

Разные олимпиадные идеи для №19

Содержание

1	Принцип Дирихле	2
2	Графы	3
3	Двойной подсчет	5
4	Взвешивания	6
5	Переправы	7

1 Принцип Дирихле

№1

Можно ли написать на доску 11 натуральных чисел так, чтобы никакая разность между выписанными числами не делилась на 10?

Ответ

Нет, нельзя

Решение

Отметим, что разность делится на 10 в том случае, если числа оканчиваются на одну и ту же цифру. Всего есть 10 цифр, и на каждую цифру может оканчиваться только одно из выписанных чисел. Значит, выписанных чисел не больше, чем цифр, то есть не больше 10. Поэтому указанных в условии 11 натуральных чисел не существует.

№2

Скитаясь по космосу, Пин встретил 50 инопланетян. Докажите, что среди них есть либо 8 существ, у которых ног поровну, либо 8 существ, у всех из которых разное число ног.

Решение

Предположим, что ни одно из условий не выполнилось. Тогда количество ног у этих инопланетян принимает не больше 7 различных значений, и каждое значение принимается не больше 7 раз. Тогда всего инопланетян не больше, чем $7 \cdot 7 = 49$. Но по условию их 50. Значит, мы пришли к противоречию, и по крайней мере одно из условий задачи точно выполнится.

№3

Крош нарисовал на доске квадрат 10×10 и написал в каждую клетку число 1, 2 или 3. Ёжик посчитал все суммы по горизонталям, вертикалям и двум диагоналям. Докажите, что у Ёжика в любом случае получатся хотя бы две одинаковые суммы.

Решение

В каждой посчитанной Ёжиком сумме по 10 слагаемых. Минимально возможная такая сумма равна $1 \cdot 10 = 10$, а максимальная равна $3 \cdot 10 = 30$.

Таким образом, всего различных значений для сумм, посчитанных Ёжиком, $30 - 10 + 1 = 21$. Но сумм, которые посчитал Ёжик, двадцать две: 10 по вертикалям, 10 по горизонталям и 2 по диагоналям. Если бы все эти суммы были различны, то у Ёжика получилось бы 22 различных значения, но, как мы поняли выше, различных значений всего 21.

Значит, какие-то две суммы, посчитанные Ёжиком, равны.

№4

На доске написаны числа $2, 4, 8, 16, \dots, 2^{100}$. Докажите, что разность между какими-то двумя числами делится на 99.

Решение

Заметим, что остатков при делении на 99 всего 99 штук: от 0 до 98. Если среди данных чисел есть два, которые дают одинаковые остатки при делении на 99, то их разность делится на 99.

Предположим, что таких чисел на доске нет. Тогда каждому из 99 остатков соответствует не более одного числа. Но и чисел в таком случае не больше 99, а на доске их 100. Мы пришли к противоречию, значит, разность между какими-то двумя написанными числами все же делится на 99.

№5

На тренировке Крош использовал в качестве мишени квадрат 10×10 . Он совершил 49 выстрелов, каждый раз стреляя в новый квадратик 1×1 . Докажите, что найдутся три квадратика, образующие уголок из трех клеток, ни в одну из которых Крош не попал.

Решение

Разобьем квадрат 10×10 на 25 квадратиков 2×2 . Предположим, что в каждый квадратик Крош попал хотя бы дважды. Тогда всего выстрелов было не менее $25 \cdot 2 = 50$, а по условию их было 49. Значит, есть квадрат, в который Крош попал не более одного раза. Тогда в этом квадрате как раз и можно выделить уголок из трех клеток, ни в одну из которых Крош не попал.

2 Графы

№6

В стране 100 городов, занумерованных от 1 до 100. Дума приняла закон, по которому из каждого города с номером n должно выходить количество дорог, равное n -ному простому числу. Можно ли выполнить такой закон?

Ответ

Нет, нельзя

Решение

Есть только одно четное простое число, а именно 2. Все остальные простые числа нечетны, поэтому при таком условии степень ровно одного города четна, а остальных 99 — нечетна. Итого получается нечетное количество городов нечетной степени, чего быть не может.

№7

В стране 96 городов, из которых 24 — «областные». Некоторые пары городов соединены между собой дорогами (но не более чем одной), причём любой путь по дорогам между двумя обычными городами, если он есть, проходит хотя бы через один «областной» город. Какое наибольшее количество дорог могло быть в этой стране?

Ответ

2004

Решение

Очевидно, что обычные города не соединены дорогами, иначе бы существовал путь не проходящий через областной город. Значит, максимальное число дорог в том случае, когда каждый обычный город соединен с каждым областным, и все областные соединены между собой.

