

Теория по графике для №18 от «Школково»

Содержание

1	Пучок прямых	2
1.1	Откуда берется пучок прямых	2
1.2	Задача из ЕГЭ 2022	3
1.3	Задача при пучок прямых и полуокружность	5
2	Корыто	6
2.1	Упрощенная задача	6
2.2	Задача из ЕГЭ 2021	7
3	Траектории движения	9
4	Метод xOa	11
4.1	Суть метода	11
4.2	Задача на метод xOa	11

ШКОЛКОВО

1 Пучок прямых

1.1 Откуда берется пучок прямых

Рассмотрим функцию $f(x) = a(x - 2) + 1$. Несложно видеть, что она линейна относительно x , и графиком такой функции при любом фиксированном значении параметра a будет прямая.

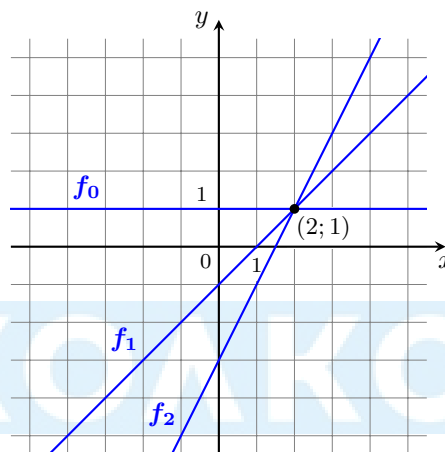
Теперь попробуем понять, как устроено всё **семейство** (то есть множество функций, которые могут быть получены при всех возможных значениях a) функций такого вида. Уже ясно, что это будет некоторое множество прямых на плоскости, но мы хотим знать больше. Построим графики трех функций

$$f_0(x) = 0 \cdot (x - 2) + 1 = 1;$$

$$f_1(x) = 1 \cdot (x - 2) + 1 = x - 1;$$

$$f_2(x) = 2 \cdot (x - 2) + 1 = 2x - 3,$$

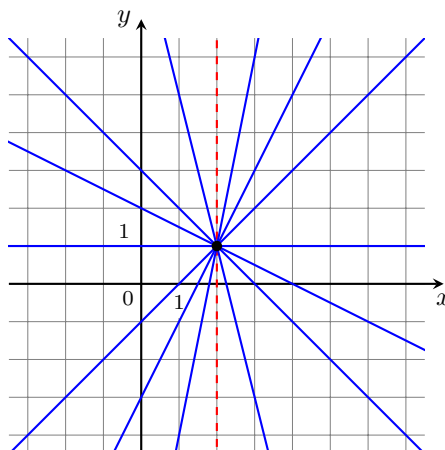
полученных подставлением соответствующего значения параметра a .



Замечаем, что все три прямые проходят через точку $(2; 1)$. Докажем теперь, что любая прямая нашего семейства проходит через эту точку. Для этого подставим $x = 2$ в нашу функцию, получим

$$f(2) = a(2 - 2) + 1 = 1$$

То есть $f(2) = 1$ **независимо** от значения параметра a , и любая прямая нашего семейства проходит через точку $(2; 1)$. Так мы поняли, что наша функция с параметром задает **пучок прямых** на плоскости. Также важно отметить, что единственная прямая, которая проходит через точку $(2; 1)$, но не будет реализована — это вертикальная прямая $x = 2$.



1.2 Задача из ЕГЭ 2022

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три решения.

Решение

Заметим, что уравнение $y = ax$ задает пучок прямых, проходящих через точку $(0; 0)$, причем каждому значению a соответствует ровно одна прямая этого пучка. Другими словами, параметр a отвечает за угол наклона прямой из пучка.

Система уравнений в нашей задаче означает то, что нам нужно изобразить на плоскости множество S решений первого уравнения, изобразить пучок прямых и посмотреть, при каких значениях параметра a прямая из пучка имеет ровно 3 точки пересечения с множеством S .

