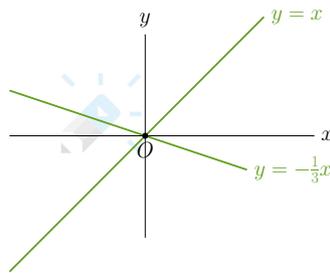


Пучок прямых

Рассмотрим функцию $y = ax$. При каждом фиксированном a графиком этой функции является прямая.

Заметим, что при $x = 0$ мы получаем значение $y = 0$, не зависящее от параметра. Это значит, что при любом фиксированном $a \in \mathbb{R}$ прямая $y = ax$ проходит через начало координат $(0; 0)$. Пробегаая все значения a от $-\infty$ до $+\infty$, мы можем получить любую прямую, проходящую через $(0; 0)$, кроме вертикальной прямой (так как вертикальная прямая задается уравнением $x = b$, которое мы не можем получить ни при каком a).

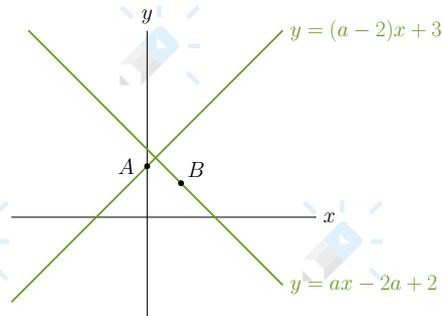
Говорят, что графиком функции $y = ax$ при всех $a \in \mathbb{R}$ является пучок прямых, проходящих через точку $O(0; 0)$.



Рассмотрим примеры других функций, задающих пучки прямых.

- $y = (a - 2)x + 3$ — задает пучок прямых, проходящих через точку $A(0; 3)$;

- $y = ax - 2a + 2$. Если преобразовать уравнение к виду $y = a(x - 2) + 2$, то видно, что график данной функции — пучок прямых, проходящих через точку $B(2; 2)$.



Заметим, что функция $y = ax + a^2$, к примеру, не задает пучок прямых, так как не существует ни одного значения x , при котором мы получим значение y , не зависящее от параметра.

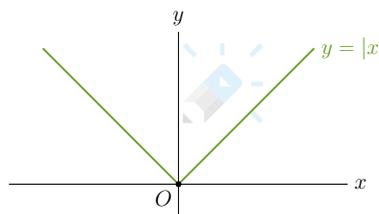
«Уголок»

Рассмотрим функцию $y = |x|$. Вспомнив определение модуля, получаем, что

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Следовательно, графиком $y = |x|$ является объединение двух лучей с общим началом в точке $O(0; 0)$: луч прямой $y = x$ при $x \geq 0$ и луч прямой $y = -x$ при $x < 0$. Такой график часто называют «уголок» или «галочка».

Договоримся называть точку O вершиной уголка, угловые коэффициенты 1 и -1 прямых $y = x$ и $y = -x$ — наклоном правой и левой ветвей уголка соответственно.

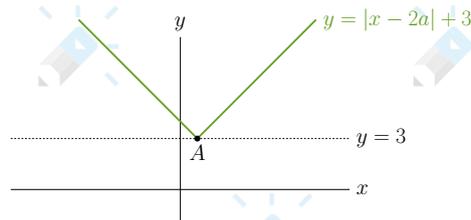


Если $O(x_0; y_0)$ — вершина уголка, то уголок задается уравнением $y = A|x - x_0| + y_0$. Тогда A и $-A$ — наклон правой и левой ветвей уголка соответственно.

Рассмотрим примеры других уголков.

- $y = |x - 2a| + 3$. Наклон ветвей уголка равен 1 и -1 , вершина уголка находится в точке $A(2a; 3)$. Заметим, что точка A не зафиксирована и ее положение на координатной плоскости зависит от параметра.

При изменении параметра a от $-\infty$ до $+\infty$ абсцисса $x_0 = 2a$ вершины уголка меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а ордината $y_0 = 3$ остается фиксированной. Следовательно, вершина A уголка движется по прямой $y = 3$. Эта прямая называется траекторией движения уголка. Следовательно, при произвольном зафиксированном a мы получаем уголок, «подобный» уголку $y = |x|$, вершина которого находится в некоторой точке прямой $y = 3$.



- $y = |2x + a| + 2a$. Для того, чтобы определить наклон уголка, нужно вынести 2 из-под модуля. Получим:

$$y = 2|x + 0,5a| + 2a.$$

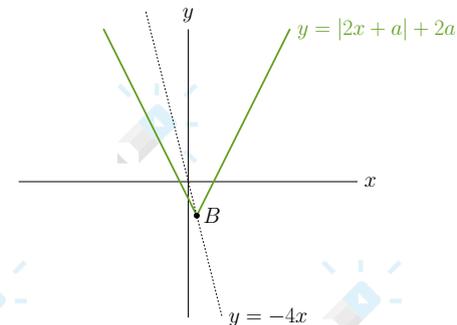
Следовательно, наклон правой и левой ветвей уголка равен 2 соответственно. То есть можно сразу сказать, что мы получим «подобный» уголку $y = 2|x|$. Осталось определить вершину ка. Она имеет координаты $B(-0,5a; 2a)$. Заметим, что те же координаты вершины уголка зависят от параметра. Для того чтобы найти траекторию движения вершины уголка, нужно найти связь координат вершины уголка. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_0 = -0,5a \\ y_0 = 2a \end{cases}$$

Выразим a из любого из двух уравнений и подставим во второе. Тогда получим:

$$y_0 = -4x_0.$$

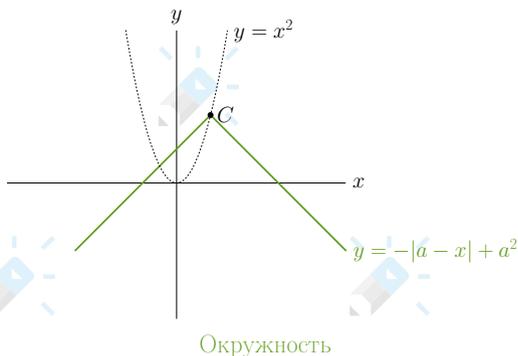
Следовательно, вершина уголка (или, говорят, сам уголок) движется по прямой $y = -4x$. Получаем такой график для некоторого значения a :



- $y = -|a - x| + a^2$. Для удобства изучения этой функции переписать ее в виде

$$y = -|x - a| + a^2.$$

Заметим, что наклон правой и левой ветвей уголка равен -1 и 1 соответственно. То есть уголок «подобен» уголку $y = -|x|$ (обе ветви направлены вниз). Вершина уголка находится в точке $C(a; a^2)$. Если найти зависимость между $x_0 = a$ и $y_0 = a^2$, получим $y_0 = x_0^2$. Следовательно, вершина уголка движется по параболе $y = x^2$. Причем при изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ абсцисса x_0 меняется от $-\infty$ до $+\infty$, следовательно, вершина C уголка движется по параболе $y = x^2$ слева направо.

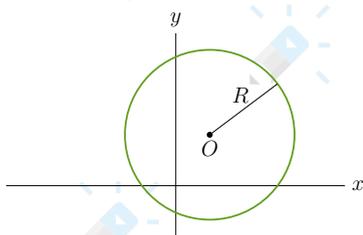


Окружность

Рассмотрим уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a \quad (*)$$

При $a < 0$ это уравнение задает пустое множество, так как сумма квадратов двух выражений неотрицательна, то есть $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq 0$, следовательно, не может быть равна отрицательному числу. При $a = 0$ это уравнение задает на координатной плоскости xOy единственную точку $O(x_0; y_0)$. При $a > 0$ это уравнение задает окружность с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$.



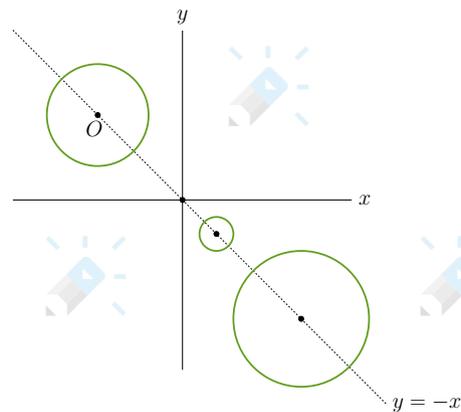
Рассмотрим несколько примеров.

