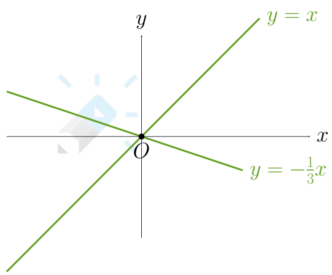
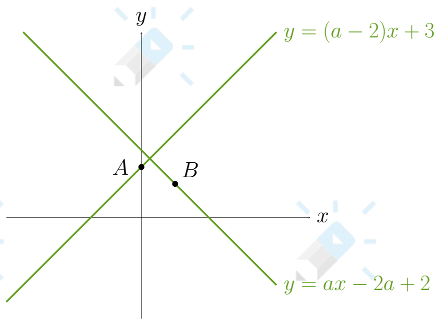
Пучок прямых

Рассмотрим функцию $y = ax$. При каждом фиксированном a графиком этой функции является прямая.
Заметим, что при $x = 0$ мы получаем значение $y = 0$, не зависящее от параметра. Это значит, что при любом фиксированном $a \in \mathbb{R}$ прямая $y = ax$ проходит через начало координат $(0; 0)$. Пробегая все значения a от $-\infty$ до $+\infty$, мы можем получить любую прямую, проходящую через $(0; 0)$, кроме вертикальной прямой (так как вертикальная прямая задается уравнением $x = b$, которое мы не может получить ни при каком a).
Говорят, что графиком функции $y = ax$ при всех $a \in \mathbb{R}$ является пучок прямых, проходящих через точку $O(0; 0)$.



Рассмотрим примеры других функций, задающих пучки прямых.
- $y = (a-2)x+3$ — задает пучок прямых, проходящих через точку $A(0; 3)$;
- $y = ax - 2a + 2$. Если преобразовать уравнение к виду $y = a(x-2)+2$, то видно, что график данной функции — пучок прямых, проходящих через точку $B(2; 2)$.



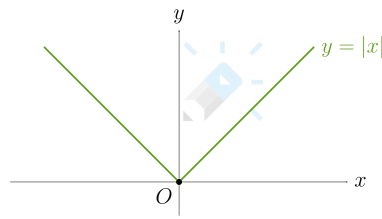
Заметим, что функция $y = ax + a^2$, к примеру, не задает пучок прямых, так как не существует ни одного значения x, при котором мы получим значение y, не зависящее от параметра.

«Уголок»

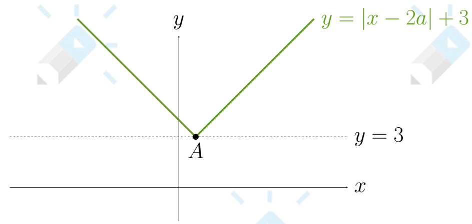
Рассмотрим функцию $y = |x|$. Вспомнив определение модуля, получаем, что

$$y = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Следовательно, графиком $y = |x|$ является объединение двух лучей с общим началом в точке $O(0; 0)$: луч прямой $y = x$ при $x \geqslant 0$ и луч прямой $y = -x$ при $x < 0$. Такой график часто называют «уголок» или «галочка».
Договоримся называть точку O вершиной уголка, угловые коэффициенты 1 и -1 прямых $y = x$ и $y = -x$ — наклоном правой и левой ветвей уголка соответственно.



Если $O(x_0; y_0)$ — вершина уголка, то уголок задается уравнением $y = A|x - x_0| + y_0$. Тогда A и $-A$ — наклон правой и левой ветвей уголка соответственно.
Рассмотрим примеры других уголков.
- $y = |x-2a|+3$. Наклон ветвей уголка равен 1 и -1, вершина уголка находится в точке $A(2a; 3)$. Заметим, что точка A не зафиксирована и ее положение на координатной плоскости зависит от параметра. При изменении параметра a от $-\infty$ до $+\infty$ абсцисса $x_0 = 2a$ вершины уголка меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а ордината $y_0 = 3$ остается фиксированной. Следовательно, вершина A уголка движется по прямой $y = 3$. Эта прямая называется траекторией движения уголка. Следовательно, при произвольном зафиксированном a мы получаем уголок, «подобный» уголку $y = |x|$, вершина которого находится в некоторой точке прямой $y = 3$.



- $y = |2x + a| + 2a$. Для того, чтобы определить наклон уголка, нужно вынести 2 из-под модуля. Получим:

$$y = 2|x + 0,5a| + 2a.$$

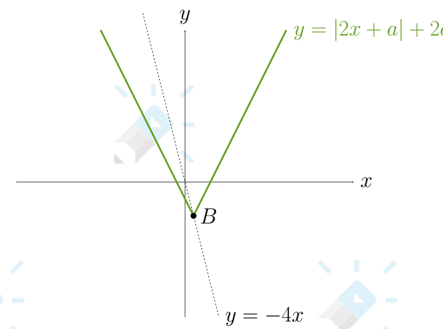
Следовательно, наклон правой и левой ветвей уголка равен 2 ответственно. То есть можно сразу сказать, что мы получим «подобный» уголку $y = 2|x|$. Осталось определить верши ка. Она имеет координаты $B(-0,5a; 2a)$. Заметим, что те координаты вершины уголка зависят от параметра. Для того найти траекторию движения вершины уголка, нужно найти связь координат вершины уголка. Для этого рассмотрим сис

$$\begin{cases} x_0 = -0,5a \\ y_0 = 2a \end{cases}$$

Выразим a из любого из двух уравнений и подставим во втор нение. Тогда получим:

$$y_0 = -4x_0.$$

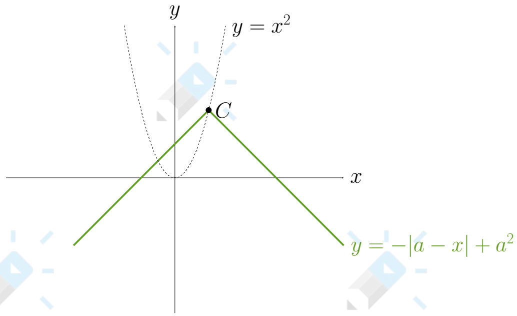
Следовательно, вершина уголка (или, говорят, сам уголок) д по прямой $y = -4x$. Получаем такой график для некоторого рованного a :



- $y = -|a - x| + a^2$. Для удобства изучения этой функци переписать ее в виде

$$y = -|x - a| + a^2.$$

Заметим, что наклон правой и левой ветвей уголка равен -1 и ветственно. То есть уголок «подобен» уголку $y = -|x|$ (гово ветви направлены вниз). Вершина уголка находится в точке
Если найти зависимость между $x_0 = a$ и $y_0 = a^2$, получим
Следовательно, вершина уголка движется по параболе $y =$ траектория движения уголка. Причем при изменении a от $+\infty$ абсцисса x_0 меняется от $-\infty$ до $+\infty$, следовательно, C уголка движется по параболе $y = x^2$ слева направо.

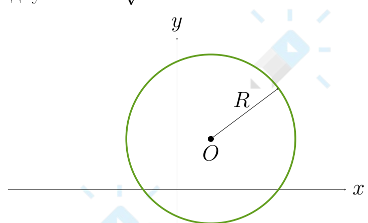


Окружность

Рассмотрим уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a \quad (*)$$

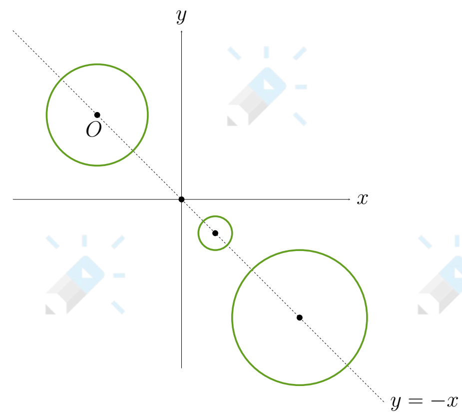
При $a < 0$ это уравнение задает пустое множество, так как сумма квадратов двух выражений неотрицательна, то есть $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geqslant 0$, следовательно, не может быть равна отрицательному числу.
При $a = 0$ это уравнение задает на координатной плоскости xOy единственную точку $O(x_0; y_0)$.
При $a > 0$ это уравнение задает окружность с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$.