Нетрудно убедиться, что ответ в таком случае будет равен

$$24 \cdot \frac{23}{2} + (96 - 24) \cdot 24 = 276 + 1728 = 2004.$$

№8

На спартакиаде проводились соревнования по пяти видам спорта. Каждый из 30 семиклассников принял участие в соревнованиях либо по одному, либо по трём видам спорта, а в каждом из видов число принимавших участие было 15 или 25. Докажите, что такого быть не могло.

Решение

Рассмотрим граф, в котором вершинами будут семиклассники и виды спорта, а ребра проведены от семиклассников к тем видам спорта, в которых они участвовали. Так как от каждого из 30 семиклассников выходит нечетное количество ребер, то всего ребер в графе четное количество. С другой стороны, если в каждом виде спорта также участвовало нечетное количество спортсменов, то видов спорта было 5. Поэтому количество ребер, выходящих от вершин-видов спорта нечетное количество. Итак, ребер в графе одновременно и четно, и нечетно, а такого быть не могло.

№9

Из полного графа на 100 вершинах выкинули 98 ребер. Мог ли получиться несвязный граф?

Ответ

Нет

Решение

Предположим, что полученный граф оказался несвязным. Тогда его можно мысленно разделить на два подграфа, между которыми нет ребер (ни одна вершина первого подграфа не связана ни с какой вершиной второго подграфа). Обозначим количество вершин в первом подграфе за n . Тогда было выкинуто по крайней мере $n(100 - n)$ ребер, соединявших вершины этого подграфа с вершинами другого подграфа. Но

$$n(100 - n) = 50^2 - (n - 50)^2 \geq 50^2 - 49^2 = 1 \cdot 99 > 98.$$

Противоречие. Значит, связный граф получиться не мог.

№10

Можно ли придумать пять таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими?

Ответ

Нет, нельзя

Решение

Предположим, что удалось придумать пять таких слов. Обозначим слова вершинами, и соединим ребром те вершины, соответствующие слова которых имеют общую букву. Тогда должен получиться граф с 5 вершинами, степень каждой из которых равна 3. Но тогда суммарная степень всех вершин графа равна 15, то есть нечетна, чего не может быть.

3 Двойной подсчет

№11

В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце — по 10, а в каждой строке — по 20. Сколько в таблице строк?

Ответ

4

Решение

Сумма всех чисел таблицы по столбцам равна $8 \cdot 10 = 80$, значит, строк там $80 : 20 = 4$.

№12

В строку записаны n чисел, причем суммы любых трех подряд равна 7, а сумма всех равна 20.

- 1) Может ли n равняться 12?
- 2) Может ли n равняться 10? Найдите седьмое число.

Ответ

- 1) Нет, не может.
- 2) Может, -1 .

Решение

1) Если $n = 12$, то числа можно разбить на 4 группы по 3 подряд идущих, значит, сумма всех чисел равна $7 \cdot 4 = 28$, а не 20.

2) Первое, второе и третье числа образуют тройку, и их сумма равна 7. Аналогично — числа с номерами 4, 5, 6 и 8, 9, 10. Значит, сумма всех чисел, кроме седьмого, равна $7 \cdot 3 = 21$, следовательно, седьмое равно $20 - 21 = -1$.

Пример такой строки:

$$-1, 4, 4, -1, 4, 4, -1, 4, 4, -1$$

№13

Четыре девочки — Катя, Лена, Маша и Нина — участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен — больше, чем каждая из остальных, а Лена — 5 песен — меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето?

Ответ

9

Решение

Пусть за каждую песню каждая девочка получит по фантику. Суммируя общее число фантиков по песням видим, что это число делится на 3 (каждая песня исполнялась 3 раза). Кроме того, Маша и Нина получили не более 7 и не менее 6 фантиков каждая. Значит, всего было роздано не более, чем $8 + 7 + 7 + 5 = 27$ и не менее, чем $8 + 6 + 6 + 5 = 25$ фантиков. Единственное число от 25 до 27, кратное 3 — это 27, поэтому спето $27 : 3 = 9$ песен.

№14

Среди восьми монет, возможно, есть одна лёгкая фальшивая монета (но её может и не быть). Как за два взвешивания найти фальшивую монету, если она есть, или доказать, что её нет?

Решение

Заметим, что при нахождении одной фальшивой монеты из девяти мы одну из монет вообще никогда не клали на весы. Таким образом, если мысленно добавить девятую монету, которая будет фальшивой в том случае, когда среди восьми монет нет фальшивой, то, используя 8 имеющихся монет, мы в любом случае найдём фальшивую.

4 Взвешивания

№15

Пусть имеется 7 серебряных монет и 2 медные, причём медные отличаются по виду от серебряных. Известно, что одна из монет фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей медной, фальшивая монета легче настоящей монеты из того же металла). Как найти фальшивую монету за два взвешивания?

