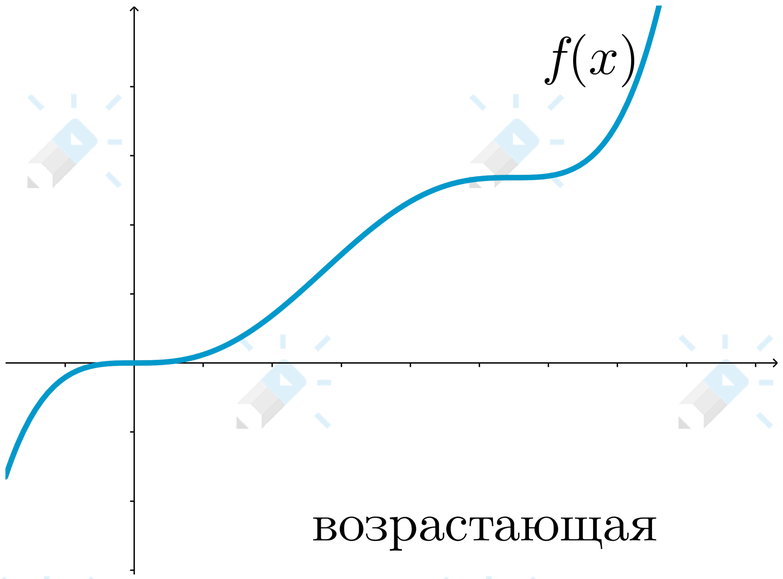
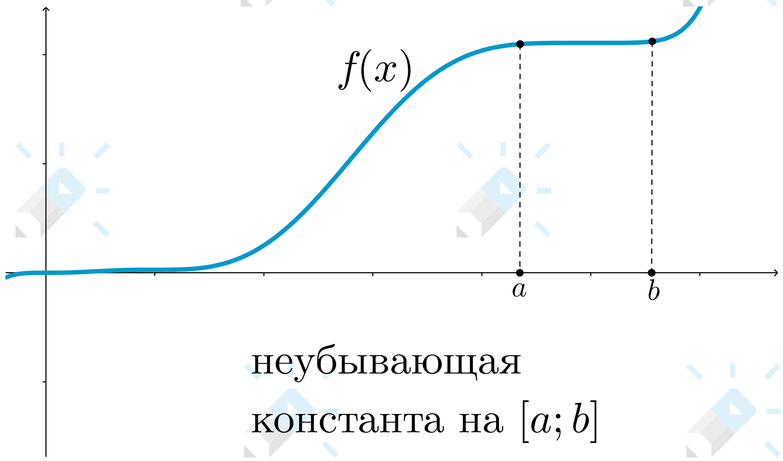
► Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) < f(x_2)$.

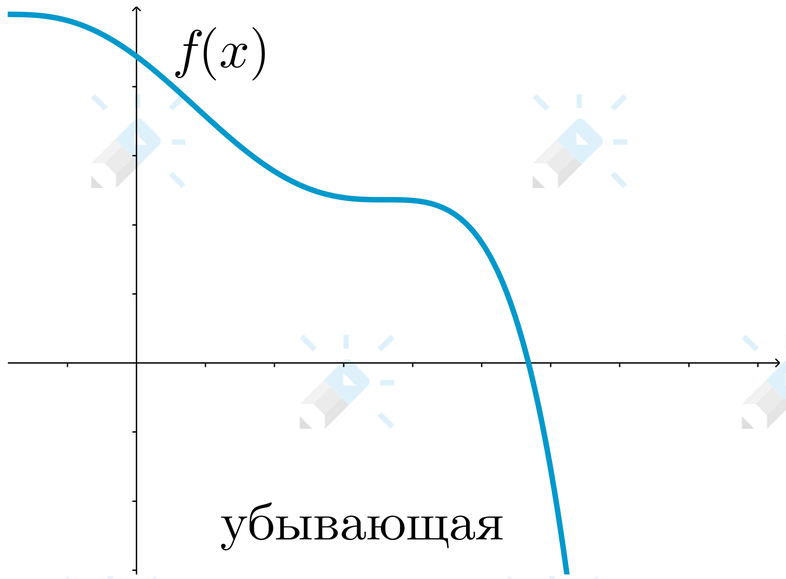


Примеры. $y = \sqrt{x},\ y = 2^x,\ y = \log_2 x,\ y = x^3$.

