№15 из ЕГЭ прошлых лет. Оптимизация

№1

Пенсионный фонд владеет акциями, стоимость которых равна t^2 тысяч рублей в конце каждого года t $(t = 1; 2; \dots)$. Фонд может продать все акции в конце некоторого года и положить все вырученные с продажи средства на счет в банке. Известно, что тогда в конце каждого следующего года банк будет увеличивать сумму, находящую на счете, на 20%. В конце какого года фонд должен продать акции, чтобы прибыль к концу 30-го года была максимальной?

Ответ

В конце 11-ого года

Решение

Каждый год банк увеличивает сумму на счету на 20%, то есть в 1,2 раза. Если же фонд все еще держит акции, то их цена после t-ого года увеличивается в

$$\frac{(t+1)^2}{t^2} = \left(\frac{t+1}{t}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 \text{ раз}$$

Этот коэффициент уменьшается с ростом t. Значит, если при каком-то t он стал меньше 1,2, то в каждый следующий год, начиная с $(t+1)$-ого, вклад в банке будет приносить большую прибыль. В то же время до $(t+1)$-ого года акции будут приносить большую прибыль.

Значит, нам нужно найти такое значение t, при котором

$$\frac{(t+1)^2}{t^2} \leqslant 1{,}2 < \frac{t^2}{(t-1)^2}$$

То есть нужно найти такой год, после которого акции вырастут больше чем в 1,2 раза, но после следующего — меньше чем в 1,2 раза.

Заметим, что

$$\frac{11^2}{10^2} = \frac{121}{100} = 1{,}21 > 1{,}2$$

Но уже $\dfrac{12^2}{11^2} < 1{,}2$, так как $121 \cdot 1{,}2 = 145{,}2 > 144$.

Таким образом,

$$\frac{12^2}{11^2} < 1{,}2 < \frac{11^2}{10^2}$$

Значит, акции нужно продать в конце 11-ого года.

№2

Строительство нового завода стоит 340 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}3x^2+x+12$ млн рублей в год.

Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0{,}3x^2+x+12)$. Когда завод будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы годовая прибыль была наибольшей.

В первый год после постройки завода цена продукции $p=14$ тыс. рублей за единицу. Каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Ответ

3

Решение

Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит

$$px-\big(0{,}3x^2+x+12\big)$$

Найдем x, при котором годовая прибыль будет наибольшей при цене p тыс. рублей за единицу продукции.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=px-\big(0{,}3x^2+x+12\big)=-0{,}3x^2+x(p-1)-12$$

Это квадратичная функция, она достигает наибольшего значения при

$$x=x_0=\frac{p-1}{0{,}6}$$

Далее имеем:

$$f(x_0)=-0{,}3\Big(\frac{p-1}{0{,}6}\Big)^2+\frac{p-1}{0{,}6}(p-1)-12=\frac{(p-1)^2}{1{,}2}-12$$

Прибыль фирмы (в млн рублей) при цене $p=14$ тыс. рублей за единицу продукции за первый год составит

$$\frac{(14-1)^2}{1{,}2}-12=128\frac{5}{6}$$

Прибыль фирмы (в млн рублей) при цене $p=15$ тыс. рублей за единицу продукции за второй год составит

$$\frac{(15-1)^2}{1{,}2}-12=151\frac{1}{3}$$

Прибыль за 2 года меньне 340 млн рублей.

Прибыль фирмы (в млн рублей) при цене $p=16$ тыс. рублей за единицу продукции за второй год составит

$$\frac{(16-1)^2}{1{,}2}-12=175\frac{1}{2}$$

Суммарная прибыль за 3 года больше 340 млн рублей. Строительство завода окупится за 3 года.

№3

Производство x единиц продукции обходится в $q = x^2 + 6x + 10$ рублей в месяц. При цене 500 рублей за единицу месячная прибыль от продажи этой продукции составляет $500x - q$ рублей. Сколько единиц продукции нужно ежемесячно выпускать для получения максимальной прибыли?

Ответ

247

Решение

Подставим стоимость производства x единиц продукции q в формулу прибыли:

$$500x - q = 500x - x^2 - 6x - 10 = -x^2 + 494x - 10$$

Очевидно, что максимальная прибыль достигается в максимуме функции

$$f(x) = -x^2 + 494x - 10$$

Так как это квадратичная функция, то ее график — парабола с ветвями вниз, так как коэффициент перед x^2 отрицательный.

При этом значение x, в котором достигается максимум, можно найти двумя способами.

Способ 1.

Вершина параболы находится по формуле

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{494}{2 \cdot (-1)} = 247$$

Способ 2.

Найдем производную

$$f'(x) = -2x + 494$$

В точке экстремума производная равна нулю, значит искомый x будет решением уравнения

$$-2x + 494 = 0, \quad x = \frac{494}{2} = 247$$

№4

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0{,}5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p=10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Ответ

за 4 года

Решение

Найдем такое количество производимой продукции x, при котором прибыль фирмы будет наибольшей при фиксированном p. Для этого нам нужно найти максимум выражения $px-(0{,}5x^2+2x+6)$.

$$\begin{aligned} &px-\left(0{,}5x^2+2x+6\right)=-0{,}5x^2+(p-2)x-6= \\ &=-0{,}5\left(x^2-2(p-2)x+12\right)= \\ &=-0{,}5\left(x^2-2(p-2)x+(p-2)^2-(p-2)^2+12\right)= \\ &=-0{,}5(x-p+2)^2+0{,}5(p-2)^2-6 \end{aligned}$$

Заметим, что $-0{,}5(x-p+2)^2\leqslant 0$, поэтому

$$-0{,}5(x-p+2)^2+0{,}5(p-2)^2-6\leqslant 0{,}5(p-2)^2-6$$

Значит, максимальное значение выражения $px-(0{,}5x^2+2x+6)$ равно $0{,}5(p-2)^2-6$ и достигается при

$$x-p+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=p-2$$

То есть за каждый год фирма будет зарабатывать $0{,}5(p-2)^2-6$ млн рублей.

