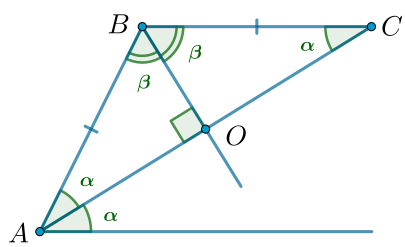
10.5 Углы между биссектрисами



Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых взаимно перпендикулярны.

Доказательство 1

Биссектриса AE отсекает равнобедренный треугольник, значит, $AB = BC$. BO — биссектриса, выходящая из вершины равнобедренного треугольника, тогда она также является высотой. Следовательно, $BO \perp AO$.



Доказательство 2

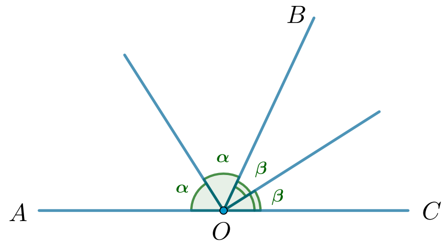
Сумма односторонних углов равна 180°, то есть

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

По сумме углов треугольника ABO

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle BAO + \angle ABO) = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$$

Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

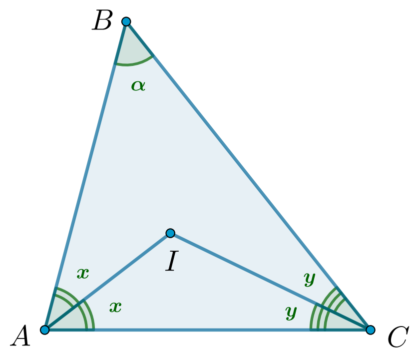


Доказательство (1:36:40)

Сумма смежных углов равна 180°, то есть

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

Пусть угол B треугольника ABC равен α. Тогда угол между биссектрисами углов A и C равен $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.



Доказательство (1:31:40)

Пусть биссектрисы углов A и C пересекаются в точке I. Пусть $\angle BAI = \angle IAC = x$, $\angle BCI = \angle ICA = y$. Тогда по сумме углов треугольника ABC

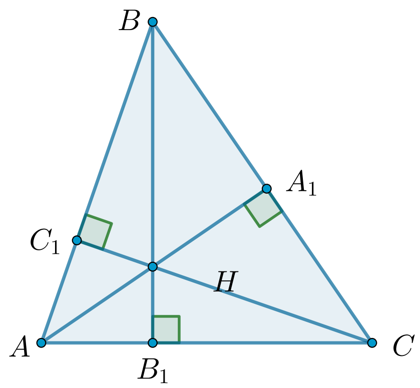
$$2x + 2y = 180^\circ - \alpha \quad \Rightarrow \quad x + y = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

По сумме углов треугольника ACI

$$\angle AIC = 180^\circ - (\angle IAC + \angle ICA) = 180^\circ - (x + y) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

11 Высота

11.1 Что такое высота и ортоцентр?



Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.

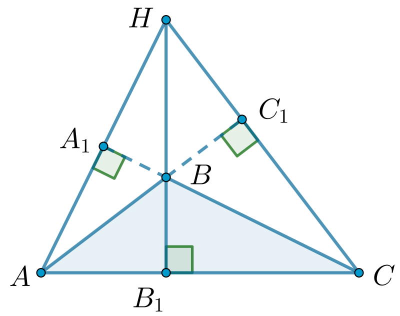
Три высоты треугольника, как три медианы и три биссектрисы, пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром.

Высота, опущенная из вершины острого угла тупоугольного треугольника, падает на продолжение противоположной стороны.

Важно помнить, что формула площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ah,$$

где h — высота, a — сторона, на которую она опущена, работает для любого треугольника (даже для тупоугольного).