• Пусть дано уравнение $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$. В этом уравнении есть слагаемые x^2 и y^2 , причем взятые с одинаковым знаком, следовательно, это уравнение можно привести к виду (*). Для этого выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 - 8y + 16) - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Следовательно, это уравнение задает окружность с центром в точке $O(3; 4)$ и радиусом $R = 5$.

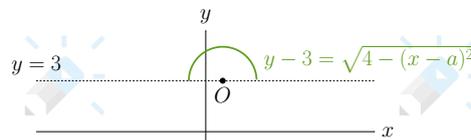
• $(x - 2a)^2 + (y + 2a)^2 = a^2$. Данное уравнение при $a = 0$ задает точку $O(0; 0)$, а при $a \neq 0$ задает окружность с центром в точке $O(2a; -2a)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2} = |a|$. Заметим, что центр окружности, как и радиус, зависит от параметра. Центр окружности имеет координаты $x_0 = 2a$ и $y_0 = -2a$, следовательно, движется по прямой $y = -x$. При изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ центр окружности движется по прямой слева направо, причем чем ближе центр окружности к началу координат (то есть чем ближе a по модулю к значению 0), тем меньше



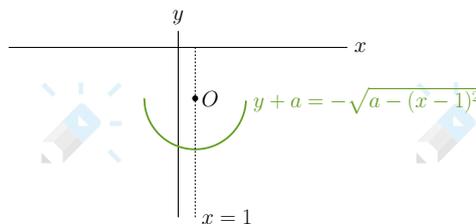
• $y - 3 = \sqrt{4 - (x - a)^2}$. Это уравнение равносильно

$$\begin{cases} y - 3 \geq 0 \\ (x - a)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{cases}$$

Следовательно, оно задает верхнюю полуокружность с центром в точке $O(a; 3)$ и радиусом $R = 2$. Центр полуокружности «скользит» по прямой $y = 3$.



• $y + a = -\sqrt{a - (x - 1)^2}$. Это уравнение при $a < 0$ задает пустое множество, при $a = 0$ задает точку $O(1; 0)$, при $a > 0$ задает нижнюю полуокружность с центром в точке $O(1; -a)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$. Заметим, что при изменении a от 0 до $+\infty$ радиус полуокружности увеличивается, а центр полуокружности «скользит» по прямой $x = 1$ при $y < 0$ сверху вниз.



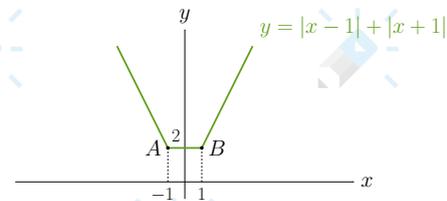
«Корыто»

Рассмотрим функцию

$$y = |x - 1| + |x + 1|.$$

Раскроем модули.

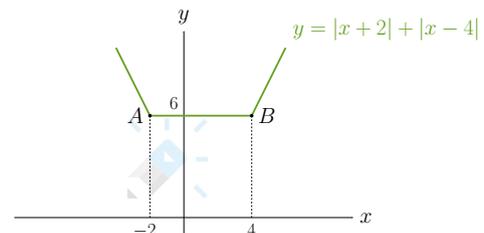
График этой функции выглядит следующим образом:



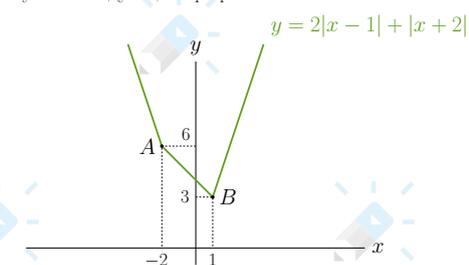
Отрезок AB , находящийся на «высоте» 2, называют «дном корыта», оно горизонтально, то есть параллельно оси абсцисс. Ветви имеют наклон 2 и -2 , то есть параллельны прямым $y = 2x - 2x$.

Рассмотрим еще примеры.

• $y = |x + 2| + |x - 4|$. Дно корыта горизонтально, так как коэффициенты перед x у модулей равны. Оно находится на высоте 6 при $-2 \leq x \leq 4$. Ветви корыта имеют наклон 1 и -1 . Следовательно, график функции выглядит следующим образом:



• $y = 2|x - 1| + |x + 2|$. Заметим, что в зависимости от того, какой модуль раскрыть, функция будет возрастающей или убывающей (так как коэффициент перед x у первого модуля больше, чем у второго). При $x \geq 1$ получим линейную функцию, коэффициент перед x которой будет положительным, при $x < 1$ получим линейную функцию, коэффициент перед x у которой будет отрицательным. Следовательно, графиком этой функции будет «корыто» с «кривым дном». Дно корыта: при $-2 \leq x \leq 1$, имеет наклон -1 . Получаем следующий график:



Объединение двух кусков парабол

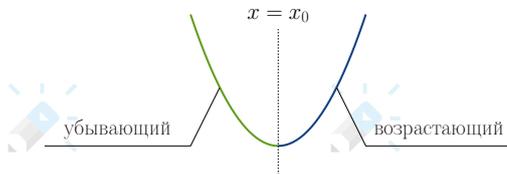
Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 + (4 + 2a)x - 8|x| - (a^2 + 4a)$.

Раскроем $|x|$. Получим

$$f(x) = \begin{cases} f_1 = 3x^2 + (2a + 12)x - (a^2 + 4a), & x < 0 \\ f_2 = 3x^2 + (2a - 4)x - (a^2 + 4a), & x \geq 0 \end{cases}$$

Таким образом, графиком функции $y = f(x)$ является объединение части параболы $y = f_1(x)$ при $x < 0$ (то есть левой части) и части параболы $y = f_2(x)$ при $x \geq 0$ (то есть правой части). Причем заметим, что параболы $y = f_1$ и $y = f_2$ пересекаются при $x = 0$, то есть эти части парабол «сходятся» в одной точке.

Рассмотрим произвольную параболу



Вертикальная прямая $x = x_0$, проходящая через вершину параболы, делит ее на два куска: убывающий и возрастающий.

Следовательно, мы можем взять две различные левые части:



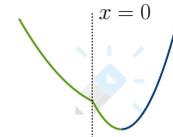
и две различные правые части:



Обозначим за x_1 абсциссу вершины параболы $y = f_1$, за x_2 — абсциссу вершины параболы $y = f_2$.

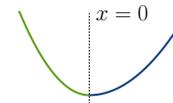
Комбинируя какую-то левую часть с какой-то правой частью, мы получим, что график функции $y = f(x)$ может принимать один из четырех видов:

Взяли убывающий кусок левой части и убывающе-возрастающий кусок правой части:



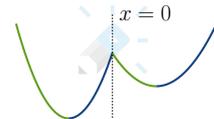
В этом случае $x = 0 < x_1$ и $x = 0 < x_2$.

Взяли убывающий кусок левой части и возрастающий кусок правой части:



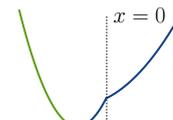
В этом случае $x = 0 < x_1$ и $x = 0 > x_2$.

Взяли убывающе-возрастающий кусок левой части и убывающе-возрастающий кусок правой части:



В этом случае $x = 0 > x_1$ и $x = 0 < x_2$.

Взяли убывающе-возрастающий кусок левой части и возрастающий кусок правой части:



В этом случае $x = 0 > x_1$ и $x = 0 > x_2$.

Задача из сборника Яценко 2023, Вариант 1

Задача: Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

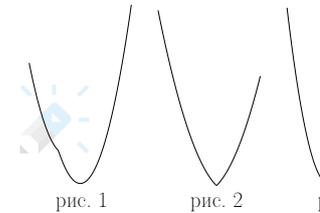
$$(a - x)^2 + 4a + 1 = (2x + 1)^2 - 8|x|$$

имеет ровно четыре различных решения.