Решим первое уравнение. Сначала найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} \neq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x > -3$$

Тогда при условии $x > -3$ дробь равна 0, если ее числитель равен 0, то есть

$$xy^2 - 3xy - 3y + 9 = 0$$

$$xy \cdot (y - 3) - 3 \cdot (y - 3) = 0$$

$$(y - 3)(xy - 3) = 0$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = \frac{3}{x}, \text{ где } x \neq 0 \end{cases}$$

Заметим, что мы можем делить на x , так как $x = 0$ не является решением системы. Проверим это. Если $x = 0$, то

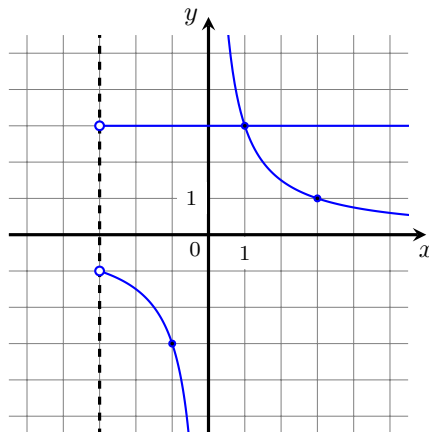
$$y = ax = a \cdot 0 = 0.$$

Тогда

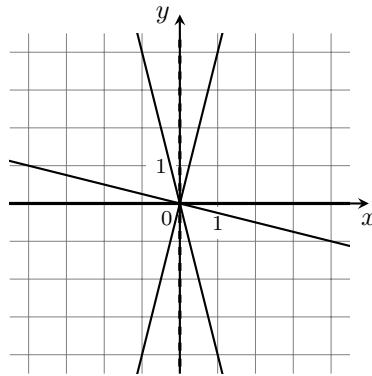
$$\frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = \frac{0 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 9}{\sqrt{0+3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \neq 0$$

Значит, $x = 0$ не является решением системы и мы можем считать, что $x \neq 0$.

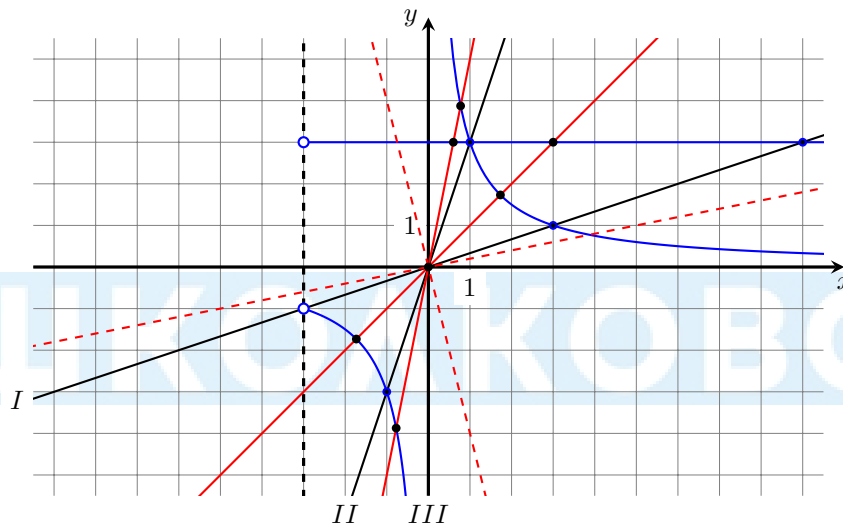
Изобразим множество S решений первого уравнения, учитывая ОДЗ:



Итак, подробнее рассмотрим пучок прямых, который задается уравнением $y = ax$. В это уравнение можно подставить любые значения параметра a и получить все возможные прямые, проходящие через точку $(0; 0)$, кроме одной — прямой $x = 0$.



Теперь найдем такие прямые из пучка, которые пересекают множество S ровно в трех точках.