Рассмотрим несколько примеров.
• Пусть дано уравнение $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$. В этом уравнении есть слагаемые x^2 и y^2, причем взятые с одинаковым знаком, следовательно, это уравнение можно привести к виду $(*)$. Для этого выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 - 8y + 16) - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

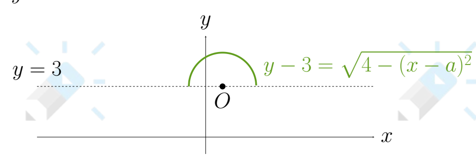
Следовательно, это уравнение задает окружность с центром в точке $O(3; 4)$ и радиусом $R = 5$.
• $(x - 2a)^2 + (y + 2a)^2 = a^2$. Данное уравнение при $a = 0$ задает точку $O(0; 0)$, а при $a \neq 0$ задает окружность с центром в точке $O(2a; -2a)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2} = |a|$. Заметим, что центр окружности, как и радиус, зависит от параметра. Центр окружности имеет координаты $x_0 = 2a$ и $y_0 = -2a$, следовательно, движется по прямой $y = -x$. При изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ центр окружности движется по прямой слева направо, причем чем ближе центр окружности к началу координат (то есть чем ближе a по модулю к значению 0), тем меньше



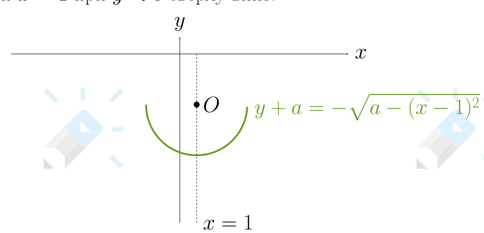
• $y - 3 = \sqrt{4 - (x - a)^2}$. Это уравнение равносильно

$$\begin{cases} y - 3 \geqslant 0 \\ (x - a)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{cases}$$

Следовательно, оно задает верхнюю полуокружность с центром в точке $O(a; 3)$ и радиусом $R = 2$. Центр полуокружности «скользит» по прямой $y = 3$.



• $y + a = -\sqrt{a - (x - 1)^2}$. Это уравнение при $a < 0$ задает пустое множество, при $a = 0$ задает точку $O(1; 0)$, при $a > 0$ задает нижнюю полуокружность с центром в точке $O(1; -a)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$. Заметим, что при изменении a от 0 до $+\infty$ радиус полуокружности увеличивается, а центр полуокружности «скользит» по прямой $x = 1$ при $y < 0$ сверху вниз.



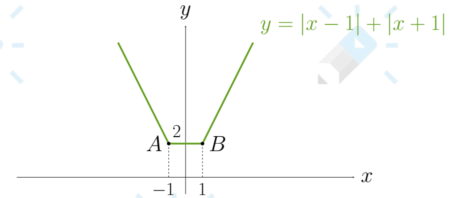
«Корыто»

Рассмотрим функцию

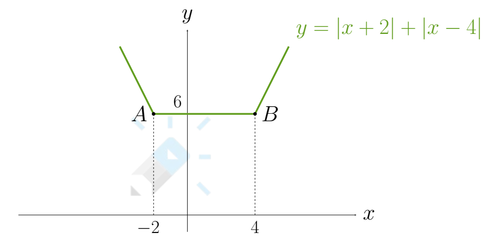
$$y = |x - 1| + |x + 1|.$$

Раскроем модули.

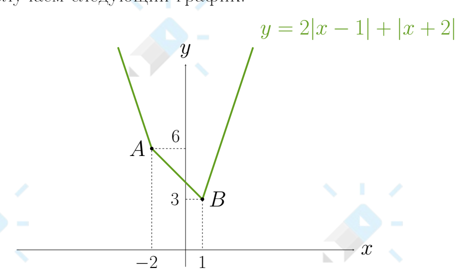
График этой функции выглядит следующим образом:



Отрезок AB, находящийся на «высоте» 2, называют «дном к
оно горизонтально, то есть параллельно оси абсцисс. Ветви
имеют наклон 2 и -2, то есть параллельны прямым $y = 2$
$-2x$.
Рассмотрим еще примеры.
• $y = |x + 2| + |x - 4|$. Дно корыта горизонтально, так
эффициенты перед x у модулей равны. Оно находится на
$|2| + |-4| = 6$ при $-2 \leqslant x \leqslant 4$. Ветви корыта имеют н
и -2. Следовательно, график функции выглядит следующи
зом:



• $y = 2|x - 1| + |x + 2|$. Заметим, что в зависимости от т
раскроется первый модуль, функция будет возрастающей или
ющей (так как коэффициент перед x у первого модуля больш
$x \geqslant 1$ получим линейную функцию, коэффициент перед x
рой будет положительный, при $x < 1$ получим линейную фу
коэффициент перед x у которой будет отрицательный. Следо
но, графиком этой функции будет «корыто» с «кривым дном»
имеют наклон 3 и -3, дно корыта: при $-2 \leqslant x \leqslant 1$, имеет
-1. Получаем следующий график:

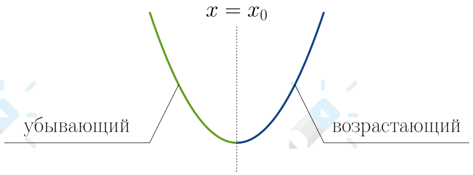


Объединение двух кусков парабол

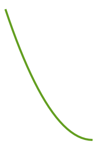
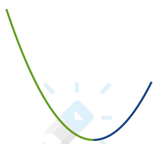
Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 + (4+2a)x - 8|x| - (a^2+4a)$.
Раскроем $|x|$. Получим

$$f(x) = \begin{cases} f_1 = 3x^2 + (2a+12)x - (a^2+4a), x < 0 \\ f_2 = 3x^2 + (2a-4)x - (a^2+4a), \ \ x \geqslant 0 \end{cases}$$

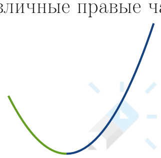
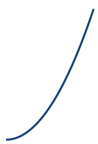
Таким образом, графиком функции $y = f(x)$ является объединение части параболы $y = f_1(x)$ при $x < 0$ (то есть левой части) и части параболы $y = f_2(x)$ при $x \geqslant 0$ (то есть правой части). Причем заметим, что параболы $y = f_1$ и $y = f_2$ пересекаются при $x = 0$, то есть эти части парабол «сходятся» в одной точке.
Рассмотрим произвольную параболу



Вертикальная прямая $x = x_0$, проходящая через вершину параболы, делит ее на два куска: убывающий и возрастающий.
Следовательно, мы можем взять две различные левые части:

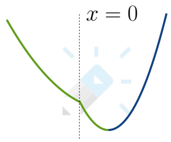



и две различные правые части:

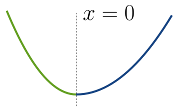
Обозначим за x_1 абсциссу вершины параболы $y = f_1$, за x_2 — абсциссу вершины параболы $y = f_2$.
Комбинируя какую-то левую часть с какой-то правой частью, мы получим, что график функции $y = f(x)$ может принимать один из четырех видов:

Взяли убывающий кусок левой части и убывающе-возрастающий кусок правой части:



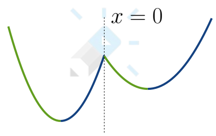
В этом случае $x = 0 < x_1$ и $x = 0 < x_2$.

Взяли убывающий кусок левой части и возрастающий кусок правой части:



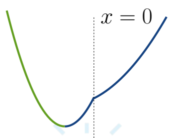
В этом случае $x = 0 < x_1$ и $x = 0 > x_2$.

Взяли убывающе-возрастающий кусок левой части и убывающе-возрастающий кусок правой части:



В этом случае $x = 0 > x_1$ и $x = 0 < x_2$.

Взяли убывающе-возрастающий кусок левой части и возрастающий кусок правой части:



В этом случае $x = 0 > x_1$ и $x = 0 > x_2$.