Решение

Положим на каждую чашу весов по 3 серебряные монеты. Если одна из чаш оказалась легче, то ФМ находится на ней и мы отыщем её вторым взвешиванием. Если же весы оказались в равновесии, то ФМ — одна из трёх остальных. Тогда вторым взвешиванием сравним между собой две медные монеты.

№16

Есть 27 монет, часть из них серебряные, остальные — медные. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей медной). Фальшивая монета легче настоящей монеты из того же металла. Как найти фальшивую монету за три взвешивания?

Решение

Разобьём все монеты на пары монет из одного металла, лишь одна монета останется без пары. Выберем любые 9 пар и разложим монеты каждой пары на две разные чаши. В результате на чашах окажется поровну медных и поровну серебряных монет. После взвешивания останется ровно 9 подозрительных монет: с лёгкой чаши при неравновесии или отложенные при равновесии.

5 Переправы

№17

В ромашковой долине открывается новое 20-этажное здание. В лифте есть всего две кнопки: при нажатии первой лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии второй лифт спускается на 8 этажей. При этом если нажать первую кнопку выше 7-го этажа или вторую кнопку ниже 9-го, то лифт ломается. Как с помощью такого инновационного лифта попасть с 13-го этажа на 8-й?

Ответ

$3 \rightarrow 5 \rightarrow 18 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 20 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \rightarrow 17 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 14 \rightarrow 6 \rightarrow 19 \rightarrow 11 \rightarrow 3 \rightarrow 16 \rightarrow 8$

Решение

Приведем последовательность этажей, начиная с 13-го и заканчивая 8-м, на которые надо ездить. При этом если следующий этаж выше текущего, то нажимать надо первую кнопку, а если выше, то вторую:

$$13 \rightarrow 5 \rightarrow 18 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 20 \rightarrow 12 \rightarrow \\ \rightarrow 4 \rightarrow 17 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 14 \rightarrow 6 \rightarrow 19 \rightarrow 11 \rightarrow 3 \rightarrow 16 \rightarrow 8$$

Обратите внимание, что алгоритм единственный: с любого этажа этого здания можно поехать либо только вверх, либо только вниз, поэтому в любой момент следующий этаж определяется однозначно.

№18

Четырем трудолюбивым бурундучкам привезли 5 четырехколесных грузовиков. К сожалению, на них до сих пор стоит летняя резина, а на дворе уже почти зима. Поэтому бурундучкам надо срочно поменять на каждом колесе резину на зимнюю. Один бурундучок меняет резину на одном колесе за один час. К сожалению, менять резину на двух или более колесах одного грузовика одновременно нельзя. Могут ли 4 бурундучка поменять резину на всех 5 грузовиках за 5 часов?

Ответ

Да, могут

Решение

Приведем один из возможных примеров, как бурундучкам справиться с этой работой. Прономеруем грузовики числами 1, 2, 3, 4 и 5. Расставим эти грузовики мысленно по кругу так, чтобы после пятого грузовика шел первый. Пусть за первый час бурундучки меняют по одному колесу на грузовиках с номерами 1, 2, 3 и 4. Затем бурундучки переходят к следующим по часовой стрелке грузовикам и за второй час меняют по одному колесу на грузовиках 2, 3, 4 и 5. В третий час они меняют по одному колесу на грузовиках с номерами 3, 4, 5, 1. В четвертый час — на грузовиках с номерами 4, 5, 1 и 2, и, наконец, за пятый час они меняют колеса на грузовиках с номерами 5, 1, 2 и 3. Заметим, что над каждым грузовиком трудились ровно 4 часа. Значит, все 4 колеса бурундучки успели поменять.

№19

Крош подарил Нюше два бикфордовых шнура: такой шнур горит неравномерно и сгорает ровно за 1 минуту. Как Нюше при помощи двух таких шнуров и зажигалки отмерить ровно 45 секунд?

Решение

Подожжем первый шнур с двух концов, а второй шнур с одного. Когда первый шнур целиком догорит, пройдет ровно 30 секунд, значит, второму шнуру, если ничего не изменится, также останется гореть 30 секунд. Но в этот момент мы подожжем его со второго конца. Тогда он догорит в два раза быстрее, то есть за 15 секунд. В итоге второй шнур горел всего $30 + 15 = 45$ секунд, именно это время нам и требовалось отмерить.

№20

Во время похода Лосяш отправился к речке за водой. У него есть только 2 ведра емкостью 9 литров и 4 литра, а ему для супа нужно отмерить ровно 5 литров воды. Как Лосяшу справиться с этим заданием? Ведра у Лосяш причудливой формы, поэтому на глаз он умеет только определять, пустое ведро или полное.

Решение

Сначала набираем полное 9-литровое ведро. Затем выливаем из него воду в 4-литровое, пока то не заполнится до краев. Как только это случилось, в 9-литровом ведре осталось ровно $9 - 4 = 5$ литров воды — ровно столько, сколько нужно для супа.