- Начнем с прямой I . Она имеет только две точки пересечения с S — $(3; 1)$ и $(9; 3)$, то есть не подходит нам.
- Вращать прямую из положения I по часовой стрелке до горизонтального положения не имеет смысла, так как у таких прямых тоже будет две точки пересечения с S .
- Горизонтальная прямая, совпадающая с осью абсцисс, точно не подойдет, так как множество S не имеет общих точек с ней.
- Тогда будем вращать прямую из положения I против часовой стрелки. Пока мы не получим прямую II , наша прямая будет иметь ровно три точки пересечения с множеством S .
- Прямая II имеет только две точки пересечения с S — $(-1; -3)$ и $(1; 3)$, то есть не подходит нам.
- Продолжим вращать прямую из положения II против часовой стрелки, пока мы не получим вертикальную прямую — прямую III . До этого момента наша прямая будет иметь ровно три точки пересечения с множеством S .
- Прямые пучка, которые лежат во II и IV четвертях, нам точно не подойдут, так как из множества S в этих четвертях лежит только часть горизонтальной прямой, то есть три решения получить нельзя.

Значит, нам нужно найти такие значения параметра a , при которых мы получим все прямые от I до II и от II до III .

Прямая I проходит через точки $(0; 0)$ и $(3; 1)$, а значит ее угловой коэффициент равен $\frac{1}{3}$.

Прямая II проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 3)$, а значит ее угловой коэффициент равен 3.

Далее все просто — от прямой II мы можем увеличивать значение a до бесконечности, приближаясь, но не доходя до вертикальной прямой III .

Значит, итоговый ответ: $a \in \left(\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

1.3 Задача при пучок прямых и полуокружность

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственное решение.

Решение

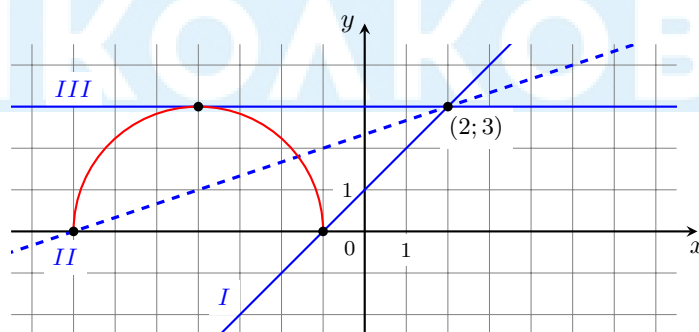
Преобразуем уравнение

$$\sqrt{-7 - 8x - x^2} = -a(x - 2) + 3$$

Справа получили пучок прямых через точку $(2; 3)$. Преобразуем левую часть

$$y = \sqrt{-7 - 8x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -7 - 8x - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + x^2 + 8x + 16 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 4)^2 + y^2 = 3^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Это полуокружность, лежащая в верхней полуплоскости, с центром $(-4; 0)$ и радиусом 3. Построим графики.



Очевидно, что положения прямой пучка **не** между I и III нам не подходят, потому что в таком случае прямые не пересекают полуокружность. Между положениями I и II , не включая положение II , будет ровно одна точка пересечения. Между положениями II и III , включая положение II , будет две точки пересечения. В положении III будет одна точка пересечения. Осталось найти значения a , соответствующие положениям I , II и III .

Положению III соответствует $a = 0$, так как радиус окружности равен расстоянию от точки $(2; 3)$ до оси Ox , то есть касательная к полуокружности параллельна оси Ox .

В положении II прямая проходит через точку $(-7; 0)$. Найдем a , подставив эту пару в уравнение прямой

$$-a(-7 - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

В положении I прямая проходит через точку $(-1; 0)$. Найдем a , подставив эту пару в уравнение прямой

$$-a(-1 - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Тогда ответ: $a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$.

2 Корыто

2.1 Упрощенная задача

При каких положительных значениях параметра a уравнение

$$|x - a| + |x - 2a| = a^2 - a$$

имеет решения?