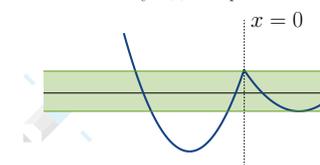
Решение: Перепишем уравнение в

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 3x^2 + (2a + 12)x - (a^2 + 4a), & x < 0 \\ f_2 = 3x^2 + (2a - 4)x - (a^2 + 4a), & x \geq 0 \end{cases}$$

График полученной совокупности объединение части параболы $y = f_1$ при $x < 0$, и части параболы $y = f_2$ при $x \geq 0$. Следовательно, может получиться несколько картинок:



Где бы ни находилась ось абсцисс $x = 0$, график будет иметь максимум с этой осью. Следовательно, может иметь максимум два корня. Нам



Этот рисунок задается следующей системой неравенств: $x_1 < 0 < x_2$.

Ось абсцисс должна находиться между прямой l_1 и прямой l_2 . Это значит, что прямые должны пересекать ось абсцисс (то есть l_1 и l_2 должны быть положительными (тогда ось абсцисс находится выше l_1) и значение $f_1(0) = f_2(0) > 0$).

В итоге получаем следующую систему неравенств:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \\ f_1(0) = f_2(0) > 0 \end{cases}$$

Отрезок

Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{x^2 + (y - 12)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144}.$$

Выясним, какой график на плоскости xOy оно задает. Вспомним, каким выражением задается расстояние между двумя точками на плоскости. Если у нас имеются две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то расстояние между ними равно выражению

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Вернемся к нашему уравнению. Рассмотрим точки $A(0; 12)$, $B(a; 0)$ и $M(x; y)$. Тогда мы имеем

$$MA = \sqrt{x^2 + (y - 12)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

$$AB = \sqrt{a^2 + 144}$$

Следовательно, наше уравнение имеет вид

$$MA + MB = AB$$

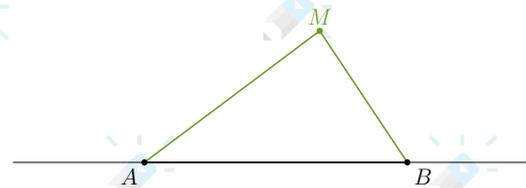
и говорит нам о том, что сумма длин отрезков MA и MB равна длине отрезка AB . Из точек A , B и M точки A и B фиксированы (да, одна координата точки B зависит от параметра, но при зафиксированном значении параметра точка B имеет конкретное фиксированное положение на плоскости xOy), а вот координаты точки M не определены на плоскости. Следовательно, нам нужно понять, где может находиться на плоскости точка M , чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B была равна длине отрезка AB . Множество положений точки M как раз и задаст нам тот график, который описывается нашим уравнением.

Есть три принципиально различных положения точки M относительно двух точек A и B :

- точка M может находиться вне прямой AB ;
- точка M может находиться на прямой AB , но вне отрезка AB ;
- точка M может находиться на отрезке AB .

Эти три ситуации мы и рассмотрим по отдельности и определим, может ли точка M находиться в каждом из таких положений или нет.

- Пусть M не лежит на прямой AB .



Тогда точки A , B и M образуют треугольник AMB . Мы знаем, что в любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны. Следовательно, для $\triangle AMB$ верно неравенство

$$MA + MB > AB.$$

Это неравенство противоречит нашему равенству $MA + MB = AB$. Следовательно, точка M не может лежать вне прямой AB .

- Пусть M лежит на прямой AB , но вне отрезка AB .



Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит на продолжении отрезка AB за точку A . Тогда по свойству длин отрезков мы получаем

$$MB - MA = AB.$$

Это равенство также не соответствует нашему равенству $MA + MB = AB$. Следовательно, точка M не может лежать на прямой AB вне отрезка AB .

- Пусть точка M лежит на отрезке AB .



Тогда по свойству длин отрезков мы получаем, что

$$MA + MB = AB.$$

Мы получили в точности то равенство, которое и имели. Учитывая, что мы взяли точку M в произвольном месте на отрезке AB , получаем, что наше равенство задает множество точек M , «путешествующих» по отрезку AB (естественно, точка M может совпасть с любой из точек A или B).

Задача из сборника Шестак

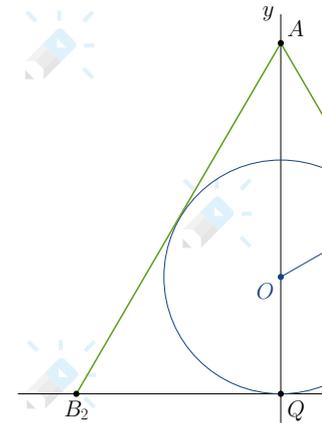
Задача: Найдите все значения параметра a , из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - 4)^2 = 16 \\ \sqrt{x^2 + (y - 12)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Первое равенство задает окружность с центром в точке $O(0; 4)$ и радиусом $R = 4$. Второе равенство задает сумму расстояний от точки $M(x; y)$ до точек $A(0; 12)$, $B(a; 0)$, равную длине отрезка AB . Следовательно, точка M , находящаяся на отрезке AB , удовлетворяет уравнению.

Положим $a = a_1$, тогда точка B будет касаться окружности в точке $A_1(0; 12)$. Следовательно, необходимо, чтобы точка пересечения с окружностью была симметрична относительно оси ординат, то есть находилась на оси ординат. Тогда если положение точки B задано значением параметра $a = a_1$, то положению B_2 со значением $a = -a_1$ соответствует та же окружность. Рассмотрим только случай $a > 0$.



$\triangle AQB_1 \sim \triangle AKO$, следовательно

$$\frac{QB_1}{OK} = \frac{AQ}{AK} \Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{12 - 4}{a}$$

Ромб и квадрат как его частный случай

Рассмотрим уравнение

$$|x - 1| + 2|y - 1| = 5.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$|y - 1| = \frac{1}{2}(5 - |x - 1|).$$

Построим в системе координат xOy график этого уравнения. Для этого раскроем модуль $|y - 1|$:

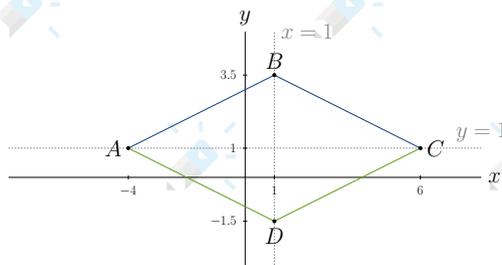
• если $y - 1 \geq 0$, то $|y - 1| = y - 1$, следовательно, уравнение примет вид

$$y = \frac{1}{2}(5 - |x - 1|) + 1;$$

• если $y - 1 < 0$, то $|y - 1| = -(y - 1)$, следовательно, уравнение примет вид

$$y = -\frac{1}{2}(5 - |x - 1|) + 1.$$

Следовательно, выше прямой $y = 1$ мы должны нарисовать часть уголка $y_1 = \frac{1}{2}(5 - |x - 1|) + 1$, а ниже прямой $y = 1$ — часть уголка $y_2 = -\frac{1}{2}(5 - |x - 1|) + 1$.



Так как ветвь AB уголка y_1 параллельна ветви CD уголка y_2 , а ветвь BC уголка y_1 параллельна ветви DA уголка y_2 , то мы получаем, что $ABCD$ — ромб. Заметим, что диагонали AC и BD этого ромба лежат на прямых $x = 1$ и $y = 1$, то есть нулях подмодульных выражений.

Если записать уравнение ромба $ABCD$ в виде

$$a|x - x_0| + b|y - y_0| = c,$$

то $\frac{c}{a}$ — длина половины диагонали AC , а $\frac{c}{b}$ — длина половины диагонали BD . Точка пересечения прямых

Задача с ромбом

Задача: Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x - a| + 2|y - a| = 5 \\ xy - x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение: Преобразуем второе равенство системы:

$$x(y-1) - (y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Следовательно, второе равенство системы задает объединение двух прямых: $x = 1$ и $y = 1$.

Рассмотрим первое равенство. При $y \geq a$ оно равносильно $y = -\frac{1}{2}|x - a| + \frac{5}{2} + a$, при $y < a$ равносильно $y = \frac{1}{2}|x - a| - \frac{5}{2} + a$. Следовательно, оно задает ромб $ABCD$, у которого:

- точка пересечения диагоналей AC и BD — пересечение прямых $x = a$ и $y = a$, то есть точка $O(a; a)$, которая движется по прямой $y = x$;
- $OC = 5 \Rightarrow AC = 10, OB = \frac{5}{2} \Rightarrow BD = 5$;
- диагонали AC и BD параллельны осям координат.