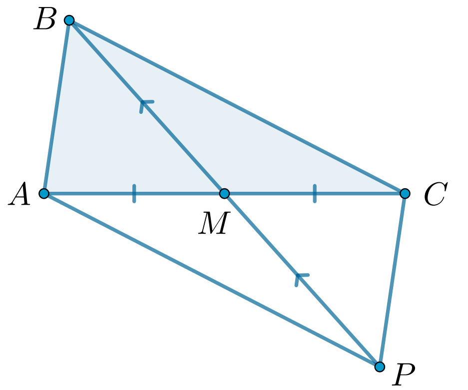
12 Медиана

12.1 Что такое медиана?

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника.

12.2 Удвоение медианы

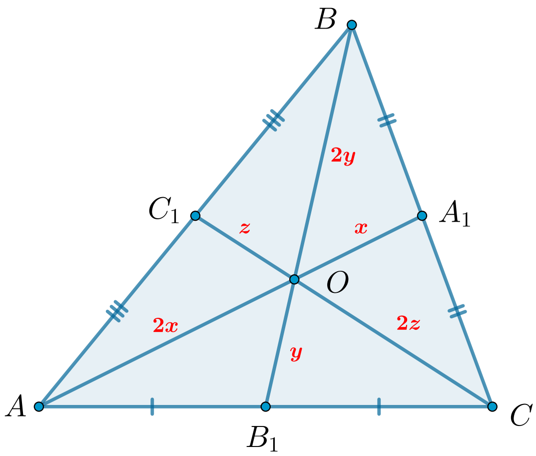
Удвоение медианы — это практически самое популярное и действенное дополнительное построение в задачах с медианой.
Возьмем треугольник ABC и продлим его медиану BM на свою длину за точку M. Пусть мы получили точку P. Тогда диагонали четырехугольника $ABCP$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит, $ABCP$ — параллелограмм.



12.3 Точка пересечения медиан

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины:

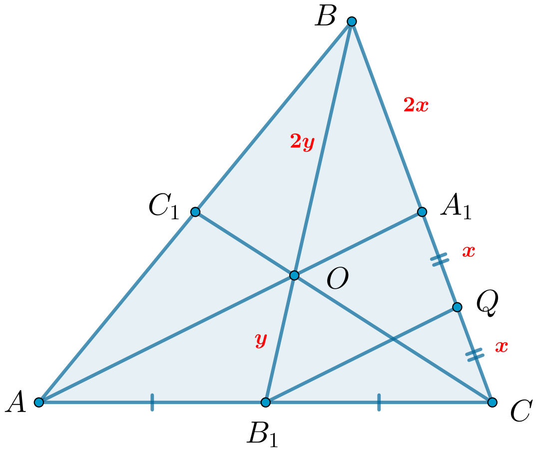
$$AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$$



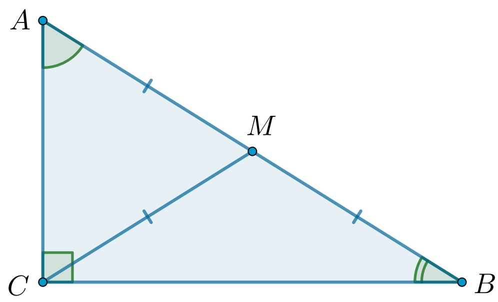
Доказательство
Пусть AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC, O — их точка пересечения. Докажем, что $AO : OA_1 = 2 : 1$.
Проведем через точку B_1 прямую $B_1Q \parallel AA_1$. Тогда, так как $AB_1 = B_1C$, по теореме Фалеса $CQ = QA_1$.
Пусть $CQ = QA_1 = x$. A_1 — середина BC, тогда $BA_1 = CA_1 = 2x$. По теореме о пропорциональных отрезках для угла B_1BC и параллельных прямых AA_1 и B_1Q имеем

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{BA_1}{A_1Q} = \frac{2x}{x} = 2$$

Таким образом, мы получили, что медиана AA_1 делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1 считая от вершины. Аналогично докажем, что медиана CC_1 делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1 считая от вершины. На BB_1 такая точка единственна, значит, три медианы пересекаются в ней.