Решение

Обозначим $f(x) = |x - a| + |x - 2a|$. Чтобы построить график функции f , сначала приведем ее к кусочно заданному виду, раскрыв модули. Первый модуль раскрывается с плюсом при $x \geq a$, с минусом при $x < a$. Второй модуль раскрывается с плюсом при $x \geq 2a$, с минусом при $x < 2a$. Таким образом, мы понимаем, что знаки раскрытия модулей зависят только от положения x относительно нулей модулей — точек a и $2a$. По условию $a > 0$, тогда выполняется $a < 2a$, и схематично правило раскрытия модулей можно изобразить следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} |x - a| & & - & & + & & + \\ |x - 2a| & & - & & - & & + \\ \hline & & a & & 2a & & x \end{array}$$

Раскроем модули в зависимости от принадлежности x к одному из трех промежутков:

1. $x \in (-\infty; a) \Rightarrow f(x) = -(x - a) - (x - 2a) = -2x + 3a$
2. $x \in [a; 2a] \Rightarrow f(x) = (x - a) - (x - 2a) = a$
3. $x \in (2a; +\infty) \Rightarrow f(x) = (x - a) + (x - 2a) = 2x - 3a$

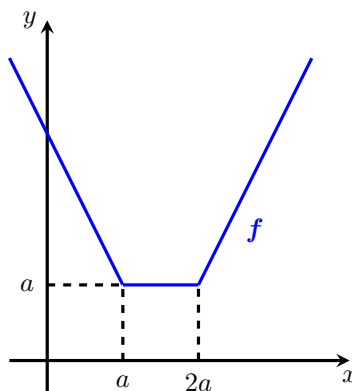
Резюмируя, получим

$$f(x) = |x - a| + |x - 2a| = \begin{cases} -2x + 3a, & x < a \\ a, & a \leq x \leq 2a \\ 2x - 3a, & x > 2a \end{cases}$$

Видим, что на промежутках 1 и 3 функция f линейная, а на промежутке 2 — константа. Таким образом, на первом промежутке функция убывает, так как угловой коэффициент $-2 < 0$; на втором ее график параллелен оси абсцисс, а на третьем функция возрастает, так как угловой коэффициент $2 > 0$. Найдем значения f в точках излома. Заметим, что неважно, к какому из промежутков относить точки излома!

$$f(a) = a = -2a + 3a, \quad f(2a) = a = 2 \cdot 2a - 3a$$

Наконец построим график нашего «корыта»



В правой части уравнения имеем константу $a^2 - a$, ей соответствует горизонтальная прямая $y = a^2 - a$. Очевидно, что уравнение имеет решения, то есть имеет пересечения с корытом, только когда эта прямая проходит не ниже дна корыта. Это условие описывается неравенством

$$a^2 - a \geq a \Leftrightarrow a^2 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$$

Пересекая с условием, что a положительно, получаем ответ: $a \in [2; +\infty)$.

2.2 Задача из ЕГЭ 2021

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|x+1| + (1-a)|x-1| + 2 = 0$$

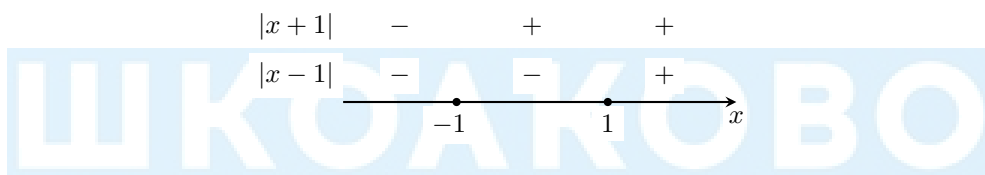
имеет ровно два различных корня.