В первый год $p=10$. Тогда прибыль фирмы за этот год составит $0{,}5(10-2)^2-6=26<159$ млн рублей.

Прибыль фирмы за второй год составит $0{,}5(11-2)^2-6=34,5$ млн рублей, так как $p=11$. Значит, за первые два года фирма заработает $26+34{,}5=60{,}5<159$ млн рублей.

Прибыль фирмы за третий год — $0{,}5(12-2)^2-6=44$ млн рублей, так как $p=12$. Значит, за первые три года фирма заработает $60{,}5+44=104{,}5$ млн рублей.

Прибыль фирмы за четвертый год — $0{,}5(13-2)^2-6=54{,}5$ млн рублей, так как $p=13$. Всего за первые четыре года фирма заработает $104{,}5+54{,}5=159$ млн рублей. Значит, строительство окупится за 4 года.

№5

Строительство нового аквапарка стоит 40 млн рублей. Затраты на обслуживание x тысяч посетителей составляют $\frac{2}{3}x^2+5x+3{,}5$ млн рублей в год. Если билеты продавать по цене P тыс. рублей за штуку, то прибыль аквапарка в млн рублей за один год составит $Px-\left(\frac{2}{3}x^2+5x+3{,}5\right)$. Когда аквапарк будет построен, он будет принимать посетителей в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей (желающих будет предостаточно). При каком наименьшем значении P строительство аквапарка окупится не более чем за 4 года?

Ответ

11

Решение

Так как строительство аквапарка должно окупиться не более чем за 4 года, то прибыль за 4 года должна составить не менее 40 млн руб. То есть цена P должна быть такой, чтобы существовало какое-нибудь решение неравенства

$$\begin{gathered}4\left(Px-\left(\dfrac{2}{3}x^2+5x+3{,}5\right)\right)\geqslant 40\quad\Leftrightarrow\quad Px-\left(\dfrac{2}{3}x^2+5x+3{,}5\right)\geqslant 10\\ -\dfrac{2}{3}x^2+(P-5)x-3{,}5\geqslant 10\quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{2}{3}x^2-(P-5)x+13{,}5\leqslant 0\end{gathered}$$

График левой части последнего неравенства при всяком фиксированном P представляет собой параболу с ветвями, направленными вверх. Тогда у последнего неравенства есть решение тогда и только тогда, когда вершина соответствующей параболы лежит не выше оси Ox, то есть $y_{\text{в}}\leqslant 0$:

$$\frac{2}{3}\cdot\big(0{,}75(P-5)\big)^2-(P-5)\cdot\big(0{,}75(P-5)\big)+13{,}5\leqslant 0$$

Это равносильно

$$\frac{3}{8}(P-5)^2\geqslant 13{,}5\quad\Leftrightarrow\quad (P-5)^2\geqslant 36$$

Отсюда с учётом условия $P>0$ получим $P\geqslant 11$.

Таким образом, минимальная цена билета, при которой аквапарк имеет шанс окупиться за 4 года (при наличии достаточного количества желающих его посетить), составляет $P=11$ тыс. рублей.

№6

В январе 2014 года процентная ставка по депозитам в банке составила $x\%$ годовых, а в январе 2015 года — $y\%$ годовых. Вкладчик положил на счет в этом банке в январе 2014 года некоторую сумму денег в рублях. В январе 2015 года, спустя год после открытия счета, он снял со счета пятую часть от той суммы, которую положил в 2014 году. Найдите значение x, при котором сумма на счете в январе 2016 года будет наибольшей, если известно, что $x + y = 30$.

Ответ

25

Решение

Пусть вкладчик положил на счет A рублей. Тогда спустя год, то есть в 2015 году, на счете уже будет в рублях

$$(1 + 0,01x)A$$

Затем вкладчик снял со счета $\frac{1}{5}A$, следовательно, на счете осталось в рублях

$$(1 + 0,01x)A - \frac{1}{5}A$$

Тогда в январе 2016 года на счете будет сумма в рублях:

$$\begin{aligned}&(1 + 0,01y)\big((1 + 0,01x)A - \frac{1}{5}A\big) = \\ &= (1 + 0,01y)(1 + 0,01x - 0,2)A\end{aligned}$$

Выразим по условию $y = 30 - x$ и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}f(x) &= (1 + 0,01(30 - x))(1 + 0,01x - 0,2) = \\ &= \frac{1}{10^4} \cdot (-x^2 + 50x + 130 \cdot 80)\end{aligned}$$

Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Следовательно, наибольшее значение она принимает в вершине

$$x_0 = \frac{-50}{-2} = 25$$

Таким образом, наибольшая сумма на счете в январе 2016 года будет при $x = 25$.