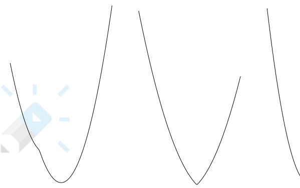
Задача из сборника Ященко 2023, Вариант 1

Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

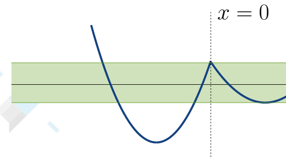
$$(a-x)^2 + 4a + 1 = (2x+1)^2 - 8|x|$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение: Перепишем уравнение в
$3x^2 + (4+2a)x - 8|x| - ($
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1 = 3x^2 + (2a+12)x \\ f_2 = 3x^2 + (2a-4)x - \end{array} \right.$
График полученной совокупност
объединение части параболы y
$x < 0$, и части параболы $y = f_2$
0. Следовательно, может получ
картинок:



Где бы ни находилась ось абсцисс
4, график будет иметь максимум
с этой осью. Следовательно, ис
иметь максимум два корня. Нам



Этот рисунок задается следующи
$x_1 < 0 < x_2$.
Ось абсцисс должна находиться
прямой l_1 и прямой l_2. Это зна
должны пересекать ось абсцисс (
находиться выше l_1) и значение
быть положительно (тогда ось абс
l_2). Следовательно, дискриминант
$f_1(0) = f_2(0) > 0$.
В итоге получаем следующую си

$$\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \\ f_1(0) = f_2(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Отрезок

Рассмотрим уравнение
$$\sqrt{x^2+(y-12)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{a^2+144}.$$
Выясним, какой график на плоскости xOy оно задает. Вспомним, каким выражением задается расстояние между двумя точками на плоскости. Если у нас имеются две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, то расстояние между ними равно выражению
$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$
Вернемся к нашему уравнению. Рассмотрим точки $A(0;12)$, $B(a;0)$ и $M(x;y)$. Тогда мы имеем
$$MA=\sqrt{x^2+(y-12)^2}$$
$$MB=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$
$$AB=\sqrt{a^2+144}$$
Следовательно, наше уравнение имеет вид
$$MA+MB=AB$$
и говорит нам о том, что сумма длин отрезков MA и MB равна длине отрезка AB. Из точек A, B и M точки A и B фиксированы (да, одна координата точки B зависит от параметра, но при зафиксированном значении параметра точка B имеет конкретное фиксированное положение на плоскости xOy), а вот координаты точки M не определены на плоскости. Следовательно, нам нужно понять, где может находиться на плоскости точка M, чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B была равна длине отрезка AB. Множество положений точки M как раз и задаст нам тот график, который описывается нашим уравнением.

Есть три принципиально различных положения точки M относительно двух точек A и B :

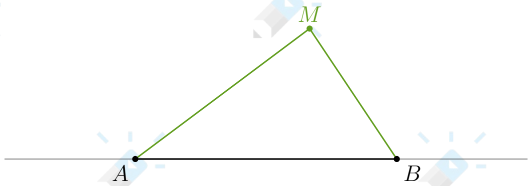
— точка M может находиться вне прямой AB;

— точка M может находиться на прямой AB, но вне отрезка AB;

— точка M может находиться на отрезке AB.

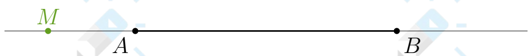
Эти три ситуации мы и рассмотрим по отдельности и определим, может ли точка M находиться в каждом из таких положений или нет.

- Пусть M не лежит на прямой AB.



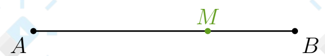
Тогда точки A, B и M образуют треугольник AMB. Мы знаем, что в любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны. Следовательно, для $\triangle AMB$ верно неравенство
$$MA+MB>AB.$$
Это неравенство противоречит нашему равенству $MA+MB=AB$. Следовательно, точка M не может лежать вне прямой AB.

- Пусть M лежит на прямой AB, но вне отрезка AB.



Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит на продолжении отрезка AB за точку A. Тогда по свойству длин отрезков мы получаем
$$MB-MA=AB.$$
Это равенство также не соответствует нашему равенству $MA+MB=AB$. Следовательно, точка M не может лежать на прямой AB вне отрезка AB.

- Пусть точка M лежит на отрезке AB.

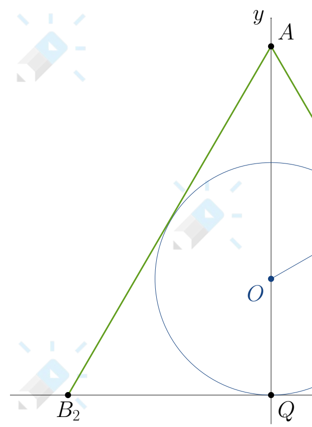


Тогда по свойству длин отрезков мы получаем, что
$$MA+MB=AB.$$
Мы получили в точности то равенство, которое и имели. Учитывая, что мы взяли точку M в произвольном месте на отрезке AB, получаем, что наше равенство задает множество точек M, «путешествующих» по отрезку AB (естественно, точка M может совпасть с любой из точек A или B).

Задача из сборника Шестако

Задача: Найдите все значения па
из которых система
$$\begin{cases} x^2+(y-4)^2=16 \\ \sqrt{x^2+(y-12)^2}+\sqrt{(x-a) \end{cases}$$
имеет единственное решение.

Решение: Первое равенство задает
в точке $O(0;4)$ и радиусом $R=4$
Рассмотрим второе уравнение.
$A(0;12)$, $B(a;0)$, $M(x;y)$. Тогда
вид $AM+MB=AB$, следовате
ство точек M, находящихся на от
конец B отрезка движется по оси
значений параметра a.
Следовательно, необходимо, что
точку пересечения с окружность
симметрична относительно оси ор
на оси ординат, то положения A
гда он касается окружности, сим
оси ординат. Тогда если положен
$a=a_1$, то положению AB_2 со
Рассмотрим только случай $a>0$



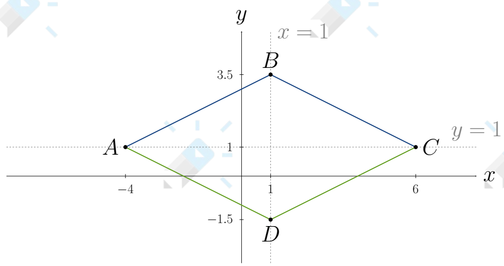
$\triangle AQB_1\sim\triangle AKO$, следователь
$$\frac{QB_1}{OK}=\frac{AQ}{AK}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a}{4}=$$

Ромб и квадрат как его частный случай

Рассмотрим уравнение
$$|x-1|+2|y-1|=5.$$
Перепишем это уравнение в виде
$$|y-1|=\frac{1}{2}(5-|x-1|)\,.$$
Построим в системе координат xOy график этого уравнения. Для этого раскроем модуль $|y-1|$:

- если $y-1\geqslant 0$, то $|y-1|=y-1$, следовательно, уравнение примет вид
$$y=\frac{1}{2}(5-|x-1|)+1;$$
- если $y-1<0$, то $|y-1|=-(y-1)$, следовательно, уравнение примет вид
$$y=-\frac{1}{2}(5-|x-1|)+1.$$

Следовательно, выше прямой $y=1$ мы должны нарисовать часть уголка $y_1=\frac{1}{2}(5-|x-1|)+1$, а ниже прямой $y=1$ — часть уголка $y_2=-\frac{1}{2}(5-|x-1|)+1$.



Так как ветвь AB уголка y_1 параллельна ветви CD уголка y_2, а ветвь BC уголка y_1 параллельна ветви DA уголка y_2, то мы получаем, что $ABCD$ — ромб.
Заметим, что диагонали AC и BD этого ромба лежат на прямых $x=1$ и $y=1$, то есть нулях подмодульных выражений.

Если записать уравнение ромба $ABCD$ в виде
$$a|x-x_0|+b|y-y_0|=c,$$
то $\dfrac{c}{a}$ — длина половины диагонали AC, а $\dfrac{c}{b}$ — длина половины диагонали BD. Точка пересечения прямых

Задача с ромбом

Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}|x-a|+2|y-a|=5\\ xy-x-y+1=0\end{cases}$$
имеет ровно три различных решения.

Решение: Преобразуем второе равенство системы:
$$x(y-1)-(y-1)=0\Leftrightarrow(y-1)(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ y=1\end{array}\right.$$
Следовательно, второе равенство системы задает объединение двух прямых: $x=1$ и $y=1$.
Рассмотрим первое равенство. При $y\geqslant a$ оно равносильно $y=-\frac{1}{2}|x-a|+\frac{5}{2}+a$, при $y<a$ равносильно $y=\frac{1}{2}|x-a|-\frac{5}{2}+a$. Следовательно, оно задает ромб $ABCD$, у которого:

- точка пересечения диагоналей AC и BD — пересечение прямых $x=a$ и $y=a$, то есть точка $O(a;a)$, которая движется по прямой $y=x$;
- $OC=5\quad\Rightarrow\quad AC=10,\ OB=\frac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad BD=5$;
- диагонали AC и BD параллельны осям координат.