Решение

Преобразуем исходное уравнение к виду

$$f(x) = a|x+1| + (1-a)|x-1| = -2$$

Рассмотрим случаи раскрытия модулей, чтобы привести функцию к кусочно-заданному виду:



Раскроем модули в зависимости от принадлежности x к одному из трех промежутков:

- $x \geq 1 \Rightarrow f(x) = a \cdot (x+1) + (1-a) \cdot (x-1) = x + 2a - 1$
- $x \in [-1; 1) \Rightarrow f(x) = a \cdot (x+1) - (1-a)(x-1) = x \cdot (2a-1) + 1$
- $x < -1 \Rightarrow f(x) = -a \cdot (x+1) - (1-a) \cdot (x-1) = -x - 2a + 1$

Резюмируя, получим

$$f(x) = a|x+1| + (1-a)|x-1| = \begin{cases} -x - 2a + 1, & x < -1 \\ (2a-1)x + 1, & -1 \leq x < 1 \\ x + 2a - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найдем координаты точек излома функции f :

$$f(1) = x + 2a - 1 = 1 + 2a - 1 = 2a$$

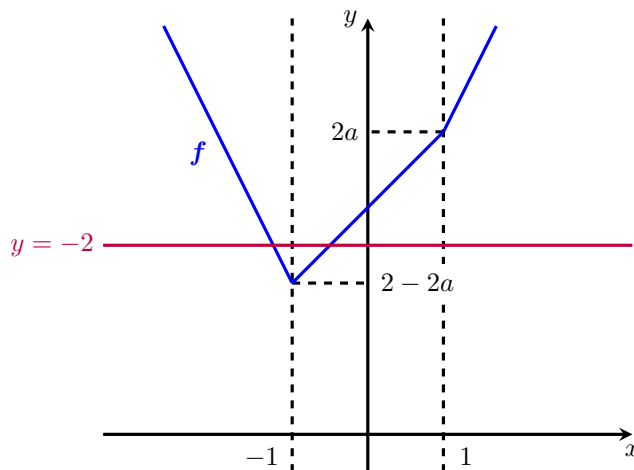
$$f(-1) = (2a-1)x + 1 = (2a-1)(-1) + 1 = -2a + 1 + 1 = 2 - 2a$$

Мы получили, что на первом промежутке функция линейная возрастающая, на третьем — линейная убывающая. На втором промежутке $[-1; 1]$ функция также линейная. Более того, коэффициент при x зависит от параметра a , поэтому заранее мы не знаем, убывает или возрастает наша функция на втором промежутке. Рассмотрим три возможных случая.

- Функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$, то есть

$$2a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$$

В этом случае график примет следующий вид (оси изображены для удобства, мы не знаем, как график будет располагаться относительно них и не пользуемся этим):



Таким образом, уравнение будет иметь ровно два различных решения, если горизонтальная прямая $y = -2$ проходит выше левой точки излома графика, то есть

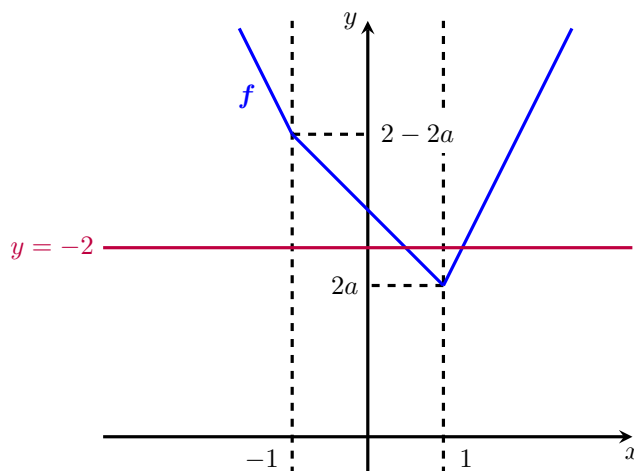
$$-2 > -2a + 2 \Leftrightarrow a > 2$$

Пересекая с условием $a > \frac{1}{2}$, получаем $a \in (2; +\infty)$.