Заметим, что траектория движения точки O является биссектрисой углов, образованных пересечением прямых $x = 1$ и $y = 1$, следовательно, расстояния от точки O (где бы они ни находились на прямой $y = x$) до прямых $x = 1$ и $y = 1$ одинаковы. Тогда, так как точка C находится на большем расстоянии от точки O , чем точка B , то при перемещении точки O по прямой $y = x$ снизу вверх ромб $ABCD$ сначала пересечет прямую $x = 1$, а затем уже прямую $y = 1$.

Тогда распишем те положения ромба $ABCD$ относительно прямых $x = 1$ и $y = 1$, когда он имеет с ними 3 общие точки.

Рис. 1: вершина B лежит на прямой $y = 1$. Так как вершина B имеет координаты $(a; a + \frac{5}{2})$, то $a + \frac{5}{2} = 1$, откуда $a = -\frac{3}{2}$.

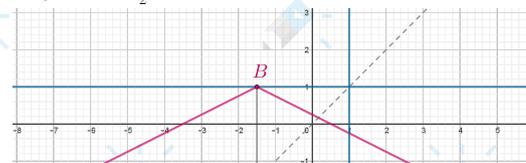


Рис. 2: точка пересечения прямых стороны BC ромба. Сторона BC уголка $y = -\frac{1}{2}|x - a| + \frac{5}{2} + a$, то есть $a) + \frac{5}{2} + a$, следовательно, точка $(1; 1)$ удовлетворяет уравнению:

$$1 = -\frac{1}{2}(1 - a) + \frac{5}{2} + a$$

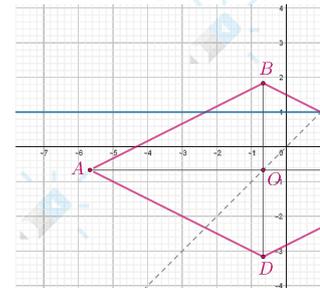


Рис. 3: точка пересечения прямых на стороне AD ромба. Сторона AD уголка $y = \frac{1}{2}|x - a| - \frac{5}{2} + a$, то есть $a) - \frac{5}{2} + a$, следовательно,

$$1 = -\frac{1}{2}(1 - a) - \frac{5}{2} + a$$

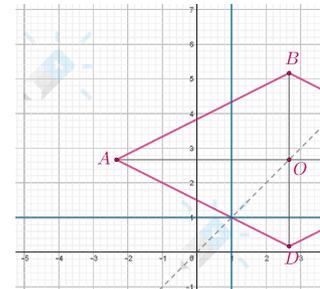
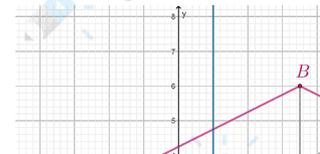


Рис. 4: вершина D лежит на прямой $y = 1$, а точка пересечения AD и $x = 1$ находится в точке $(1; 1)$, откуда $a = \frac{7}{2}$.



Касание прямой и параболы через производную

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых касаются друг друга графики функций

$$y = x^2 + 5 \quad \text{и} \quad y = ax + a^2$$

Решение. Графиком функции $y_1 = x^2 + 5$ является парабола. Графиком функции $y_2 = ax + a^2$ при каждом фиксированном a является прямая. Заданым с помощью производной условия касания прямой и параболы в точке с абсциссой x_0 :

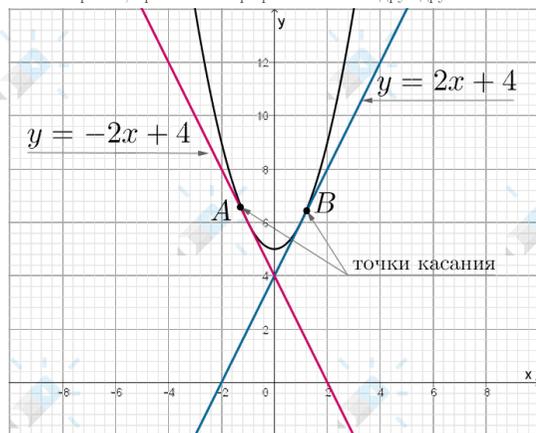
$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases}$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} x_0^2 + 5 = ax_0 + a^2 \\ 2x_0 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 5 = 2x_0^2 + 4x_0^2 \\ 2x_0 = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ a = 2 \\ x_0 = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Таким образом, при $a = \pm 2$ графики касаются друг друга.



Ответ: $a \in \{-2; 2\}$

Касание прямой и параболы через уравнение

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = (x - a)^2 + 3a \\ y = 2ax \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Система имеет единственное решение, когда прямая $y_2 = 2ax$ касается параболы $y_1 = (x - a)^2 + 3a$. Так как при каждом фиксированном a прямая $y_2 = 2ax$ не вертикальная (уравнение вертикальной прямой, то есть прямой, параллельной оси ординат, выглядит как $x = b$), то прямая y_2 и парабола y_1 касаются друг друга в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$y_1(x_0) = y_2(x_0)$$

имеет единственное решение.

Таким образом, уравнение

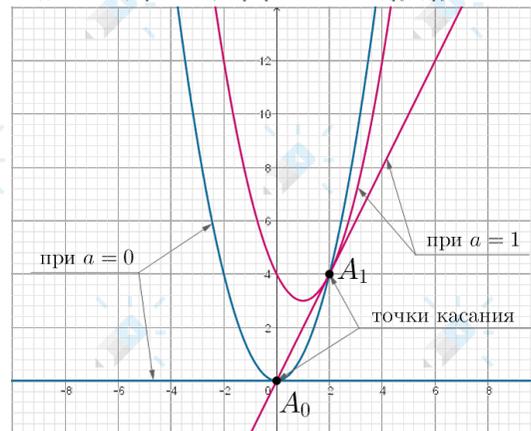
$$(x_0 - a)^2 + 3a = 2ax_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4ax_0 + a^2 + 3a = 0$$

должно иметь единственное решение, следовательно, его дискриминант должен быть равен нулю.

Имеем:

$$D = 4(3a^2 - 3a) = 0 \Leftrightarrow a = 0; 1$$

Следовательно, при $a = 0; 1$ графики касаются друг друга.



Ответ: $a \in \{0; 1\}$

Касание прямой и окружности расстояния

Задача. Найдите все значения параметра a , система

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 9 \\ -ax + y + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Графиком первого уравнения является окружность с центром в точке $O(1; 0)$ и радиусом $R = 3$. Система имеет единственное решение, если расстояние от центра окружности до

прямой l заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ равно радиусу R .

$$\rho(O, l) = R$$

Вспользуемся формулой поиска расстояния от центра O до прямой l , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$\rho(O, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Тогда в нашем случае это расстояние дол

Следовательно, имеем:

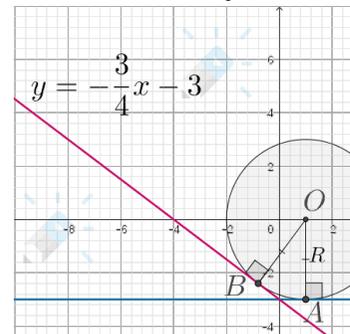
$$\rho(O, l) = \frac{|-a + 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$$

$$3\sqrt{a^2 + 1} = |a - 3| \Leftrightarrow$$

$$9a^2 + 9 = a^2 - 6a + 9$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Следовательно, при $a = -\frac{3}{4}; 0$ графики касаются.



