Кредитование: аннуитетная система

Вы взяли кредит в банке на некоторую сумму денег S под определенный процент $r\%$ годовых.
Аннуитетные платежи – это такая система выплат, при которой кредит выплачивается ежегодно (ежемесячно) равными платежами x. При этом каждый год (месяц) банк начисляет на оставшуюся часть долга некоторый процент $r\%$, то есть оставшаяся сумма долга увеличивается в $p = 1 + 0,01r$ раз. После этого уже клиент вносит платеж x в счет погашения кредита.

Пример

Клиент взял 546 тыс. рублей в банке под 20% годовых и должен погасить его через 3 года равными ежегодными платежами.
Составьте таблицу, отслеживающую изменение долга.
Сколько тыс. рублей составил ежегодный платеж?
Сколько тыс. рублей составила общая сумма выплат по данному кредиту?
Сколько тыс. рублей составила переплата по данному кредиту?

Как решать подобные задачи? Рассмотрим несколько рекомендаций по вводу неизвестных и составлению таблицы.

- Чаще всего удобно в таблице вместо данной суммы, взятой в кредит, использовать неизвестную, например, S тыс. рублей. С ней будем заполнять столбец «Сумма долга до начисления %».
- Столбец «Сумма долга после начисления %» удобно заполнять в виде $p\cdot$ «сумма долга», где $p = 1 + \frac{r}{100}$, r — число процентов годовых.

В нашем случае, например, первая строка в этом столбце будет равна $S + \frac{20}{100}\cdot S = S + 0,2S = S(1+0,2) = 1,2S$. Следующие строки в этом столбце, введя $p = 1 + \frac{20}{100} = 1,2$, будем записывать как $1,2\cdot$ «сумма долга до начисления %».

- Платеж (выплата) всегда одинаковый, так как это — аннуитетная система кредитования, следовательно, его обозначаем за x тыс. рублей.

Составим таблицу, отслеживающую долг:

Здесь всегда сумма, взятая в кредит

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Выплата	Сумма долга после платежа
1	$\boxed{S}$	$1,2\cdot S$	x	$1,2S - x$
2	$1,2\cdot S - x$	$1,2(1,2\cdot S - x)$	x	$1,2(1,2S - x) - x$
3	$1,2(1,2\cdot S - x) - x$	$1,2(1,2(1,2\cdot S - x) - x)$	x	$\boxed{1,2(1,2(1,2S - x) - x) - x}$

Это выражение всегда равно нулю

- После последнего платежа долг равен нулю, следовательно,

$$1,2(1,2(1,2\cdot S - x) - x) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1,2^3\cdot S - \underbrace{(1,2^2 + 1,2 + 1)}_{\text{сумма геом. прогрессии}}\cdot x = 0$$

Это то уравнение, которое вы всегда получаете в итоге после заполнения таблицы в случае аннуитетных платежей.
Из полученного уравнения легко выражается ежегодный платеж x :

$$x = \frac{1,2^3}{1,2^2 + 1,2 + 1}\cdot S$$

$$x = \frac{1,2^3}{3,64}\cdot 546$$

$$x = 259,2$$

Ежегодный платеж равен 259,2 тыс. рублей.

Продолжение примера

• Общая сумма выплат — это сумма всех платежей по кредиту. В нашем случае это всегда будет $n \cdot x$, где n — число лет (месяцев), на которое взят кредит.

Платеж
$+\ x$
$+\ x$
x
$=$ Общая сумма выплат

Следовательно, нужно найти $3x$. Получаем

$$\text{Общая сумма выплат} = 3x = 777,6\ (\text{тыс.рублей})$$

• Переплата по кредиту — это сумма, равная общей сумме выплат за вычетом суммы, взятой в кредит:

$$\text{Общая сумма выплат} - \text{Кредит} = \text{Переплата}$$

Следовательно, это $n \cdot x - S$.
Значит, нужно найти $3x - S$:

$$\text{Переплата} = 3x - S = 777,6 - 546 = 231,6\ (\text{тыс. рублей})$$

Типичные ошибки. Рекомендации

- Пусть в условии сказано, что процентная ставка составляет $r\%$ годовых. При решении необходимо ввести новую неизвестную p вместо $0,01r$ или вместо $1 + 0,01r$.
- Будет ошибкой: использовать без вывода формулы, не представленные в официальных учебниках, например, формулы для платежа, для долга после последней выплаты; не демонстрировать арифметическую или геометрическую прогрессии, если они есть, и т.п.
- Рекомендуют оформлять изменения, происходящие с суммой долга/вклада, с помощью таблицы. Столбцы подписывать так, чтобы было понятно проверяющим. Названия столбцов видны на примере.
- В задачах не может быть никакого округления значений переменных, если об этом не сказано в условии. Поэтому, если вы, например, получили нецелое число лет n — ищите у себя ошибку либо в самой модели, либо арифметического характера.
- Некоторые проценты в десятичном виде удобнее использовать в виде рациональной дроби. Например, 125% как $\frac{5}{4}$, $112,5\%$ как $\frac{9}{8}$, 120% как $\frac{6}{5}$.
- Не ленитесь использовать слова, объясняющие ваши действия при решении: «чтобы найти переплату, нужно из суммы всех платежей вычесть сумму, взятую в кредит»; «здесь мы получили сумму арифметической прогрессии, я буду вычислять ее по такой-то формуле» и т.д.

Кредитование: дифференцированная система

Вы взяли в кредит определенную сумму денег S под определенный процент годовых.

Дифференцированные платежи — это система выплат, при которой сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый год. При этом платежи каждый год разные.
Таким образом, если в кредит взята сумма S на n лет под $r\%$ процентов годовых, это означает, что

- каждый год на текущий долг начисляются проценты, то есть долг увеличивается на величину $k\cdot$ «текущий долг», где $k=0,01\cdot r$;
- платежи состоят из двух частей: первая часть — это начисленные проценты, вторая — сумма S, разделенная на n равных частей.
  Тогда долг каждый год уменьшается на $\frac{1}{n}S$.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	S	$S+k\cdot S$	$k\cdot S+\frac{1}{n}S$	$S-\frac{1}{n}S$
2	$S-\frac{1}{n}S=\frac{n-1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S+k\cdot\frac{n-1}{n}S$	$k\cdot\frac{n-1}{n}S+\frac{1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S-\frac{1}{n}S$
3	$S-\frac{2}{n}S=\frac{n-2}{n}S$	$\frac{n-2}{n}S+k\cdot\frac{n-2}{n}S$	$k\cdot\frac{n-2}{n}S+\frac{1}{n}S$	$\frac{n-2}{n}S-\frac{1}{n}S$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
k	$S-\frac{k-1}{n}S=\frac{n-k+1}{n}S$	$\frac{n-k+1}{n}S+k\cdot\frac{n-k+1}{n}S$	$k\cdot\frac{n-k+1}{n}S+\frac{1}{n}S$	$\frac{n-k+1}{n}S-\frac{1}{n}S$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$S-\frac{n-1}{n}S=\frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S+k\cdot\frac{1}{n}S$	$k\cdot\frac{1}{n}S+\frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S-\frac{1}{n}S=0$

Пример, где встречается

Клиент взял в банке кредит на некоторую сумму S рублей на 3 года под 15% годовых. Выплачивать кредит он должен ежегодными платежами так, чтобы каждый год сумма долга уменьшалась равномерно.
Составьте таблицу, демонстрирующую изменения, происходящие с суммой долга.
Чему равно S, если оказалось, что в итоге клиент заплатил банку 390 000 рублей?

- Если кредит взят на n лет, то сумма долга каждый год уменьшается равномерно на $\frac{1}{n}$ часть от суммы, взятой в кредит, то есть на $\frac{1}{n}S$.

Так как в нашем случае кредит взят на 3 года, значит, тело долга S разделили на 3 равные части и долг должен каждый год уменьшаться на $\frac{1}{3}S$.
Следовательно, после первой выплаты долг должен составлять $S-\frac{1}{3}S=\frac{2}{3}S$ рублей, после второй выплаты долг будет равен $\frac{2}{3}S-\frac{1}{3}S=\frac{1}{3}S$ рублей, а после последней третьей долг будет равен $\frac{1}{3}S-\frac{1}{3}S=0$.
Таким образом, первым делом мы можем заполнить столбцы «Сумма долга до начисления %» и «Сумма долга после платежа».

- Столбец «Сумма долга после начисления %» стоит заполнять в виде «текущий долг» + «начисленные на него $r\%$».