Заметим, что траектория движения точки O является биссектрисой углов, образованных пересечением прямых $x=1$ и $y=1$, следовательно, расстояния от точки O (где бы они на находилась на прямой $y=x$) до прямых $x=1$ и $y=1$ одинаковы. Тогда, так как точка C находится на большем расстоянии от точки O, чем точка B, то при перемещении точки O по прямой $y=x$ снизу вверх ромб $ABCD$ сначала пересечет прямую $x=1$, а затем уже прямую $y=1$.
Тогда распишем те положения ромба $ABCD$ относительно прямых $x=1$ и $y=1$, когда он имеет с ними 3 общие точки.
Рис. 1: вершина B лежит на прямой $y=1$. Так как вершина B имеет координаты $\left(a;a+\frac{5}{2}\right)$, то $a+\frac{5}{2}=1$, откуда $a=-\frac{3}{2}$.

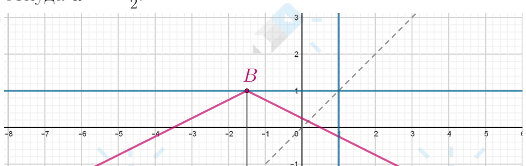


Рис. 2: точка пересечения прямых … стороне BC ромба. Сторона BC … уголка $y=-\frac{1}{2}|x-a|+\frac{5}{2}+a$, то ес… $a)+\frac{5}{2}+a$, следовательно, точка (1… уравнению:
$$1=-\frac{1}{2}(1-a)+\frac{5}{2}+a$$

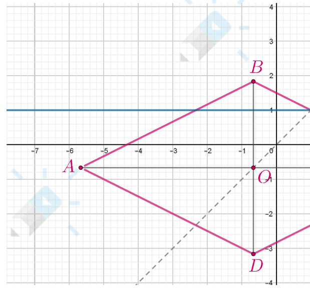


Рис. 3: точка пересечения прямы… на стороне AD ромба. Сторона A… уголка $y=\frac{1}{2}|x-a|-\frac{5}{2}+a$, то ес… $a)-\frac{5}{2}+a$, следовательно,
$$1=-\frac{1}{2}(1-a)-\frac{5}{2}+a$$

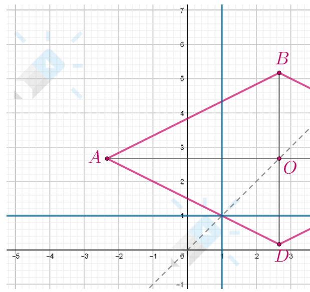
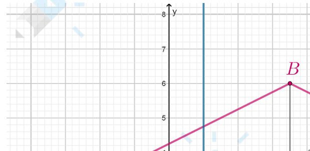


Рис. 4: вершина D лежит на пр… вершина D имеет координаты (… откуда $a=\frac{7}{2}$.



Касание прямой и параболы через производную

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых касаются друг друга графики функций

$$y = x^2 + 5 \quad \text{и} \quad y = ax + a^2$$

Решение. Графиком функции $y_1 = x^2 + 5$ является парабола. Графиком функции $y_2 = ax + a^2$ при каждом фиксированном a является прямая. Зададим с помощью производной условия касания прямой и параболы в точке с абсциссой x_0 :

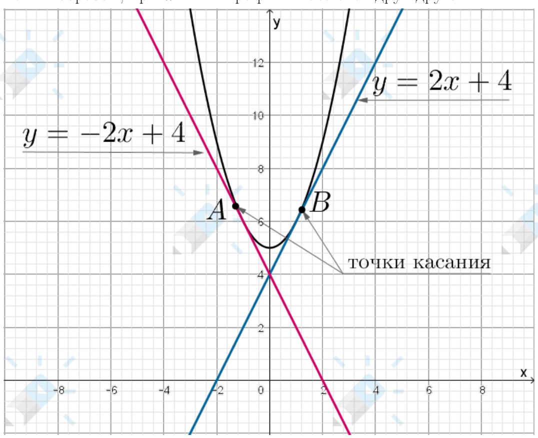
$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases}$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} x_0^2 + 5 = ax_0 + a^2 \\ 2x_0 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 5 = 2x_0^2 + 4x_0^2 \\ 2x_0 = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = 1 \\ a = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = -1 \\ a = -2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, при $a = \pm 2$ графики касаются друг друга.



Ответ: $a \in \{-2; 2\}$

Касание прямой и параболы через уравнение

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = (x - a)^2 + 3a \\ y = 2ax \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Система имеет единственное решение, когда прямая $y_2 = 2ax$ касается параболы $y_1 = (x-a)^2 + 3a$. Так как при каждом фиксированном a прямая $y_2 = 2ax$ невертикальная (уравнение вертикальной прямой, то есть прямой, параллельной оси ординат, выглядит как $x = b$), то прямая y_2 и парабола y_1 касаются друг друга в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$y_1(x_0) = y_2(x_0)$$

имеет единственное решение.

Таким образом, уравнение

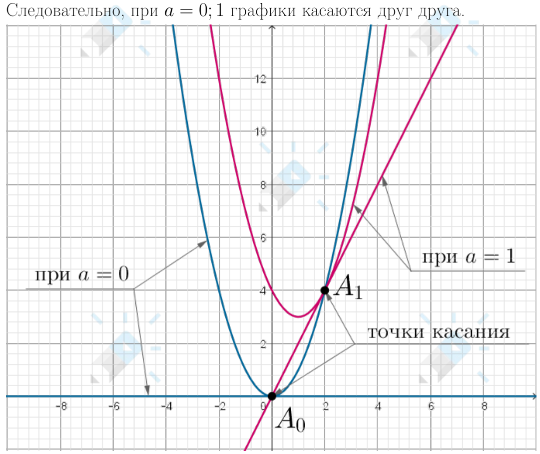
$$(x_0 - a)^2 + 3a = 2ax_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2 - 4ax_0 + a^2 + 3a = 0$$

должно иметь единственное решение, следовательно, его дискриминант должен быть равен нулю.

Имеем:

$$D = 4(3a^2 - 3a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0; 1$$

Следовательно, при $a = 0; 1$ графики касаются друг друга.



Ответ: $a \in \{0; 1\}$

Касание прямой и окружности ... расстояния

Задача. Найдите все значения параметра a, ...
система

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 9 \\ -ax + y + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Графиком первого уравнения ...
центром в точке $O(1; 0)$ и радиусом R = ...
уравнения при каждом фиксированном a я...
Система имеет единственное решение, ...
окружности.

По определению прямая является каса...
если расстояние от центра окружности д...
окружности:

$$\rho(O, l) = R$$

Воспользуемся формулой поиска расстояни...
прямой l, заданной уравнением $Ax + By +$ ...

$$\rho(O, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 \ldots}{\sqrt{A^2 + B \ldots}}$$

Тогда в нашем случае это расстояние дол...
Следовательно, имеем:

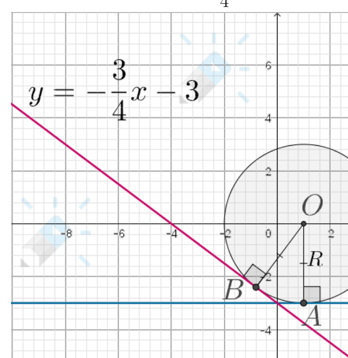
$$\rho(O, l) = \frac{|-a + 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$$

$$3\sqrt{a^2 + 1} = |a - 3| \quad \Leftrightarrow$$

$$9a^2 + 9 = a^2 - 6a + 9$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -\dfrac{3}{4} \end{array} \right.$$

Следовательно, при $a = -\frac{3}{4}; 0$ графики кас...