A, B — точки касания

Касание прямой и окружности через геометрию

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

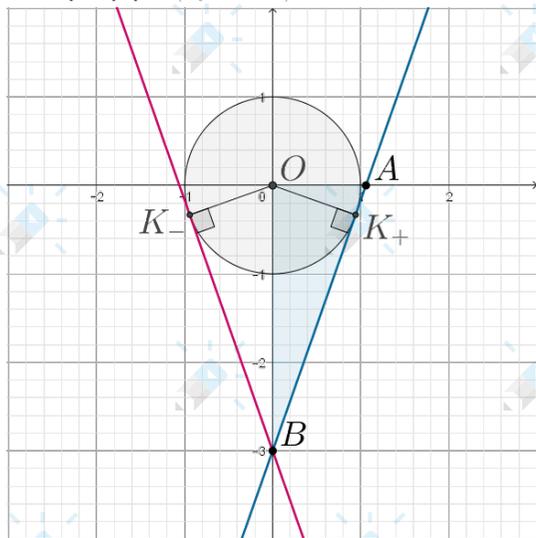
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = ax - 3 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Графиком первого уравнения является окружность с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом $R = 1$. Графиком второго уравнения является пучок прямых, проходящих через точку $B(0; -3)$, а при каждом фиксированном a графиком является прямая AB , где A — точка пересечения прямой с осью абсцисс.

Система имеет единственное решение, если прямая касается окружности.

Рассмотрим графики (случай $a > 0$):



Пусть K_+ — точка касания прямой и окружности. Тогда мы имеем прямоугольный $\triangle AOB$, в котором OK_+ — радиус, проведенный в точку касания, следовательно, OK_+ — высота этого треугольника, проведенная к гипотенузе. По свойству прямоугольного треугольника мы знаем, что

$$OK_+ \cdot AB = OA \cdot OB$$

Найдем эти отрезки. Чтобы найти отрезки OA и OB , надо найти точки пересечения прямой AB с осями координат:

$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow OB = 3$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{a} \Rightarrow OA = \frac{3}{a}$$

Касание прямой и окружности через уравнение

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых прямая

$$y = x - 2a$$

касается окружности

$$(x - a)^2 + (y + 2a)^2 = 4$$

Решение. Графики касаются друг друга, когда система

$$\begin{cases} y = x - 2a \\ (x - a)^2 + (y + 2a)^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Выразим y из первого уравнения и подставим во второе уравнение.

Тогда полученное уравнение

$$(x - a)^2 + (x - 2a + 2a)^2 = 4$$

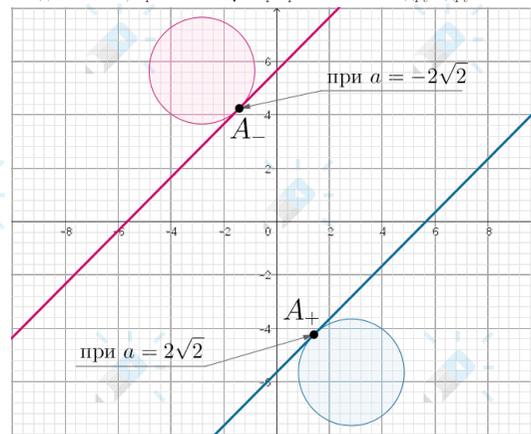
должно иметь единственное решение. Преобразуем его:

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$$

Получили квадратное уравнение, которое имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. Следовательно,

$$D = -4(a^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

Следовательно, при $a = \pm 2\sqrt{2}$ графики касаются друг друга.



Ответ: $a \in \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$

Касание прямой и окружности ч

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - 3a)^2 = 1 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Графиком первого уравнения является окружность с центром в точке $O(0; 3a)$ и радиусом $R = 1$. Графиком второго уравнения является пучок прямых, проходящих через точку $O(0; 3a)$, а при каждом фиксированном a графиком является прямая AO , где A — точка пересечения прямой с осью абсцисс. Система имеет единственное решение, если прямая касается окружности.

Верхнюю и нижнюю полуокружности можно записать в виде функций:

$$\text{верхняя: } y_{up} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{нижняя: } y_{down} = -\sqrt{1 - x^2}$$

Запишем условия касания прямой и графика функции $y = x_0$ через производную:

$$\begin{cases} y_{up}(x_0) = y(x_0) \\ y'_{up}(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

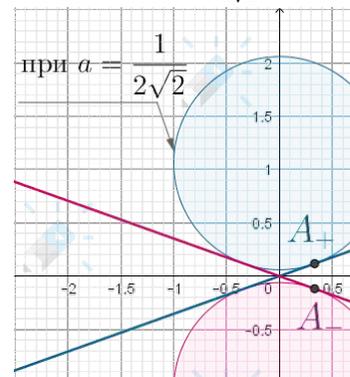
Тогда имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{1 - x_0^2} + 3a = ax_0 \\ -\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - x_0^2} = ax_0 - 3a \\ -\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}} = a \end{cases}$$

$$\text{Получаем } x_0 = \frac{1}{3} \text{ и } a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Записав аналогичную систему для прямой и графика функции y_{down} , получим $x_0 = \frac{1}{3}$ и $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Следовательно, при $a = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ графики касаются друг друга.



Касание прямой и параболы

Пусть дана система ($a \neq 0$)

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + n \end{cases}$$

и требуется записать условия, при которых система имеет единственное решение.

Это равносильно тому, что требуется записать условия, при которых прямая $y_1 = kx + n$ касается параболы $y_2 = ax^2 + bx + c$. Существуют два способа.

• Условие касание прямой и графика произвольной функции можно записать с помощью производной. Если x_0 — абсцисса точки касания прямой и параболы, то выполнена система

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx_0 + n = ax_0^2 + bx_0 + c \\ k = 2ax_0 + b \end{cases}$$

Выразив x_0 из второго уравнения и подставив в первое, мы получим уравнение, в котором будут участвовать только a, b, c, k, n .

• Так как графиком $y_1 = kx + n$ является невертикальная прямая, то условие касания прямой и параболы равносильно условию наличия единственной точки пересечения прямой и параболы. Для этого необходимо потребовать, чтобы уравнение

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow kx + n = ax^2 + bx + c$$

имело единственное решение. Так как уравнение квадратное, то дискриминант этого уравнения должен быть равен нулю. Так мы получим уравнение, в котором будут участвовать только a, b, c, k, n .

Касание прямой и параболы через производную

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \log_3(y - 3) - 2 \log_9 x = 0 \\ (x + a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x > 0 \\ y = \frac{1}{2}(x + a)^2 - \frac{5}{2}a \end{cases}$$

График $y = \frac{1}{2}(x + a)^2 - \frac{5}{2}a$ представляет собой параболу $y = \frac{1}{2}x^2$, вершина которой сдвинута в точку $O(-a; -\frac{5}{2}a)$, то есть движется по прямой $y = \frac{5}{2}x$ справа налево при увеличении a .

Действительно, для того, чтобы найти траекторию движения параболы, необходимо связать между собой абсциссу x и ординату вершины O . Тогда мы получим $-\frac{5}{2}a = -\frac{5}{2}(-a)$. При увеличении a

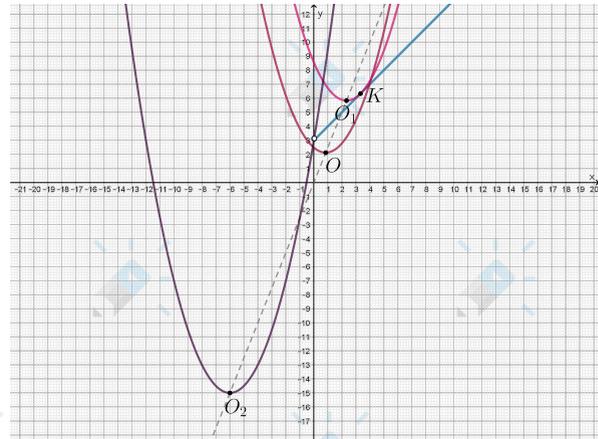
Графиком системы

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

является луч k прямой с началом в точке $(0; 3)$, находящийся в I четверти. Заметим, что положение луча не зависит от параметра.

Таким образом, требуется найти те a , при которых луч k имеет точки пересечения с параболой. Так как прямая и парабола могут иметь максимум две точки пересечения, то требуется найти те a , при которых луч k имеет 1 или 2 точки пересечения с параболой.