- Функция убывает на отрезке $[-1; 1]$, то есть

$$2a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$$

В этом случае график примет следующий вид (оси изображены для удобства, мы не знаем, как график будет располагаться относительно них и не пользуемся этим):



Таким образом, уравнение будет иметь ровно два различных решения, если горизонтальная прямая $y = -2$ проходит выше правой точки излома графика, то есть $-2 > 2a \Leftrightarrow a < -1$.

Пересекая с условием $a < \frac{1}{2}$, получаем $a \in (-\infty; -1)$.

- Коэффициент при x зануляется, то есть $2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, получим

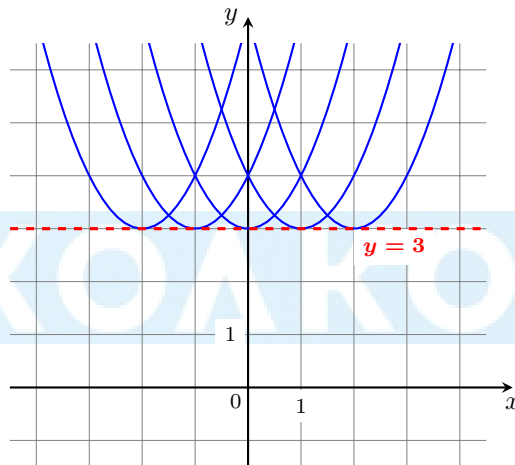
$$\frac{1}{2}|x+1| + \frac{1}{2}|x-1| = -2$$

Левая часть этого уравнения неотрицательна, так как является суммой двух модулей, а правая отрицательна. Значит, при таком значении a уравнение не имеет решений, и это значение a нам не подходит.

Объединив найденные значения a , получим ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

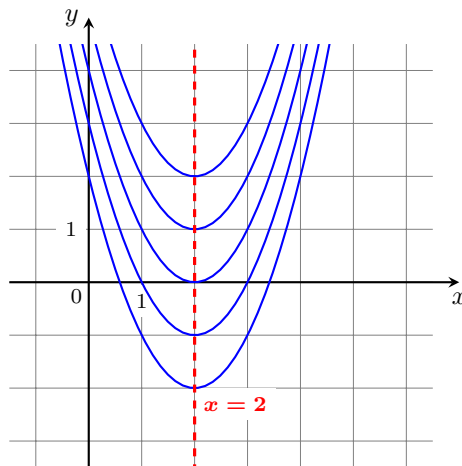
3 Траектории движения

Рассмотрим параболу $f(x) = (x - a)^2 + 3$. Мы знаем, что если парабола представлена в таком виде, то ее вершина имеет координаты $(a; 3)$. При этом параметр a может принимать произвольное значение, следовательно, вершина параболы может оказаться в любой точке горизонтальной прямой $y = 3$, так как ордината вершины зафиксирована и равна 3, а абсцисса может быть любой.



Множество парабол, заданных таким образом, называют **семейством**, а прямую, по которой движется вершина — **траекторией**.

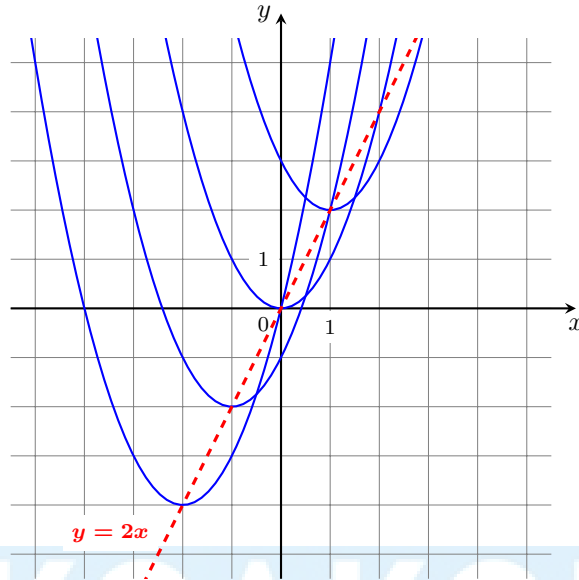
Аналогичная ситуация имеет место для параболы $f(x) = (x - 2)^2 + a$, разница лишь в том, что теперь траектория будет вертикальной прямой.