Функция называется неубывающей на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.



► Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) > f(x_2)$.



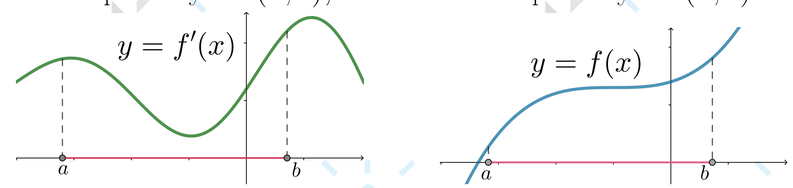
Примеры. $y = \log_{0,5} x,\ y = (0,5)^x,\ y = \sqrt{-x}$.

Функция называется невозрастающей на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

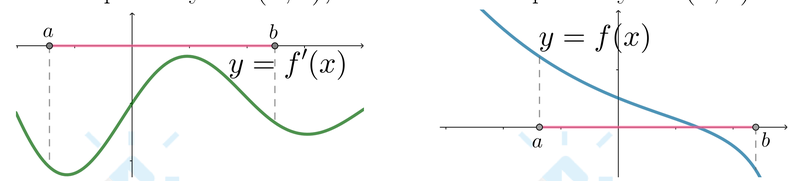
► Возрастающие и убывающие функции называют строго монотонными, а невозрастающие и неубывающие — просто монотонными.

Краткий справочник

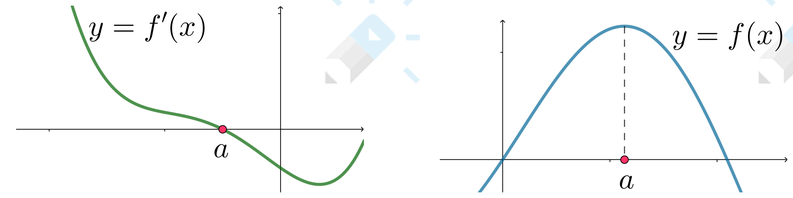
Если производная положительна на промежутке $(a; b)$, то функция возрастает на промежутке $(a; b)$



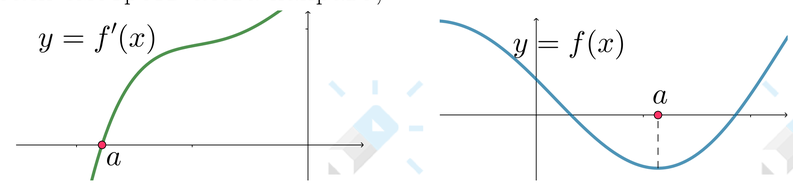
Если производная отрицательна на промежутке $(a; b)$, то функция убывает на промежутке $(a; b)$



Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с "плюса" на "минус", если смотреть слева направо, то точка $x = a$ является точкой максимума функции



Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с "минуса" на "плюс", если смотреть слева направо, то точка $x = a$ является точкой минимума функции



► Основные свойства:

1. Сумма возрастающих функций – возрастающая функция;
сумма убывающих функций — убывающая функция;
если $f(x)$ – возрастающая функция, то $-f(x)$ – убывающая функция;
если $f(x)$ – возрастающая функция, то $f(x)+c$ – возрастающая функция (c – некоторое число).

Пример. Функция $f(x)=x^3+x^2+x$ монотонно возрастает, так как ее производная $f'(x)=3x^2+2x+1>0$ при $\forall x\in\mathbb{R}$. Функция $t(x)=2^x$ монотонно возрастает.
Следовательно,
функция $g(x)=-f(x)=-x^3-x^2-x$ монотонно убывает,
функция $h(x)=f(x)+1=x^3+x^2+x+1$ монотонно возрастает, как и $f(x)$,
функция $k(x)=f(x)+t(x)=x^3+x^2+x+2^x$ монотонно возрастает.