Граничные положения параболы, при которых она имеет хотя бы одну общую точку с лучом k , показаны на рисунке (параболы с вершинами в точках O_1 и O_2):



Действительно. Пусть a меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда сначала парабола находится выше луча и не имеет с ним общих точек, затем, когда вершина параболы находится в точке O_1 , она касается луча в точке K , затем парабола имеет две точки пересечения с лучом, затем одну (например, парабола с вершиной O на рисунке) до тех пор, пока вершина параболы не окажется в точке O_2 , когда правая ветвь параболы будет проходить через начало луча — точку $(0; 3)$.

«Положение O_1 »: парабола касается луча в точке K . Запишем условие касания параболы $y = \frac{1}{2}(x + a)^2 - \frac{5}{2}a$ и прямой $y_k = x + 3$ в точке $K(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_k(x_0) \\ y'(x_0) = y_k'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x_0 + a)^2 - \frac{5}{2}a = x_0 + 3 \\ x_0 + a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{7}{3}$$

«Положение O_2 »: парабола правой ветвью проходит через точку $(0; 3)$:

$$3 = \frac{1}{2}(0 + a)^2 - \frac{5}{2}a \Leftrightarrow a = -1; 6$$

Касание прямой и параболы через дискриминант

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x - a| + 3$$

имеет ровно три различных корня.

Решение. Рассмотрим функции $f_1 = |(x + 1)^2 - 4|$, $f_2 = |x - a| + 3$. Тогда уравнение имеет вид $f_1 = f_2$, следовательно, чтобы графики этих функций имели три точки пересечения, график $f_1 = |(x + 1)^2 - 4|$ (назовем его «птичка»

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

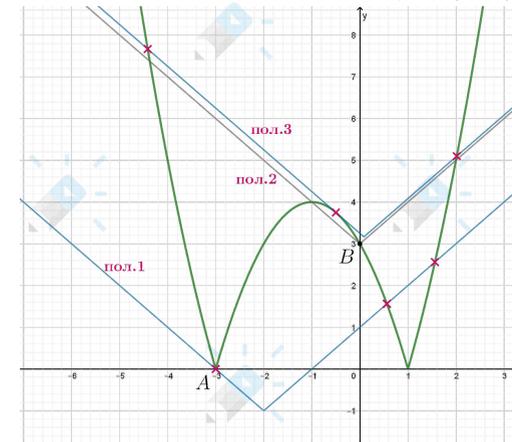
последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$

последовательно так: x^2 сдвиг на 1 влево и на 4 вниз $\rightarrow (x + 1)^2 - 4$ отражение нижней части $(x + 1)^2 - 4|$



Исследуем эти три положения. Левая ветвь уголка имеет $-x + 3a + 3, x < a$.

• Координаты точки $A(-3; 0)$ удовлетворяют уравнению $f_{left} = -x + 3a + 3$:

$$0 = 3 + 3a + 3 \Leftrightarrow a = -2$$

• Координаты точек $O(a; 2a + 3)$ и $B(0; 3)$ совпадают, то $a = 0$. Тогда точно есть две точки пересечения (с ветвью

При $a = 0$ левая ветвь уголка задается уравнением $f_{left,0} = -x + 3$, $x < 0$, следовательно, необходимо найти количество решений системы

$$\begin{cases} y = -x + 3, & x < 0 \\ y = -(x+1)^2 + 4, & -3 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Таким образом, есть общая точка с абсциссой $x = -1$ и всего точек пересечения четыре, значит, это положение нам не подходит. Двигая уголок выше вплоть до касания (положения 3), мы получаем также четыре точки пересечения.

- Запишем условие касания центральной части птички $f_c = -(x+1)^2 + 4$, $-3 < x < 1$, и левой ветви уголка $f_{left} = -x + 3a + 3$, $x < a$. Дискриминант уравнения

$$\begin{aligned} f_c = f_{left} &\Rightarrow \\ -(x+1)^2 + 4 = -x + 3a + 3 &\Leftrightarrow \\ x^2 + x + 3a = 0 & \end{aligned}$$

должен быть равен нулю:

$$D = 1 - 4 \cdot 3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{12}$$

Заметим, что в этом случае

$$x = -\frac{1}{2}$$

удовлетворяет условиям $-3 < x < 1$ и $x < a = \frac{1}{12}$.

Двигая уголок выше, мы получаем две точки пересечения.

Ответ: $a \in \left\{-2; \frac{1}{12}\right\}$

Касание прямой и окружности

Пусть дана система ($R > 0$)

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

и требуется записать условия, при которых система имеет единственное решение.

Это равносильно тому, что требуется записать условия, при которых прямая $l: ax + by + c = 0$ касается окружности $C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ с центром в точке $O(x_0; y_0)$ радиуса R . Существует четыре способа.

- С помощью формулы расстояния от точки $O(x_0; y_0)$ до прямой $l: ax + by + c = 0$:

$$\rho(O, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Этот способ основывается на определении касательной к окружности: если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая является касательной к окружности.

- Геометрический способ, в котором нам понадобится тригонометрия, угловой коэффициент прямой (и знание о том, что он равен тангенсу угла наклона прямой), свойства прямоугольного треугольника и его высоты, проведенной к гипотенузе.

Этот способ основывается на том, что радиус, проведенный в точку касания окружности и касательной, перпендикулярен касательной.

- Через уравнение. Выразив x или y из уравнения прямой $ax + by + c = 0$ и подставив в уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, мы получим уравнение, от которого требуется единственность решения.

- Через производную. Пусть мы знаем две вещи:

- прямая касается верхней или нижней полуокружности;
- прямая не является вертикальной, то есть можно выразить y через x .

Тогда можно записать уравнение, задающее нужную полуокружность:

$$\text{верхняя: } y = f(x) = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0$$

$$\text{нижняя: } y = f(x) = -\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0$$

и задать условия касания графика функции $y = f(x)$ и прямой l , записанной в виде $y_l = -\frac{1}{b}(ax + c)$, в точке $K(x; y)$:

$$\begin{cases} f(x) = y_l(x) \\ f'(x) = y'_l(x) \end{cases}$$

Касание прямой и окружности через формулы расстояния

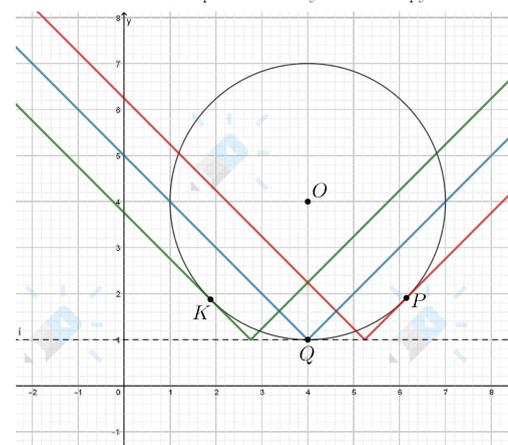
Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет три различных решения.

Решение. Первое уравнение задает окружность с центром $O(4; 4)$ и радиусом $R = 3$. Второе уравнение задает уголок, вершина которого движется по прямой $y = 1$ (заметим, что эта прямая касается окружности). Причем при изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ уголок движется слева направо. Три общие точки будут в следующих положениях:

- касание в точке K левой ветви уголка и окружности;
- вершина уголка находится в точке Q касания окружности и прямой $y = 1$;
- касание в точке P правой ветви уголка и окружности.



Если прямая касается окружности, то условие на это можно записать с помощью формулы расстояния от точки до прямой. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая является касательной к окружности. Для центра окружности $(x_0; y_0)$ радиусом R и прямой $l: Ax + By + C = 0$, получим

$$\rho(O, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

Следовательно, так как левая ветвь уголка задается уравнением $y_{left} = -x + a + 1$, то есть $y_{left} + x - a - 1 = 0$, правая ветвь задается уравнением $y_{right} = x - a + 1$, то есть $y_{right} - x + a - 1 = 0$, то получаем

$$K: 3 = \frac{|4 + 4 - a - 1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = 7 \pm 3\sqrt{2}$$

Для точки K нужно выбрать меньшее значение параметра (так как существует еще одно положение, когда левая ветвь касается окружности, и оно правее нужного нам положения), для точки P — большее значение параметра (по аналогичным причинам). Вершина уголка находится в точке $Q(4; 1)$, если $a = 4$.