A, B — точки касания

Касание прямой и окружности через геометрию

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

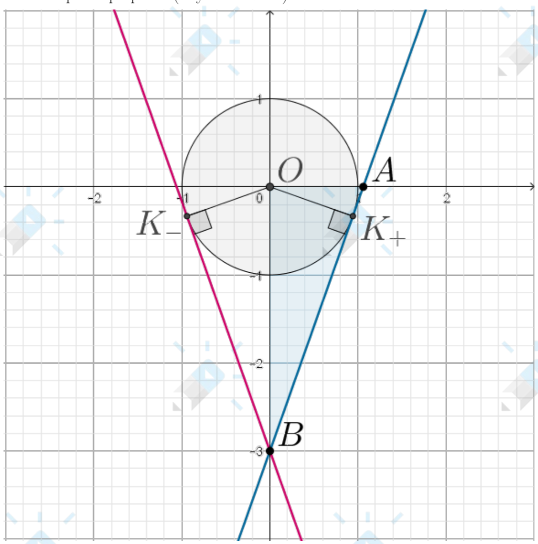
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=ax-3 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Графиком первого уравнения является окружность с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R = 1$. Графиком второго уравнения является пучок прямых, проходящих через точку $B(0;-3)$, а при каждом фиксированном a графиком является прямая AB, где A — точка пересечения прямой с осью абсцисс.

Система имеет единственное решение, если прямая касается окружности.

Рассмотрим графики (случай $a>0$):



Пусть K_+ — точка касания прямой и окружности. Тогда мы имеем прямоугольный $\triangle AOB$, в котором OK_+ — радиус, проведенный в точку касания, следовательно, OK_+ — высота этого треугольника, проведенная к гипотенузе. По свойству прямоугольного треугольника мы знаем, что

$$OK_+\cdot AB = OA\cdot OB$$

Найдем эти отрезки. Чтобы найти отрезки OA и OB, надо найти точки пересечения прямой AB с осями координат:

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad y=-3 \quad\Rightarrow\quad OB=3$$

$$y=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{a} \quad\Rightarrow\quad OA=\frac{3}{a}$$

Касание прямой и окружности через уравнение

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых прямая

$$y=x-2a$$

касается окружности

$$(x-a)^2+(y+2a)^2=4$$

Решение. Графики касаются друг друга, когда система

$$\begin{cases} y=x-2a \\ (x-a)^2+(y+2a)^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Выразим y из первого уравнения и подставим во второе уравнение. Тогда полученное уравнение

$$(x-a)^2+(x-2a+2a)^2=4$$

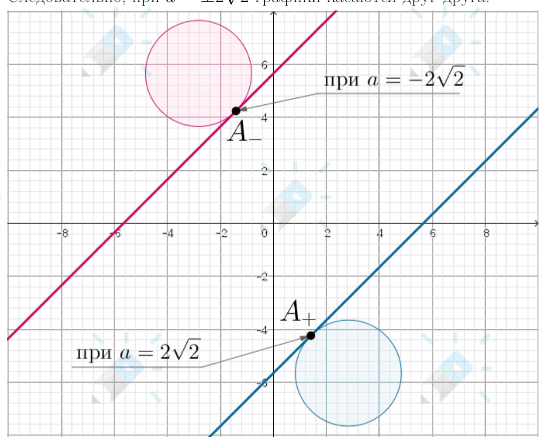
должно иметь единственное решение. Преобразуем его:

$$2x^2-2ax+a^2-4=0$$

Получили квадратное уравнение, которое имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. Следовательно,

$$D=-4(a^2-8)=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=\pm2\sqrt{2}$$

Следовательно, при $a=\pm2\sqrt{2}$ графики касаются друг друга.



Ответ: $a\in\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$

Касание прямой и окружности ч

Задача. Найдите все значения параметра a,
система

$$\begin{cases} x^2+(y-3a)^2=1 \\ y=ax \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Графиком первого уравнения
центром в точке $O(0;3a)$ и радиусом R
уравнения является пучок прямых, проход
а при каждом фиксированном a графиком
Система имеет единственное решение,
окружности.

Верхнюю и нижнюю полуокружности м
функции:

верхняя: $y_{up}=\sqrt{1-x^2}$

нижняя: $y_{down}=-\sqrt{1-}$

Запишем условия касания прямой и графи
$x=x_0$ через производную:

$$\begin{cases} y_{up}(x_0)=y(x_0) \\ y'_{up}(x_0)=y'(x_0) \end{cases}$$

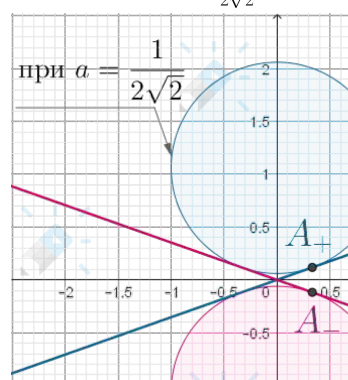
Тогда имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x_0^2}+3a=ax_0 \\ -\dfrac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}=a \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

Получаем $x_0=\dfrac{1}{3}$ и $a=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Записав аналогичную систему для прямой и
y_{down}, получим $x_0=\dfrac{1}{3}$ и $a=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Следовательно, при $a=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ графики ка



Касание прямой и параболы

Пусть дана система ($a \neq 0$)

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + n \end{cases}$$

и требуется записать условия, при которых система имеет единственное решение.

Это равносильно тому, что требуется записать условия, при которых прямая $y_1 = kx + n$ касается параболы $y_2 = ax^2 + bx + c$.

Существуют два способа.

- Условие касание прямой и графика произвольной функции можно записать с помощью производной. Если x_0 — абсцисса точки касания прямой и параболы, то выполнена система

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} kx_0 + n = ax_0^2 + bx_0 + c \\ k = 2ax_0 + b \end{cases}$$

Выразив x_0 из второго уравнения и подставив в первое, мы получим уравнение, в котором будут участвовать только a, b, c, k, n.

- Так как графиком $y_1 = kx + n$ является невертикальная прямая, то условие касания прямой и параболы равносильно условию наличия единственной точки пересечения прямой и параболы. Для этого необходимо потребовать, чтобы уравнение

$$y_1 = y_2 \quad \Leftrightarrow \quad kx + n = ax^2 + bx + c$$

имело единственное решение. Так как уравнение квадратное, то дискриминант этого уравнения должен быть равен нулю. Так мы получим уравнение, в котором будут участвовать только a, b, c, k, n.

Касание прямой и параболы через производную

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \log_3(y-3) - 2\log_9 x = 0 \\ (x+a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x > 0 \\ y = \frac{1}{2}(x+a)^2 - \frac{5}{2}a \end{cases}$$

График $y = \frac{1}{2}(x+a)^2 - \frac{5}{2}a$ представляет собой параболу $y = \frac{1}{2}x^2$, вершина которой сдвинута в точку $O\left(-a; -\frac{5}{2}a\right)$, то есть движется по прямой $y = \frac{5}{2}x$ справа налево при увеличении a.

Действительно, для того, чтобы найти траекторию движения параболы, необходимо связать между собой абсциссу x и ординату

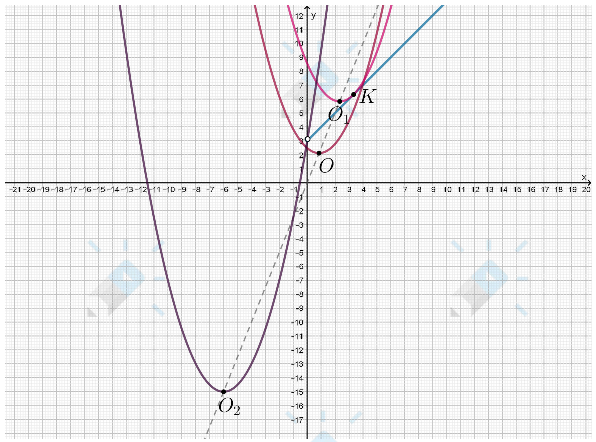
Графиком системы

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

является луч k прямой с началом в точке $(0;3)$, находящийся в I четверти. Заметим, что положение луча не зависит от параметра.

Таким образом, требуется найти те a, при которых луч k имеет точки пересечения с параболой. Так как прямая и парабола могут иметь максимум две точки пересечения, то требуется найти те a, при которых луч k имеет 1 или 2 точки пересечения с параболой.

Граничные положения параболы, при которых она имеет хотя бы одну общую точку с лучом k, показаны на рисунке (параболы с вершинами в точках O_1 и O_2):



Действительно. Пусть a меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда сначала парабола находится выше луча и не имеет с ним общих точек, затем, когда вершина параболы находится в точке O_1, она касается луча в точке K, затем парабола имеет две точки пересечения с лучом, затем одну (например, парабола с вершиной O на рисунке) до тех пор, пока вершина параболы не окажется в точке O_2, когда правая ветвь параболы будет проходит через начало луча — точку $(0;3)$.

