Теорема Виета

Пусть нам дано квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$$

с неотрицательным дискриминантом: $D \geqslant 0$. Тогда такое уравнение имеет два (быть может, совпадающих) корня x_1 и x_2. Для этих корней выполнена следующая система

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Условия на корни x_1 и x_2, которые удобно записывать с помощью теоремы Виета.

- Корни разных знаков, то есть один отрицательный, а второй — положительный. Для этого достаточно сказать, что произведение корней отрицательно, следовательно,

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0.$$

Следовательно, корни будут одинаковых знаков, когда их произведение положительно:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}>0.$$

- Корни положительны. Это выполняется тогда и только тогда, когда произведение корней положительно (тогда корни одинаковых знаков) и сумма корней положительна:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0. \end{cases}$$

Следовательно, корни отрицательны тогда и только тогда, когда их произведение положительно, а сумма отрицательна:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}<0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0. \end{cases}$$

- Если необходимо поставить условие на сумму квадратов корней, то для начала с помощью формул сокращенного умножения ее можно записать следующим образом:

$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2-2x_1\cdot x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2.$

Тогда, подставляя значения из системы, задающейся теоремой Виета, получим

$$x_1^2+x_2^2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}.$$

- Если необходимо поставить условие на модуль разности корней, то для начала с помощью формул сокращенного умножения его можно записать следующим образом:

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2-4x_1\cdot x_2}=$$
$$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}.$$

Тогда, подставляя значения из системы, задающейся теоремой Виета, получим

$$|x_1-x_2|=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{D}}{|a|}.$$

Условия на корни с помощью теоремы Виета

Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2+(a+4)x+a+1=0$$

имеется ровно один отрицательный.

Решение: Рассмотрим наше уравнение. Коэффициент перед x^2 не фиксирован и равен a, следовательно, он может быть равен нулю, следовательно, наше уравнение необязательно квадратное. В случае $a=0$ уравнение линейное. Линейное уравнение может не иметь корней, иметь единственный корень или иметь бесконечно много решений. Нам подходит случай, когда линейное уравнение имеет единственный корень, причем этот корень отрицательный. Значит, нужно рассмотреть отдельно случай $a=0$.

Пусть $a=0$:

$$4x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{1}{4}.$$

Уравнение действительно имеет единственный отрицательный корень, следовательно, $a=0$ нам подходит.

Итак, теперь $a\neq 0$. Тогда уравнение квадратное. Квадратное уравнение может не иметь корней, иметь один корень или иметь два различных корня. Нам подходят для рассмотрения случаи, когда оно имеет один или два корня. На это влияет дискриминант квадратного уравнения. Выпишем его:

$$D=-3a^2+4a+16.$$

Для того, чтобы уравнение имело единственный корень, его дискриминант должен быть равен нулю, то есть

$$D=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{2}{3}\left(1\pm\sqrt{13}\right).$$

В случае $D=0$ единственный корень квадратного уравнения $Ax^2+Bx+C=0$ ищется по формуле $x=-\dfrac{B}{2A}$. Следовательно, наш корень равен

$$x=-\frac{a+4}{2a}.$$

Чтобы он был отрицательный, должно выполняться неравенство

$$x<0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{a+4}{2a}<0 \quad \Leftrightarrow \quad a\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty).$$

В этот промежуток, задающий ограничения на значения параметра, из найденных $a=\frac{2}{3}\left(1\pm\sqrt{13}\right)$ попадает только $a=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{13}\right)$. Следовательно, это второе значение параметра, которое нам подходит.

Пусть теперь уравнение имеет два различных корня, следовательно, его дискриминант положительный:

$$D>0 \quad \Rightarrow \quad a\in\left(\frac{2}{3}\left(1-\sqrt{13}\right);\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{13}\right)\right).$$

Если ровно один из двух корней должен быть отрицательным, то второй может быть равен нулю или быть положительным.

Рассмотрим отдельно случай, когда один из корней уравнения равен нулю. Тогда уравнение примет вид

$$a\cdot 0^2+(a+4)\cdot 0+a+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-1.$$

Следовательно, при $a=-1$ один из корней квадратного уравнения равен нулю. Второй корень можно найти с помощью теоремы Виета через сумму корней:

$$x_1+x_2=-\frac{a+4}{a} \quad \Rightarrow \quad 0+x_2=3 \quad \Leftrightarrow \quad x_2=3.$$

Следовательно, при $a=-1$ корни квадратного уравнения — это числа $x=0$ и $x=3$. Среди них нет отрицательного, значит, $a=-1$ нам не подходит.

Теперь второй корень может быть разве что положительным. А это значит, что один — отрицательный, второй — положительный, то есть корни разных знаков, следовательно, произведение корней должно быть отрицательно:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a+1}{a} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-1;0).$$

Так как при этих значениях a дискриминант D положителен, то получили третью часть ответа. Объединяя все подходящие найденные значения параметра, получим окончательный ответ:

$$a \in (-1;0] \cup \left\{\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{13}\right)\right\}.$$

Условия на корни с помощью метода «гвоздей»

Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых один корень уравнения

$$x^2 + ax + 4 = 0$$

меньше 2, а другой больше 2.