Ответ: $a \in \{7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}\}$

Касание прямой и окружности через геометрию

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y = |a + 1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

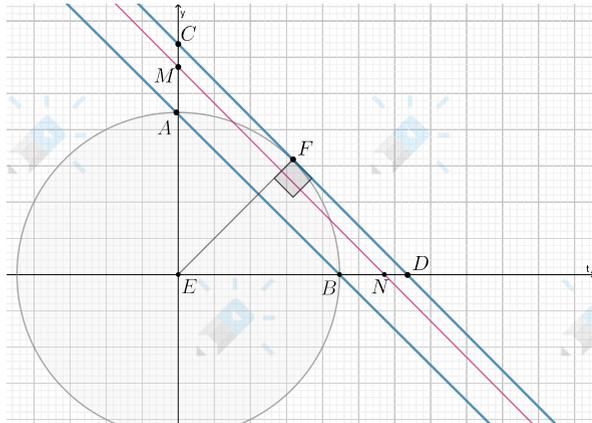
Решение. Пусть $x^2 = t$, тогда $t < 0$ не дает решений x , $t = 0$ дает одно решение $x = 0$, $t > 0$ дает два различных решения x . Система примет вид

$$\begin{cases} t^2 + y^2 = a^2 \\ t + y = |a + 1| \end{cases}$$

Первое уравнение задает либо точку, либо окружность. Случай с точкой не подходит, потому как тогда система максимум может иметь одно решение (одно решение, если точка удовлетворяет второму уравнению, и не имеет решений в противном случае).

Тогда нужно рассмотреть только случай, когда первое уравнение задает окружность с радиусом $R = |a|$, $a \neq 0$, а второе — прямую, задаваемую уравнением $y = -t + |a + 1|$. Окружность с прямой могут иметь 0, 1 или 2 точки пересечения. Следовательно, чтобы после обратной замены мы получили четыре решения, необходимо, чтобы прямая имела с окружностью две точки пересечения, абсциссы t которых положительны.

Нам подходят все прямые между AB и CD . Обозначим такие прямые как MN .



Выше прямой AB : $|a + 1| = EM > EA = R = |a|$.

Действительно, прямая $l: y = -t + |a + 1|$ пересекает ось ординат в точке $(0; |a + 1|)$, то есть для произвольной прямой MN отрезок $EM = |a + 1|$. Заметим также, что прямая AB проходит через точки пересечения окружности с положительными полуосями координат, то есть $EA = R = |a|$. Так как прямая MN находится выше прямой AB , то $EM > EA$. Отсюда $|a + 1| > |a|$.

Ниже прямой CD : $|a + 1| = EM < EC = CD : \sqrt{2} = 2EF : \sqrt{2} = \sqrt{2}R = \sqrt{2}|a|$.

Действительно, как мы уже сказали выше, $EM = |a + 1|$. Рассмотрим $\triangle ECD$. Он прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $CD = EC\sqrt{2}$. Отрезок EF — радиус окружности, проведенный в точку касания F , то есть высота треугольника ECD , проведенная к гипотенузе. Следовательно, она является и медианой. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, отсюда $CD = 2EF$. Но EF — радиус, следовательно, $EF = R = |a|$. Так как прямая MN находится ниже прямой CD , то $EM < EC$. Отсюда $|a + 1| < \sqrt{2}|a|$.

Следовательно,

$$|a| < |a + 1| < |a|\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 < (a + 1)^2 < 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a + 1)^2 > a^2 \\ (a + 1)^2 < 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} a < 1 - \sqrt{2} \\ a > 1 + \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-0,5; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$

Касание прямой и окружности через уравнение

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(x + 2y) = 5 - 5a^2 \\ y + \frac{1}{2}x = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем первое уравнение:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2a(x + 2y) &= 5 - 5a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + a^2 + 4a^2 &= 5 \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 &= 5 \end{aligned}$$

Оно задает окружность с центром в точке $O(a; 2a)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Второе уравнение системы задает прямую $y = -0,5x$. Система будет иметь единственное решение в том случае, если прямая и окружность касаются друг друга. Выразим x из уравнения прямой, получим $x = -2y$, и подставим в исходное уравнение окружности. Получим уравнение

$$(-2y)^2 + y^2 - 2a(-2y + 2y) = 5 - 5a^2 \Leftrightarrow y^2 = 1 - a^2,$$

которое должно иметь единственное решение, что выполняется, если

Касание прямой и окружности через производную

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 4 \\ y = ax - 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность с точке $(0; a)$ радиуса $R = 2$. Второе уравнение задает луч, проходящих через точку $(2; 0)$.

Прямая может касаться как верхней, так и нижней полуокружности. Определим те a , при которых $y = ax - 2a$ касается каждой из частей, через производную.

Касание с верхней полуокружностью, которая задается уравнением

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + a,$$

задается системой

$$\begin{cases} f(x) = y(x) \\ f'(x) = y'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} + a = ax - 2 \\ -\frac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = a \end{cases}$$

Подставив a из второго уравнения в первое, получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - x^2} &= -\frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{4 - x^2}} \Leftrightarrow 4 - x^2 = -x^2 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Тогда $a = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Касание с нижней полуокружностью, которая задается уравнением

$$g(x) = -\sqrt{4 - x^2} + a,$$

задается системой

$$\begin{cases} g(x) = y(x) \\ g'(x) = y'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{4 - x^2} + a = ax - 2 \\ \frac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = a \end{cases}$$

Подставив a из второго уравнения в первое, получаем:

$$\begin{aligned} -\sqrt{4 - x^2} &= \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{3x}{\sqrt{4 - x^2}} \Leftrightarrow -4 + x^2 = x^2 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Тогда $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $a \in \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}$

Заметим, что для этого способа рисунок не обязателен.

Суть метода xOa

Пусть дано уравнение, неравенство или система, зависящие от переменной x и параметра a .

Рассмотрим параметр a как переменную (точнее, как ординату, то есть как в обычных задачах мы рассматриваем переменную y). Построим в системе координат xOa множество S решений уравнения/неравенства/системы. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S , то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0 , то x_0 будет одним из решений уравнения/неравенства/системы.

Примеры условий задачи для системы:

- Найти a , при которых система имеет n решений.

Тогда нам требуется найти все такие значения a_0 параметра a , при каждом из которых n точек вида $(x_0; a_0)$ принадлежат множеству решений S , изображенному на плоскости xOa . Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет n точек пересечения с множеством S .

- Найти a , при которых множество решений системы принадлежит промежутку U .

Тогда нам требуется найти все такие значения a_0 параметра a , при каждом из которых точки вида $(x_0; a_0)$, принадлежащие множеству решений S , изображенному на плоскости xOa , имеют абсциссу $x_0 \in U$. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ пересекается с множеством S по множеству точек x_0 таких, что $x_0 \in U$.

Пример задачи с уравнением из сборника И.В. Яценко

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{a + 2x - 4}{x^2 - 2x - a} = 0$$

не имеет решений.

- Перепишем уравнение в виде

$$\begin{cases} a = -2x + 4 \\ a \neq x^2 - 2x \end{cases}$$

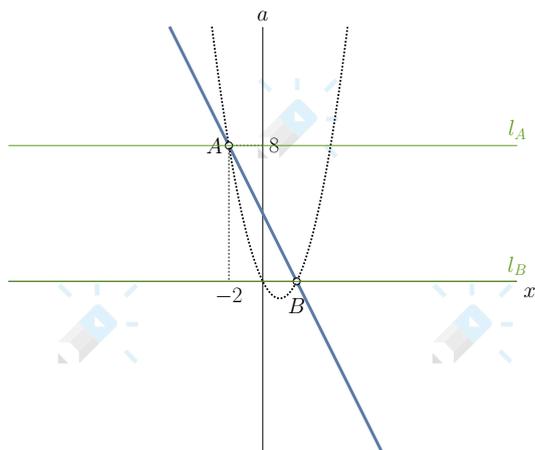
Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений системы. Если некоторая точка $(x_0; a_0)$ плоскости принадлежит множеству S , то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0 , то x_0 будет одним из решений системы, а значит, и исходного уравнения. Нам просят найти все такие значения a_0 параметра a , при каждом из которых не существует точек вида $(x_0; a_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, принадлежащих множеству решений S , изображенному на плоскости xOa . Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ не

Рассмотрим две функции: $a = a_1(x) = -2x + 4$ и $a = a_2(x) = x^2 - 2x$. Тогда множество S состоит из точек прямой $a = a_1(x)$ за вычетом точек пересечения этой прямой с параболой $a = a_2(x)$.