«Положение O_1»: парабола касается луча в точке K. Запишем условие касания параболы $y = \frac{1}{2}(x+a)^2 - \frac{5}{2}a$ и прямой $y_k = x + 3$ в точке $K(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_k(x_0) \\ y'(x_0) = y_k'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x_0+a)^2 - \frac{5}{2}a = x_0 + 3 \\ x_0 + a = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = -\frac{7}{3}$$

«Положение O_2»: парабола правой ветвью проходит через точку $(0;3)$:

$$3 = \frac{1}{2}(0+a)^2 - \frac{5}{2}a \quad \Leftrightarrow \quad a = -1;6$$

Касание прямой и параболы через дискрими

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом
уравнение

$$|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x - a| + 3$$

имеет ровно три различных корня.

Решение. Рассмотрим функции $f_1 = |(x+1)^2 - 4|$, $f_2 = |$
$2a$. Тогда уравнение имеет вид $f_1 = f_2$, следовательно, н
чтобы графики этих функций имели три точки пересечен
График $f_1 = |(x+1)^2 - 4|$ (назовем его «птичка
последовательно так:
$x^2 \xrightarrow{\text{сдвиг на 1 влево и на 4 вниз}} (x+1)^2 - 4$ отражение нижней части
$1)^2 - 4|$

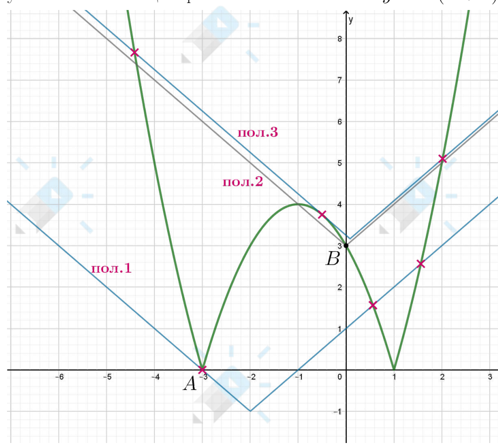
Вершина уголка f_2 — точка $O(a; 2a+3)$, следовательно, он
по прямой $y = 2x + 3$.

Граничные положения:

положение 1. точно три точки пересечения: если левая ве
проходит через точку $A(-3;0)$;

положение 2. возможно, три точки пересечения: если верш
находится в точке $B(0;3)$ (точка пересечения птички с т
движения уголка);

положение 3. возможно, три точки пересечения: если л
уголка касается центральной части птички $y = -(x+1)$



Исследуем эти три положения. Левая ветвь уголка имеет
$-x + 3a + 3$, $x < a$.

1 Координаты точки $A(-3;0)$ удовлетворяют уравнению
$f_{left} = -x + 3a + 3$:

$$0 = 3 + 3a + 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2$$

2 Координаты точек $O(a; 2a+3)$ и $B(0;3)$ совпадают, то
$a = 0$. Тогда точно есть две точки пересечения (с ветвя

При $a=0$ левая ветвь уголка задается уравнением $f_{left,0}=-x+3$, $x<0$, следовательно, необходимо найти количество решений системы

$$\begin{cases} y=-x+3, \ x<0 \\ y=-(x+1)^2+4, \ -3<x<1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$$

Таким образом, есть общая точка с абсциссой $x=-1$ и всего точек пересечения четыре, значит, это положение нам не подходит. Двигая уголок выше вплоть до касания (положения 3), мы получаем также четыре точки пересечения .

3. Запишем условие касания центральной части птички $f_c=-(x+1)^2+4$, $-3<x<1$, и левой ветви уголка $f_{left}=-x+3a+3$, $x<a$. Дискриминант уравнения

$$\begin{aligned} &f_c=f_{left} \quad \Rightarrow \\ &-(x+1)^2+4=-x+3a+3 \quad \Leftrightarrow \\ &x^2+x+3a=0 \end{aligned}$$

должен быть равен нулю:

$$D=1-4\cdot 3a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=\frac{1}{12}$$

Заметим, что в этом случае

$$x=-\frac{1}{2}$$

удовлетворяет условиям $-3<x<1$ и $x<a=\frac{1}{12}$.

Двигая уголок выше, мы получаем две точки пересечения.

Ответ: $a\in\left\{-2;\dfrac{1}{12}\right\}$

Касание прямой и окружности

Пусть дана система $(R>0)$

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

и требуется записать условия, при которых система имеет единственное решение.

Это равносильно тому, что требуется записать условия, при которых прямая $l: ax+by+c=0$ касается окружности $C: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ с центром в точке $O(x_0;y_0)$ радиуса R. Существует четыре способа.

- С помощью формулы расстояния от точки $O(x_0;y_0)$ до прямой $l: ax+by+c=0$:

$$\rho(O,l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Этот способ основывается на определении касательной к окружности: если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая является касательной к окружности.

- Геометрический способ, в котором нам понадобится тригонометрия, угловой коэффициент прямой (и знание о том, что он равен тангенсу угла наклона прямой), свойства прямоугольного треугольника и его высоты, проведенной к гипотенузе.

Этот способ основывается на том, что радиус, проведенный в точку касания окружности и касательной, перпендикулярен касательной.

- Через уравнение. Выразив x или y из уравнения прямой $ax+by+c=0$ и подставив в уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, мы получим уравнение, от которого требуется единственность решения.
- Через производную. Пусть мы знаем две вещи:

1) прямая касается верхней или нижней полуокружности;
2) прямая не является вертикальной, то есть можно выразить y через x.

Тогда можно записать уравнение, задающее нужную полуокружность:

$$\text{верхняя:} \quad y=f(x)=\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}+y_0$$
$$\text{нижняя:} \quad y=f(x)=-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}+y_0$$

и задать условия касания графика функции $y=f(x)$ и прямой l, записанной в виде $y_l=-\frac{1}{b}(ax+c)$, в точке $K(x;y)$:

$$\begin{cases} f(x)=y_l(x) \\ f'(x)=y_l'(x) \end{cases}$$

Касание прямой и окружности через форм… расстояния

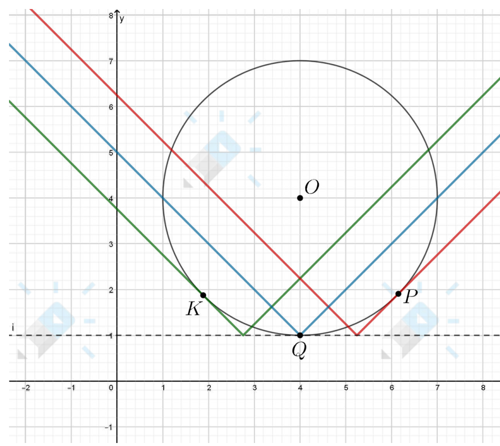
Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом … система уравнений

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-4)^2=9 \\ y=|x-a|+1 \end{cases}$$

имеет три различных решения.

Решение. Первое уравнение задает окружность с центр… и радиусом $R=3$. Второе уравнение задает уголо… которого движется по прямой $y=1$ (заметим, что … касается окружности). Причем при изменении a от … уголок движется слева направо. Три общие точки будут в … положениях:

- касание в точке K левой ветви уголка и окружности;
- вершина уголка находится в точке Q касания окружнос… прямой $y=1$;
- касание в точке P правой ветви уголка и окружности.