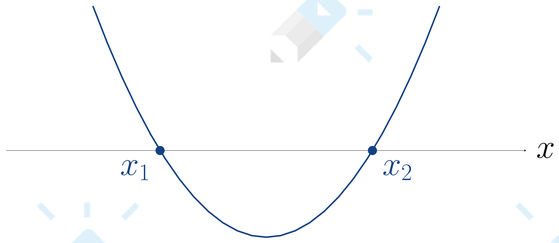
Решение: Заметим, что теорема Виета в этом случае нам не поможет, так как она помогает расставить корни только относительно числа 0. Воспользуемся другим методом, основанным на исследовании квадратичной функции и ее графика — параболы.

Рассмотрим функцию $y = x^2 + ax + 4$. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Парабола может пересекать ось Ox в одной точке, двух точках или не пересекать вовсе. Эти случаи соответствуют тому, что квадратное уравнение $x^2 + ax + 4 = 0$ имеет один корень, два различных корня или не имеет корней.

Из условия нашей задачи следует, что уравнение должно иметь два корня, причем различных, следовательно, парабола должна пересекать ось Ox в двух точках. Значит, дискриминант квадратного уравнения должен быть положительным:

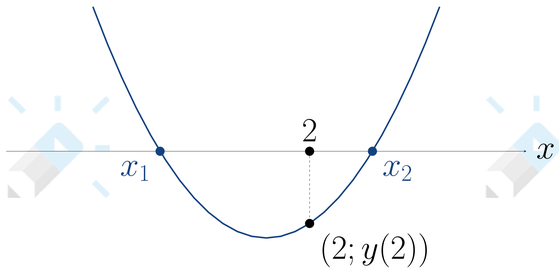
$$D = a^2 - 16 > 0.$$

Тогда парабола выглядит следующим образом:



Пусть x_1 — меньший корень квадратного уравнения, а x_2 — больший. Тогда именно $x_1 < 2$, а $x_2 > 2$.

Так как $x_1 < 2$, то число 2 должно располагаться на оси Ox правее x_1, а так как $x_2 > 2$, то число 2 должно располагаться левее x_2. Следовательно, единственный подходящий случай — когда число 2 располагается между корнями x_1 и x_2 :



Точка $(2; y(2))$ на параболе с абсциссой $x = 2$ имеет отрицательную ординату, так как эта точка находится под осью Ox. Следовательно, условия, задающие положение параболы и ее корней относительно числа 2, а значит, и задающие ограничения на значения параметра a, следующие:

$$\begin{cases} D = a^2 - 16 > 0 \\ y(2) = 4 + 2a + 4 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty;-4).$$

Следовательно, ответ:

$$a \in (-\infty;-4).$$

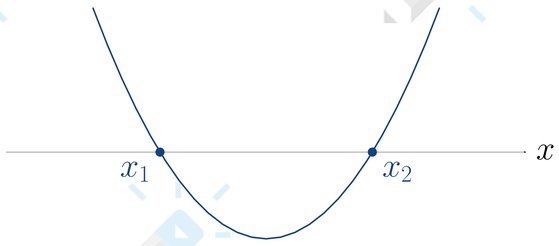
Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых оба корня уравнения

$$x^2 + ax + 4 = 0$$

не меньше 1.

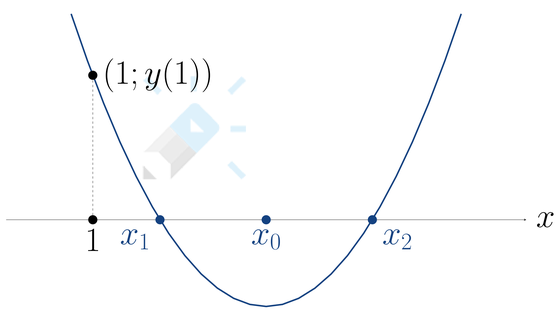
Решение: В этой задаче будем поступать тем же образом, как мы поступали в предыдущей задаче. Рассмотрим функцию $y = x^2 + ax + 4$, графиком которой является парабола, ветви которой направлены вверх. Из условия задачи следует, что квадратное уравнение должно иметь два различных корня, следовательно, его дискриминант должен быть положительный, и тогда парабола пересекает ось Ox в двух точках:

$$D = a^2 - 16 > 0.$$

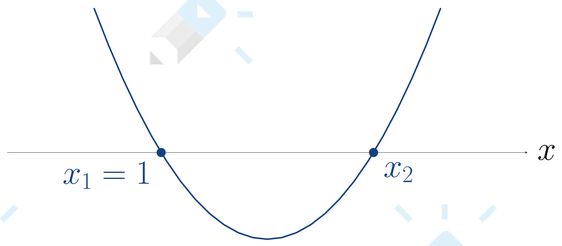


Так как оба корня должны быть не меньше 1, то $x_1 \geqslant 1$ и $x_2 \geqslant 1$. Если же мы условились, что $x_1 < x_2$, то достаточно только сказать, что $x_1 \geqslant 1$. Отсюда будет следовать, что $x_2 > x_1 \geqslant 1$.