Найдем точки пересечения прямой и параболы:

$$\begin{cases} a = -2x + 4 \\ a = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ a = 8 \\ x = 2 \\ a = 0 \end{cases}$$

Следовательно, прямая и парабола пересекаются в точках $A(-2; 8)$ и $B(2; 0)$. Значит, множество S — это все точки прямой $a = a_1(x)$, кроме точек A и B . Изобразим это:



Таким образом l_A и l_B — две горизонтальные прямые, не имеющие точек пересечения с множеством S . Уравнение $l_A: a = 8$, уравнение прямой $l_B: a = 0$. Следовательно, ответ в задаче:

$$a \in \{0; 8\}$$

Пример задачи с неравенством

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$(a - 2^x)(a + x^2 + 2) \geq 0$$

не имеет решений.

- Неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} a \leq 2^x \\ a \leq -x^2 - 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a \geq 2^x \\ a \geq -x^2 - 2 \end{cases} \quad (2)$$

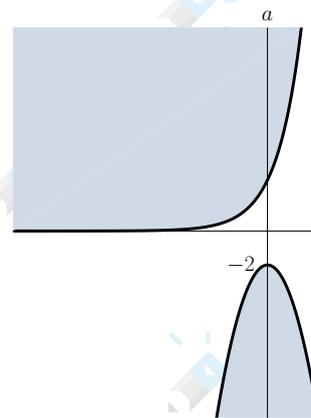
Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений совокупности систем. Если некоторая точка $(x_0; a_0)$ плоскости принадлежит множеству S , то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0 , то x_0 будет одним из решений совокупности, а значит, и исходного неравенства.

Нам просят найти все такие значения a_0 параметра a , при каждом из которых не существует точек вида $(x_0; a_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, принадлежащих множеству решений S , изображенному на плоскости xOa . Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ не имеет точек пересечения с множеством S .

Решение каждого неравенства системы (1) на плоскости xOa — это множество точек $(x; a)$, находящихся под графиками функций $a = 2^x$ и $a = -x^2 - 2$, включая сами графики. Следовательно, множество S_1 решений системы (1), изображенное в системе координат xOa , — это пересечение области, находящейся под графиком функции $a = 2^x$, включая сам график, и области, находящейся под графиком функции $a = -x^2 - 2$, включая сам график.

Аналогично множество S_2 решений системы (2), изображенное на плоскости xOa , — это пересечение области, находящейся над графиком функции $a = 2^x$, включая сам график, и области, находящейся над графиком функции $a = -x^2 - 2$, включая сам график.

Тогда множество S — это объединение множеств S_1 и S_2 .



Следовательно, горизонтальная прямая $a = a_0$, где $a_0 \in (-2; 0)$ имеет точки пересечения с закрашенной областью. Значит, от

$$a \in (-2; 0]$$

Пример задачи с системой из двух неравенств

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0 \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

► Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} a \leq -x^2 - 2x \\ a \geq \frac{x^2 - 4x}{6} \end{cases}$$

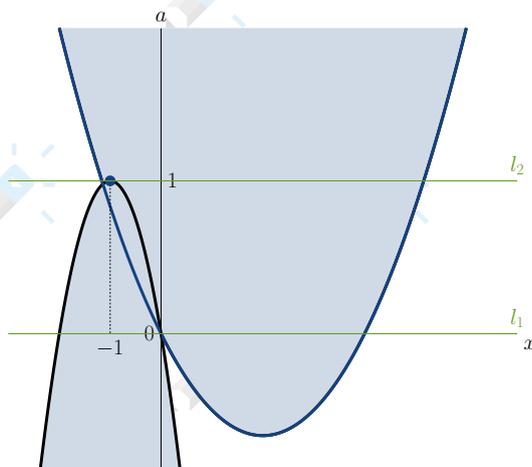
Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений системы. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S , то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0 , то x_0 будет одним из решений системы.

Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a , при каждом из которых ровно одна из точек вида $(x_0; a_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, принадлежит множеству решений S , изображенному на плоскости xOa . Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет ровно одну точку пересечения с множеством S .

Построим на плоскости множества решений каждого из неравенств системы, а затем найдем пересечение этих множеств.

- Множеством решений первого неравенства являются точки, лежащие не выше параболы $f(x) = -x^2 - 2x$.
- Множеством решений второго неравенства являются точки, лежащие не ниже параболы $g(x) = \frac{x^2 - 4x}{6}$.

Построим графики.



Убедимся, что вершина параболы f лежит выше параболы g . Ее координаты равны

$$x_1 = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1; \quad a_1 = f(-1) = 1$$

Так как $g(-1) = \frac{5}{6} < 1 = f(-1)$, то вершина параболы f действительно лежит выше параболы g .

Множеством S решений системы является пересечение внутренних областей парабол f и g , включая границы.

Только горизонтальные прямые $l_1 : a = 0$ и $l_2 : a = 1$ будут иметь с S ровно одну точку пересечения. При этом l_2 — касательная в вершине параболы f , а не прямая, проходящая через точку пересечения парабол.

Любая горизонтальная прямая ниже l_1 или выше l_2 не будет иметь пересечений с множеством S .

Прямые между l_1 и l_2 будут иметь больше одной точки пересечения с S .

Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a \in \{0; 1\}$

Задача из ЕГЭ 2022

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|7x + a| = x^2 + a^2 - x + 8a$$

имеет больше 2 различных решений.

► Рассмотрим данное уравнение в системе координат xOa . Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений данного уравнения. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S , то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0 , то x_0 будет одним из решений уравнения. Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a , при каждом из которых более двух точек вида $(x_0; a_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, принадлежит множеству решений S , изображенному на плоскости xOa . Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет более двух точек пересечения с множеством S .

В области $a \geq -7x$ модуль раскроется положительно и уравнение примет вид

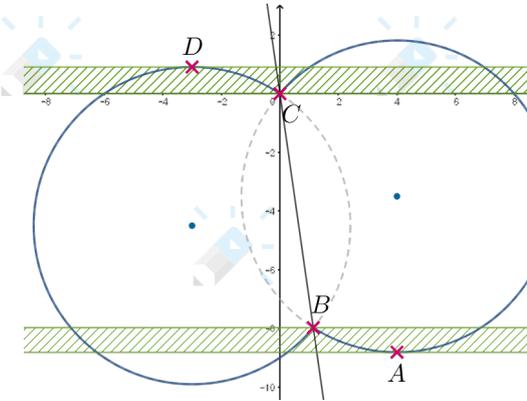
$$x^2 + a^2 - x + 8a - 7x - a = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + \left(a + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{113}{4}$$

То есть мы получим часть окружности, находящуюся не ниже прямой $a = -7x$.

В области $a < -7x$ модуль раскроется отрицательно и мы получим

$$x^2 + a^2 - x + 8a + 7x + a = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + \left(a + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{117}{4}$$

Построим графики.



Заметим, что

- самая высшая точка у правой окружности выше, чем у левой как $-\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{113}}{2} > -\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{117}}{2}$;
- самая низшая точка у левой окружности ниже, чем у правой как $-\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{117}}{2} < -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{113}}{2}$;
- окружности пересекаются в двух точках B и C на прямой $a = -7x$.

Все горизонтальные прямые $a = a_0$, находящиеся в заштрихованной области, то есть между горизонтальными прямыми через точки B и между горизонтальными прямыми через точки C и D , имеют 4 точки пересечения с областью S , которая является объединением двух частей окружностей. Следовательно, все значения параметра нам подходят.

Найдем ординаты точек A, D :

$$a_A = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{113}}{2}$$

$$a_D = -\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{117}}{2}$$

Ординаты точек B, C можно найти из пересечения какой-то из окружностей с прямой $a = -7x$:

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - x + 8a = 7x + a \\ 7x + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; a_C = 0 \\ x = \frac{57}{50}; a_B = \dots \end{cases}$$

Следовательно, подходят значения параметра

$$\left[-\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{113}}{2}; -\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{117}}{2} \right]$$