Если прямая касается окружности, то условие на это мо… с помощью формулы расстояния от точки до прямой… окружности это расстояние должно быть равно радиусу о… Для центра окружности $(x_0;y_0)$ радиусом R и прямой l, … уравнением $Ax+By+C=0$, получим

$$\rho(O,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R$$

Следовательно, так как левая ветвь уголка задается … $y_{left}=-x+a+1$, то есть $y_{left}+x-a-1=0$, правая ве… задается уравнением $y_{right}=x-a+1$, то есть $y_{right}-x-$… то получаем

$$K: \quad 3=\frac{|4+4-a-1|}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad a=7\pm 3\sqrt{2}$$

Для точки K нужно выбрать меньшее значение параметра (так как существует еще одно положение, когда левая ветвь касается окружности, и оно правее нужного нам положения), для точки P — большее значение параметра (по аналогичным причинам). Вершина уголка находится в точке $Q(4;1)$, если $a = 4$.
Ответ: $a \in \{7-3\sqrt{2};\ 4;\ 1+3\sqrt{2}\}$

Касание прямой и окружности через геометрию

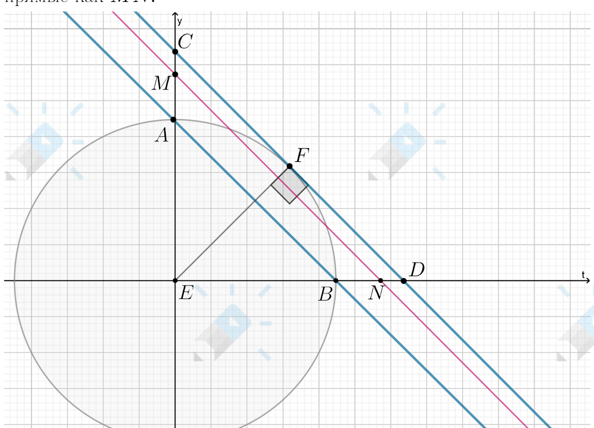
Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y = |a+1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.
Решение. Пусть $x^2 = t$, тогда $t < 0$ не дает решений x, $t = 0$ дает одно решение $x = 0$, $t > 0$ дает два различных решения x. Система примет вид

$$\begin{cases} t^2 + y^2 = a^2 \\ t + y = |a+1| \end{cases}$$

Первое уравнение задает либо точку, либо окружность. Случай с точкой не подходит, потому как тогда система максимум может иметь одно решение (одно решение, если точка удовлетворяет второму уравнению, и не имеет решений в противном случае).
Тогда нужно рассмотреть только случай, когда первое уравнение задает окружность с радиусом $R = |a|$, $a \neq 0$, а второе — прямую, задаваемую уравнением $y = -t + |a+1|$. Окружность с прямой могут иметь 0, 1 или 2 точки пересечения. Следовательно, чтобы после обратной замены мы получили четыре решения, необходимо, чтобы прямая имела с окружностью две точки пересечения, абсциссы t которых положительны.
Нам подходят все прямые между AB и CD. Обозначим такие прямые как MN.



Выше прямой AB : $|a+1| = EM > EA = R = |a|$.
Действительно, прямая $l : y = -t + |a+1|$ пересекает ось ординат в точке $(0; |a+1|)$, то есть для произвольной прямой MN отрезок $EM = |a+1|$. Заметим также, что прямая AB проходит через точки пересечения окружности с положительными полуосями координат, то есть $EA = R = |a|$. Так как прямая MN находится выше прямой AB, то $EM > EA$. Отсюда $|a+1| > |a|$.
Ниже прямой CD : $|a+1| = EM < EC = CD : \sqrt{2} = 2EF : \sqrt{2} = \sqrt{2}R = \sqrt{2}|a|$.
Действительно, как мы уже сказали выше, $EM = |a+1|$. Рассмотрим $\triangle ECD$. Он прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $CD = EC\sqrt{2}$. Отрезок EF — радиус окружности, проведенный в точку касания F, то есть высота треугольника ECD, проведенная к гипотенузе. Следовательно, она является и медианой. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, отсюда $CD = 2EF$. Но EF — радиус, следовательно, $EF = R = |a|$. Так как прямая MN находится ниже прямой CD, то $EM < EC$. Отсюда $|a+1| < \sqrt{2}|a|$.

Следовательно,

$$|a| < |a+1| < |a|\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < (a+1)^2 < 2a^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a+1)^2 > a^2 \\ (a+1)^2 < 2a^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a < 1-\sqrt{2} \\ a > 1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-0,5; 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; +\infty)$

Касание прямой и окружности через уравнение

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(x+2y) = 5 - 5a^2 \\ y + \dfrac{1}{2}x = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.
Решение. Преобразуем первое уравнение:

$$x^2 + y^2 - 2a(x+2y) = 5 - 5a^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + a^2 + 4a^2 = 5$$
$$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 5$$

Оно задает окружность с центром в точке $O(a; 2a)$ и радиусом $\sqrt{5}$.
Второе уравнение системы задает прямую $y = -0,5x$. Система будет иметь единственное решение в том случае, если прямая и окружность касаются друг друга. Выразим x из уравнения прямой, получим $x = -2y$, и подставим в исходное уравнение окружности. Получим уравнение

$$(-2y)^2 + y^2 - 2a(-2y+2y) = 5 - 5a^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - a^2,$$

которое должно иметь единственное решение, что выполняется, если

Касание прямой и окружности через произво

Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом
система

$$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 4 \\ y = ax - 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.
Решение: Первое уравнение системы задает окружность с
точке $(0; a)$ радиуса $R = 2$. Второе уравнение задает пуч
проходящих через точку $(2; 0)$.
Прямая может касаться как верхней, так и нижней полуок
Определим те a, при которых $y = ax - 2a$ касается кажд
частей, через производную.

Касание с верхней полуокружностью, которая задается у

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} + a,$$

задается системой

$$\begin{cases} f(x) = y(x) \\ f'(x) = y'(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{4-x^2} + a = ax - 2 \\ -\dfrac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = a \end{cases}$$

Подставив a из второго уравнения в первое, получаем:

$$\sqrt{4-x^2} = -\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = -x^2 +$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Тогда $a = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Касание с нижней полуокружностью, которая задается у

$$g(x) = -\sqrt{4-x^2} + a,$$

задается системой

$$\begin{cases} g(x) = y(x) \\ g'(x) = y'(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} + a = ax - \\ \dfrac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = a \end{cases}$$

Подставив a из второго уравнения в первое, получаем:

$$-\sqrt{4-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad -4 + x^2 = x^2$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Тогда $a = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $a \in \left\{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right\}$
Заметим, что для этого способа рисунок не обязателен.

Суть метода xOa

Пусть дано уравнение, неравенство или система, зависящие от переменной x и параметра a.
Рассмотрим параметр a как переменную (точнее, как ординату, то есть как в обычных задачах мы рассматриваем переменную y). Построим в системе координат xOa множество S решений уравнения/неравенства/системы. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из решений уравнения/неравенства/системы.
Примеры условий задачи для системы:
- Найти a, при которых система имеет n решений.

Тогда нам требуется найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых n точек вида $(x_0; a_0)$ принадлежат множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет n точек пересечения с множеством S.
- Найти a, при которых множество решений системы принадлежит промежутку U.

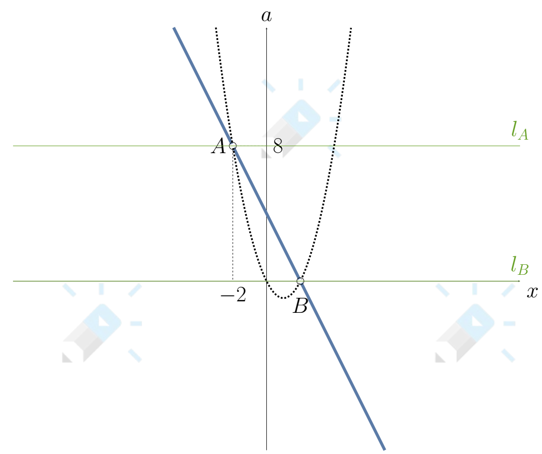
Тогда нам требуется найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых точки вида $(x_0; a_0)$, принадлежащие множеству решений S, изображенному на плоскости xOa, имеют абсциссу $x_0 \in U$. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ пересекается с множеством S по множеству точек x_0 таких, что $x_0 \in U$.

Пример задачи с уравнением из сборника И.В. Ященко

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\frac{a+2x-4}{x^2-2x-a}=0$$
не имеет решений.