2. Если $f(x), g(x)$ – возрастающие функции,
а $h(x), p(x)$ – убывающие (на некотором множестве), то
$f(g(x))$ – возрастающая,
$f(h(x))$ – убывающая,
$h(f(x))$ – убывающая,
$h(p(x))$ – возрастающая.
Иными словами: композиция двух функций одинаковой монотонности – возрастающая, разной монотонности – убывающая.

Пример. Функция $f(x)=\sin x$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, функция $t(x)=x^2$ возрастает при $x\geqslant 0$.
Следовательно, функция $g(x)=f(t(x))=\sin x^2$ возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Если $f(x)$ – возрастающая и знакопостоянная на некотором множестве (либо строго положительна, либо строго отрицательна), то $\dfrac{1}{f(x)}$ – убывающая.
Аналогично: если $f(x)$ убывает и знакопостоянна, то $\dfrac{1}{f(x)}$ возрастает.

Пример. Функция $f(x)=x$ возрастает и положительна при $x>0$.
Следовательно, функция $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$ убывает при $x>0$.

4. Если $f(x), g(x)$ – возрастающие неотрицательные/неположительные функции, то $f(x)\cdot g(x)$ – возрастающая/убывающая соответственно.
Аналогично с убывающими.

Пример. Функции $f(x)=x^3$ и $g(x)=-x^2$ возрастают и неположительны при $x\leqslant 0$.
Следовательно, функция $h(x)=f(x)\cdot g(x)=-x^5$ убывает при $x\leqslant 0$.

5. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то равенства $x_1=x_2$ ($x_1, x_2\in X$) и $f(x_1)=f(x_2)$ равносильны.

Если $f(x)$ возрастает на X, то
$x_1>x_2 \quad\Leftrightarrow\quad f(x_1)>f(x_2)$.
Если $g(x)$ убывает на X, то
$x_1>x_2 \quad\Leftrightarrow\quad g(x_1)<g(x_2)$.

Пример. Функция $f(x)=\sqrt{x}$ является строго возрастающей при всех $x\in[0;+\infty)$, поэтому из равенства $\sqrt{x}=\sqrt{4}$ следует $x=4$.

6. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то уравнение $f(x)=c$, где c — некоторое число, всегда имеет не более одного решения на X.

Примеры.
1) функция $f(x)=x^2$ является строго убывающей при $x\in(-\infty;0]$, поэтому уравнение $x^2=9$ имеет на этом промежутке не более одного решения, а точнее одно: $x=-3$.
2) функция $f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$ является строго возрастающей при $x\in(-1;+\infty)$, поэтому уравнение $-\dfrac{1}{x+1}=0$ имеет на этом промежутке не более одного решения, а точнее ни одного, так как числитель дроби в левой части никогда не может быть равен нулю.

7. Если на $[a;b]$ функция $f(x)$ – возрастающая, а $g(x)$ – убывающая, то уравнение $f(x)=g(x)$ на $[a;b]$ имеет не более одного корня.

Пример. Функция $f(x)=x^2$ является возрастающей на $[0;+\infty)$, а функция $g(x)=-x+5$ – убывающей, следовательно, уравнение $x^2=-x+5$ имеет на $[0;+\infty)$ не более одного корня. В данном случае – ровно один корень.

8. Если функция $f(x)$ — не убывает (не возрастает) и непрерывна на отрезке $[a;b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a)=A, f(b)=B$, то при $C\in[A;B]$ ($C\in[B;A]$) уравнение $f(x)=C$ всегда имеет хотя бы одно решение.

Пример. Функция $f(x)=x^3$ является строго возрастающей (то есть строго монотонной) и непрерывной при всех $x\in\mathbb{R}$, поэтому при любом $C\in(-\infty;+\infty)$ уравнение $x^3=C$ имеет ровно одно решение: $x=\sqrt[3]{C}$.