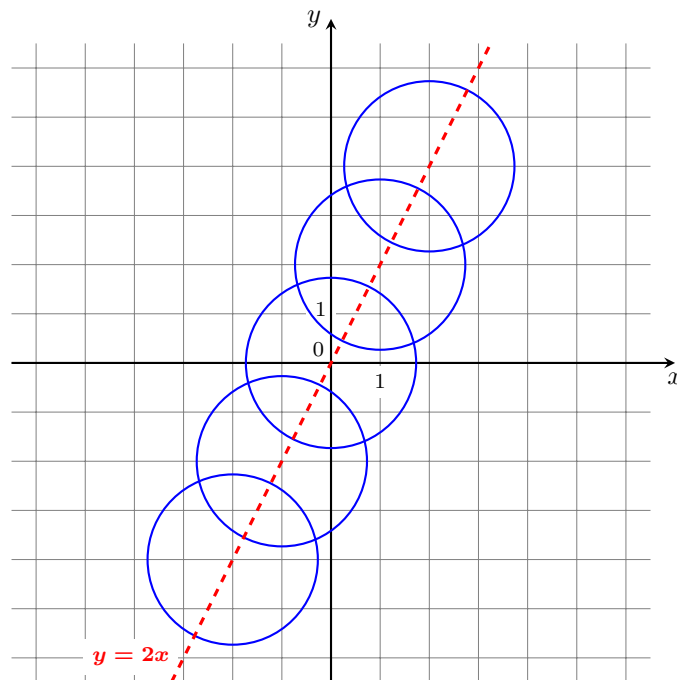
Рассмотрим еще одну ситуацию. Пусть парабола имеет вид $f(x) = (x - a)^2 + 2a$. В этом случае на роль вершины подойдут все точки плоскости вида $(a; 2a)$, то есть все такие точки $(x_0; y_0)$, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow y_0 = 2x_0$$

Получили, что в этом случае траекторией вершины будет прямая $y = 2x$ плоскости, и график будет выглядеть следующим образом:



Для окружности вида $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 3$ ситуация будет аналогичной — центр $O(a; 2a)$ окружности будет двигаться по прямой $y = 2x$.

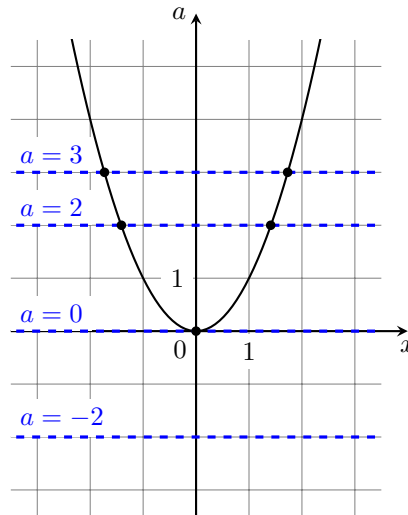


4 Метод xOa

4.1 Суть метода

Рассмотрим уравнение $x^2 = a$. Мы понимаем, что оно имеет два решения при $a > 0$, одно — при $a = 0$ и не имеет решений при $a < 0$.

Давайте рассмотрим параметр a как функцию от x . Тогда в системе координат xOa мы получим такой график:



На самом деле мы изобразили на плоскости множество точек — решений уравнения $x^2 = a$, значит, если прямая $a = \text{const}$ пересекает полученный нами график в двух точках, то при данном a уравнение $x^2 = a$ имеет ровно два решения. Аналогично с одним пересечением и отсутствием пересечений.

4.2 Задача на метод xOa

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$

имеет единственное решение.