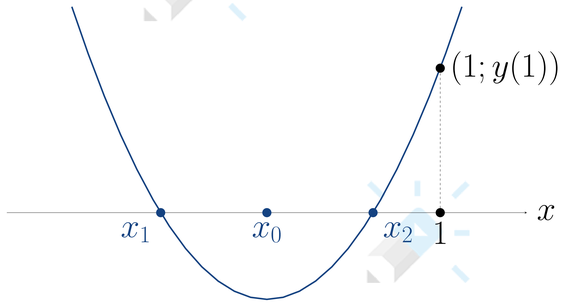
Так как $x_1 \geqslant 1$, то число 1 должно располагаться левее корня x_1 (картинка 1):



или совпадать с ним (картинка 2):



В случае, когда $1 < x_1$, значение функции $y = x^2+ax+4$ в точке $x = 1$ должно быть положительным, то есть $y(1) > 0$. Но обратим внимание, что одного этого условия недостаточно, так как под такое же условие попадает следующая картинка (3):



Разница между картинками 1 и 3 в том, что на картинке 1 абсцисса x_0 вершины параболы находится правее числа 1, а на картинке 3 — левее числа 1. Следовательно, картинка 1 задается следующими условиями:

$$\begin{cases} D = a^2 - 16 > 0 \\ y(1) = 1 + a + 4 > 0 \\ x_0 = -\dfrac{a}{2} > 1 \end{cases}$$

Заметим, что если в этой системе заменить $y(1) > 0$ на $y(1) \geqslant 0$, то мы этой системой опишем и картинку 1, и картинку 2. Следовательно, ситуация, когда $1 \leqslant x_1$, описывается следующей системой

$$\begin{cases} D = a^2 - 16 > 0 \\ y(1) = 1 + a + 4 \geqslant 0 \\ x_0 = -\dfrac{a}{2} > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in [-5; -4).$$

Следовательно, ответ:

$$a \in [-5; -4).$$

Метод хорошего/плохого корня

Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3x^2 - (3a+1)x + a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение: Уравнение вида $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ равносильно системе из $A = B$ и $A \geqslant 0$. Таким образом, при $x^2 \geqslant a^2$, то есть на ОДЗ, получаем

$$(x-a)(x+a) = (x-a)(3x-1) \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)(2x-1-a) = 0$$

Получаем два потенциальных решения $x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{a+1}{2}$.

Назовем потенциальный корень хорошим, если он удовлетворяет двум требованиям: принадлежит ОДЗ и лежит в отрезке $[0; 1]$. В противном случае, то есть когда не удовлетворяется хотя бы одно из этих условий, будем считать потенциальный корень плохим.

Таким образом, нам подходят ситуации, когда $x_1 \neq x_2$ и среди них ровно один хороший или когда $x_1 = x_2$ — хороший.

- x_1 — хороший, если

$$\begin{cases} a^2 \geqslant a^2 \\ 0 \leqslant a \leqslant 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in [0; 1].$$

- x_2 — хороший, если $|a+1| \geqslant 2|a|$ и $a \in [-1; 1]$. Решим первое неравенство:

$$a^2+2a+1 \geqslant 4a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3a^2-2a-1 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

Пересекая с $a \in [-1; 1]$, получаем $a \in \left[-\dfrac{1}{3}; 1\right]$.

Получаем три подходящие нам ситуации:

1) «хороший+плохой»:

$$\begin{cases} a \in [0; 1] \\ a \notin \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \varnothing$$

2) «плохой+хороший»:

$$\begin{cases} a \notin [0; 1] \\ a \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$$

3) «хороший+хороший» и $x_1 = x_2$. Совпадают потенциальные корни при $a = 1$, при котором как раз они являются хорошими.

Таким образом, получаем итоговый ответ:

$$a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \{1\}.$$

Исследование замены

Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(\log_2(x+1) - \log_2(x-1))^2 - 2(\log_2(x+1) - \log_2(x-1)) - a^2 + 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение: Сделаем замену $t = \log_2(x+1) - \log_2(x-1)$. Тогда уравнение примет вид

$$t^2 - 2t + 1 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \pm a$$

Исследуем, при каких значениях переменной t какое число решений для переменной x мы получаем. Для этого решим уравнение:

$$t = \log_2(x+1) - \log_2(x-1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = 2^t \\ x > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2^t - 1)x = 2^t + 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

При $2^t-1 = 0$, откуда $t = 0$, получаем уравнение $0 \cdot x = 2$, которое не имеет решений. При $t \neq 0$ имеем единственный корень

$$x = \frac{2^t + 1}{2^t - 1}$$

Следовательно, исходное уравнение будет иметь два решения, когда уравнение с заменой имеет два корня $t_1 \neq t_2$, то есть при $1+a \neq 1-a$, каждый из которых удовлетворяет условию

$$\frac{2^t + 1}{2^t - 1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad t > 0$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 1 \pm a > 0 \\ 1 + a \neq 1 - a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 < a < 0;\ 0 < a < 1$$

Ответ:

$$a \in (-1; 0) \cup (0; 1).$$