► Перепишем уравнение в виде
$$\begin{cases} a=-2x+4 \\ a\neq x^2-2x \end{cases}$$
Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений системы. Если некоторая точка $(x_0; a_0)$ плоскости принадлежит множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из решений системы, а значит, и исходного уравнения.
Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых не существует точек вида $(x_0; a_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, принадлежащих множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ не

Рассмотрим две функции: $a = a_1(x) = -2x + 4$ и $a = a_2(x) = x^2 - 2x$. Тогда множество S состоит из точек прямой $a = a_1(x)$ за вычетом точек пересечения этой прямой с параболой $a = a_2(x)$.
Найдем точки пересечения прямой и параболы:
$$\begin{cases} a=-2x+4 \\ a=x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ a=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ a=0 \end{cases} \end{array}\right.$$
Следовательно, прямая и парабола пересекаются в точках $A(-2; 8)$ и $B(2; 0)$. Значит, множество S — это все точки прямой $a = a_1(x)$, кроме точек A и B. Изобразим это:



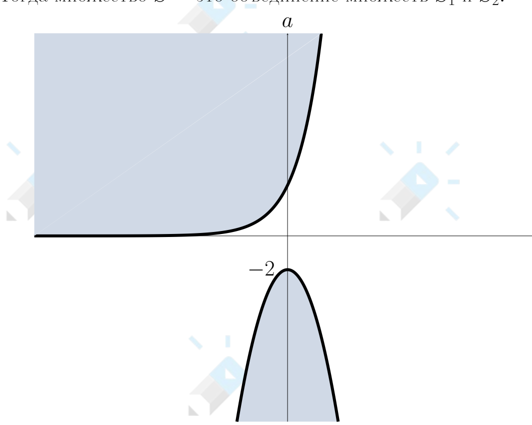
Таким образом l_A и l_B — две горизонтальные прямые, не имеющие точек пересечения с множеством S. Уравнение $l_A : a = 8$, уравнение прямой $l_B : a = 0$. Следовательно, ответ в задаче:
$$a \in \{0; 8\}$$
■

Пример задачи с неравенством

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$(a-2^x)(a+x^2+2)\geqslant 0$$
не имеет решений.

► Неравенство равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a\leqslant 2^x \\ a\leqslant -x^2-2 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a\geqslant 2^x \\ a\geqslant -x^2-2 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим системе координат xOa множество S решений совокупности систем. Если некоторая точка $(x_0; a_0)$ плоскости принадлежи множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из ре совокупности, а значит, и исходного неравенства.
Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a, при ка из которых не существует точек вида $(x_0; a_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, принадлежащих множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ не имеет точек пересечения с множеством S.
Решение каждого неравенства системы (1) на плоскости xO множество точек $(x; a)$, находящихся под графиками функци $a = 2^x$ и $a = -x^2 - 2$, включая сами графики. Следователь множество S_1 решений системы (1), изображенное в системе координат xOa, — это пересечение области, находящейся по графиком функции $a = 2^x$, включая сам график, и области, находящейся под графиком функции $a = -x^2 - 2$, включая график.
Аналогично множество S_2 решений системы (2), изображенн xOa, — это пересечение области, находящейся над графиком функции $a = 2^x$, включая сам график, и области, находящей графиком функции $a = -x^2 - 2$, включая сам график.
Тогда множество S — это объединение множеств S_1 и S_2.



Следовательно, горизонтальная прямая $a = a_0$, где $a_0 \in (-2$ имеет точек пересечения с закрашенной областью. Значит, о
$$a \in (-2; 0]$$

Пример задачи с системой из двух неравенств

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x+a\leqslant 0\\ x^2-4x-6a\leqslant 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

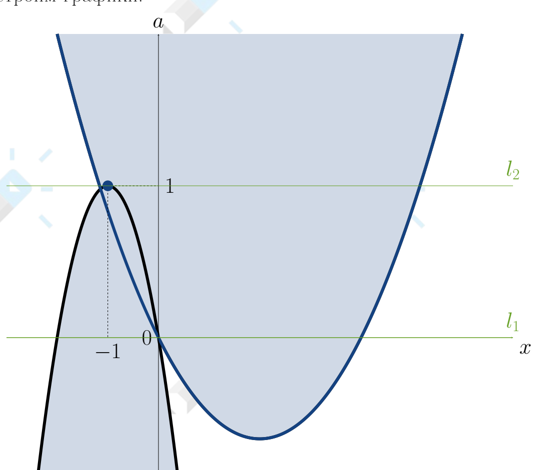
► Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} a\leqslant -x^2-2x\\ a\geqslant \dfrac{x^2-4x}{6}\end{cases}$$

Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений системы. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0;a_0)$ принадлежит этому множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из решений системы.
Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых ровно одна из точек вида $(x_0;a_0)$, где $x_0\in\mathbb{R}$, принадлежит множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a=a_0$ имеет ровно одну точку пересечения с множеством S.
Построим на плоскости множества решений каждого из неравенств системы, а затем найдем пересечение этих множеств.

- Множеством решений первого неравенства являются точки, лежащие не выше параболы $f(x)=-x^2-2x$.
- Множеством решений второго неравенства являются точки, лежащие не ниже параболы $g(x)=\dfrac{x^2-4x}{6}$.

Построим графики.



Убедимся, что вершина параболы f лежит выше параболы g. Ее координаты равны

$$x_1=-\frac{-2}{2\cdot(-1)}=-1;\quad a_1=f(-1)=1$$

Так как $g(-1)=\dfrac{5}{6}<1=f(-1)$, то вершина параболы f действительно лежит выше параболы g.
Множеством S решений системы является пересечение внутренних областей парабол f и g, включая границы.
Только горизонтальные прямые $l_1: a=0$ и $l_2: a=1$ будут иметь с S ровно одну точку пересечения. При этом l_2 — касательная в вершине параболы f, а не прямая, проходящая через точку пересечения парабол.
Любая горизонтальная прямая ниже l_1 или выше l_2 не будет иметь пересечений с множеством S.
Прямые между l_1 и l_2 будут иметь больше одной точки пересечения с S.
Таким образом, исходная система имеет единственное решение при

$$a\in\{0;1\}$$

■

Задача из ЕГЭ 2022

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|7x+a|=x^2+a^2-x+8a$$

имеет больше 2 различных решений.

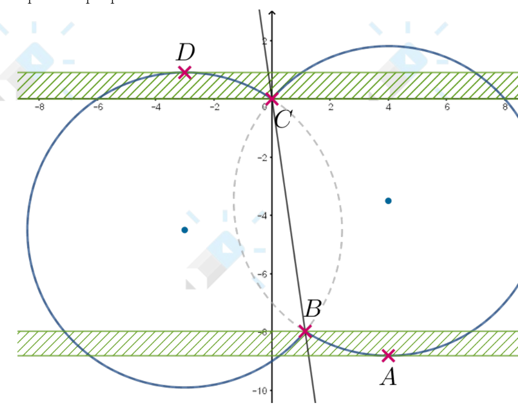
► Рассмотрим данное уравнение в системе координат xOa. Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений данного уравнения. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0;a_0)$ принадлежит этому множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из решений уравнения.
Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых более двух точек вида $(x_0;a_0)$, где $x_0\in\mathbb{R}$, принадлежит множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a=a_0$ имеет более двух точек пересечения с множеством S.
В области $a\geqslant -7x$ модуль раскроется положительно и уравнение примет вид

$$x^2+a^2-x+8a-7x-a=0\quad\Leftrightarrow\quad (x-4)^2+\left(a+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{113}{4}$$

То есть мы получим часть окружности, находящуюся не ниже прямой $a=-7x$.
В области $a<-7x$ модуль раскроется отрицательно и мы получим

$$x^2+a^2-x+8a+7x+a=0\quad\Leftrightarrow\quad (x+3)^2+\left(a+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{117}{4}$$

Построим графики.



Заметим, что

- самая высшая точка у правой окружности выше, чем у лев… как $-\dfrac{7}{2}+\dfrac{\sqrt{113}}{2}>-\dfrac{9}{2}+\dfrac{\sqrt{117}}{2}$;
- самая низшая точка у левой окружности ниже, чем у прав… как $-\dfrac{9}{2}-\dfrac{\sqrt{117}}{2}<-\dfrac{7}{2}-\dfrac{\sqrt{113}}{2}$;
- окружности пересекаются в двух точках B и C на прямой $a=-7x$.

Все горизонтальные прямые $a=a_0$, находящиеся в заштрих… области, то есть между горизонтальными прямыми через то… B и между горизонтальными прямыми через точки C и D, … или 4 точки пересечения с областью S, которая является объединением двух частей окружностей. Следовательно, все значения параметра нам подходят.
Найдем ординаты точек A,D :

$$a_A=-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{113}}{2}$$

$$a_D=-\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{117}}{2}$$

Ординаты точек B,C можно найти из пересечения какой-то… окружностей с прямой $a=-7x$:

$$\begin{cases} x^2+a^2-x+8a=7x+a\\ 7x+a=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=0;\ a_C=0\\ x=\dfrac{57}{50};\ a_B=\ldots\end{array}\right.$$

Следовательно, подходят значения параметра

$$\left[-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{113}}{2};\ -\frac{399}{\ldots}\right]\ \left[\ldots\frac{9}{\ldots}\ \frac{\sqrt{117}}{\ldots}\right]$$