Решение

Преобразуем исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - (2a - 2))(x - (a + 1)) = 0 \\ (x - 4)(x + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2a - 2 \\ x = a + 1 \end{cases} \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = \frac{1}{2}x + 1 \\ a = x - 1 \end{cases} \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

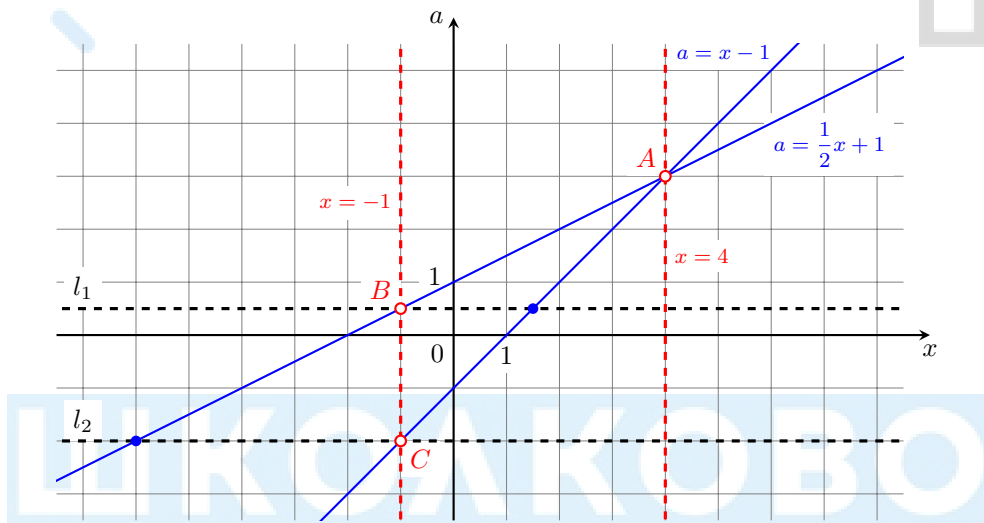
Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений системы. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S , то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0 , то x_0 будет одним из решений системы. Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a , при каждом из которых ровно одна из точек

вида $(x_0; a_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ принадлежат множеству решений S , изображенному на плоскости xOa . Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет ровно одну точку пересечения с множеством S .

Построим на плоскости множества решений каждого из уравнений внутренней совокупности, объединим их, а затем исключим точки, удовлетворяющих условиям $x = 4$ и $x = -1$.

- Множеством решений первого уравнения совокупности являются точки прямой $a = \frac{1}{2}x + 1$.
- Множеством решений второго уравнения совокупности являются точки прямой $a = x - 1$.
- Третье условие $x \neq 4$ задает всю плоскость за исключением точек прямой $x = 4$.
- Четвертое условие $x \neq -1$ задает всю плоскость за исключением точек прямой $x = -1$.

Построим графики.



Множество S решений системы является объединением всех точек синих прямых за исключением точек A , B и C , выделенных красным и принадлежащих красным прямым.

Прямые $a = \frac{1}{2}x + 1$, $a = x - 1$ и $x = 4$ пересекутся точке $A = (4; 3)$. Прямые $a = \frac{1}{2}x + 1$ и $x = -1$ пересекутся точке $B = (-1; \frac{1}{2})$. Прямые $a = x - 1$ и $x = -1$ пересекутся точке $C = (-1; -2)$.

Заметим, что горизонтальные прямые, которые проходят через точку A , не будут иметь точек пересечения с S , а значит, не подойдут нам; горизонтальные прямые, которые проходят через одну из точек B или C , будут иметь ровно одну точку пересечения с S , а значит, подойдут нам. Остальные горизонтальные прямые будут иметь две точки пересечения с S и нам не подойдут. Значит, нам подходят только прямые $l_1 : a = \frac{1}{2}$ (прямая через B) и $l_2 : a = -2$ (прямая через C). Ответ: $a \in \left\{ \frac{1}{2}; -2 \right\}$