12.4 Медиана прямоугольного треугольника

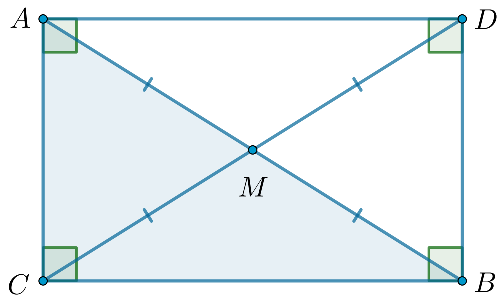


Медиана треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$CM = \frac{1}{2}AB = AM = MB$$

Таким образом, получаются два равнобедренных треугольника: $\triangle ACM$ и $\triangle CBM$.

Доказательство



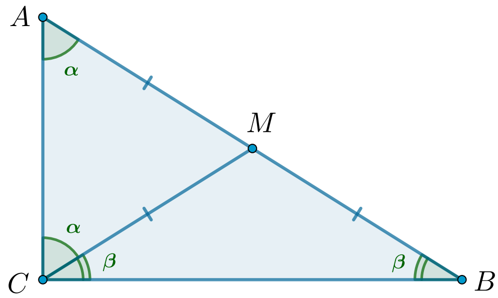
Удвоим медиану CM. Пусть мы получили точку D. Тогда $ADBC$ — параллелограмм с прямым углом C, значит, $ADBC$ — прямоугольник.

Диагонали прямоугольника разбиваются на 4 равных отрезка, следовательно, $CM = AM = BM$.

Обратная теорема

Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой проведена, то этот треугольник прямоугольный.

Доказательство

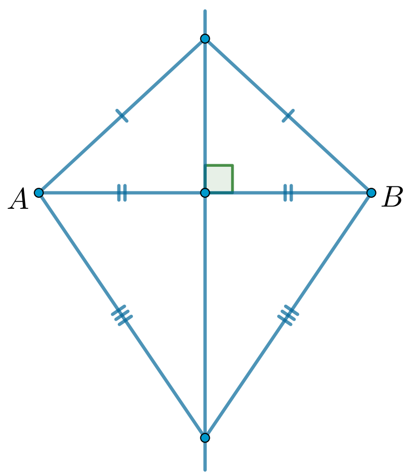


Пусть медиана CM равна половине стороны AB. Тогда $CM = AM = BM$. Заметим, что $\triangle ACM$ и $\triangle BCM$ равнобедренные. Тогда пусть $\angle MAC = \angle MCA = \alpha$ и $\angle MBC = \angle MCB = \beta$. По сумме углов треугольника имеем

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle C = 90^\circ$$

13 Серединный перпендикуляр и описанная окружность

13.1 Что такое серединный перпендикуляр?



Серединный перпендикуляр — прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину.

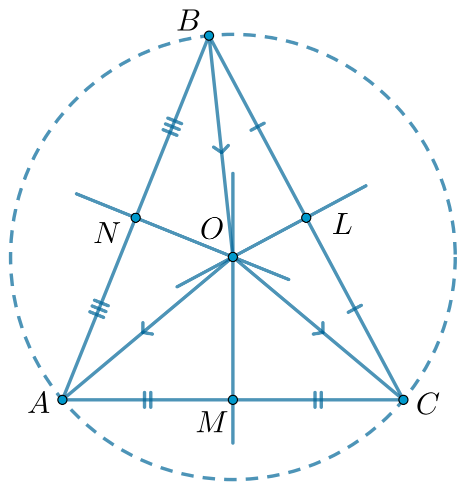
Любая точка, лежащая на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалена от его концов. Верно и обратное: если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на его серединном перпендикуляре.

Доказательство

В обоих случаях образующиеся прямоугольные треугольники будут равны. В первом — по двум катетам, а во втором — по катету и гипотенузе.

13.2 Точка пересечения серединных перпендикуляров

Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности этого треугольника.



Доказательство

Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и AC треугольника ABC, а $L,\ M,\ N$ — середины сторон $BC,\ AC$ и AB. Тогда расстояния от точки O до точек A и B равны и расстояния от точки O до точек A и C равны, значит, расстояния от точки O до точек B и C также равны. Таким образом, O лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC треугольника ABC.

Мы получили, что расстояния от точки O до точек $A,\ B$ и C равны, значит, O — центр описанной окружности треугольника ABC.