В общем виде это выглядит так: «текущий долг» $+\,k\cdot$ «текущий долг», где $k=0,01r$. В нашем случае $k=0,15$.

- Как удобнее находить платеж?

Представим, что мы вносим платеж всегда двумя частями: сначала — проценты, начисленные на долг (те самые $k\cdot$ «текущий долг»), а затем оставшуюся часть платежа.
Первый платеж строится так: сначала мы вносим $0,15S$, тем самым наш долг снова становится равен S. Так сколько нужно еще выплатить банку, чтобы долг стал равен $\frac{2}{3}S$? Ту самую $\frac{1}{3}S$.
Второй платеж строится так: долг стал равен $\frac{2}{3}S$, вносим сначала начисленные проценты $0,15\cdot\frac{2}{3}S$, долг становится снова равен $\frac{2}{3}S$, и теперь, чтобы долг стал равен $\frac{1}{3}S$, нужно снова внести $\frac{1}{3}S$.
Третий платеж строится так: долг равен $\frac{1}{3}S$, вносим сначала начисленные проценты $0,15\cdot\frac{1}{3}S$, долг становится снова равен $\frac{1}{3}S$, и теперь, чтобы долг стал равен 0, нужно снова внести $\frac{1}{3}S$.
Следовательно, все платежи в нашем случае будут выглядеть как $0,15\cdot$ «текущий долг» $+\,\frac{1}{3}S$.

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Платеж	Сумма долга после платежа
1	S	$S+0,15S$	$0,15\cdot S+\frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}S$
2	$\frac{2}{3}S$	$\frac{2}{3}S+0,15\cdot\frac{2}{3}S$	$0,15\cdot\frac{2}{3}S+\frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}S$
3	$\frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}S+0,15\cdot\frac{1}{3}S$	$0,15\cdot\frac{1}{3}S+\frac{1}{3}S$	0

Начисленные проценты, составляют арифм. прогрессию с разностью $-0,15\cdot\frac{1}{3}S$

Части, на которые уменьшается тело долга

Можно сказать по-другому: все платежи образуют арифметическую прогрессию с разностью $-0,15\cdot\frac{1}{n}S$.

Продолжение примера

То, что в итоге клиент заплатил банку, является общей суммой выплат.

- Общая сумма выплат — это сумма всех платежей по кредиту. В случае дифференцированных платежей это всегда будет

$$kS\cdot\underbrace{\left(1+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{\text{сумма арифм. прогрессии: } a_1=\frac{1}{n},\, a_n=1}+S=kS\cdot\underbrace{\frac{n+1}{2}}_{=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n}+S,$$

где $k=0,01r$ — проценты $r\%$, переведенные в десятичный вид, n — количество лет, на которое взят кредит.
Получаем таким образом в нашем случае для $n=3,\ k=0,15$:

$$\boxed{\text{Общая сумма выплат}}=\underbrace{0,15\cdot S\cdot\overbrace{\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}^{\text{сумма арифм. прогрессии}}}_{\text{начисленные проценты}}+\underbrace{S}_{=\frac{1}{3}S+\frac{1}{3}S+\frac{1}{3}S}$$

- Переплата по кредиту — это сумма, равная общей сумме выплат за вычетом суммы, взятой в кредит, что в случае дифференцированных платежей равно сумме процентов, начисленных на долг во все годы.

$$\boxed{\text{Переплата}=\text{Общая сумма выплат}-\text{Кредит}=\text{Сумма начисленных процентов}}$$

В нашем случае столбец платежей имеет следующий смысл:

Платеж
$0,15\cdot S+\frac{1}{3}S$
$0,15\cdot\frac{2}{3}S+\frac{1}{3}S$
$0,15\cdot\frac{1}{3}S+\frac{1}{3}S$

Складываем отдельно, получаем Переплату

Складываем отдельно, получаем Сумму S, взятую в кредит

Найдем S, если общая сумма выплат по кредиту составила 390 000 рублей:

$$0,15S\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+S=390\,000\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{100}\cdot\frac{\frac{1}{3}+1}{2}\cdot 3\cdot S+S=390\,000\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{10}\cdot S=390\,000\quad\Leftrightarrow$$

$$S=300\,000\ (\text{рублей})$$

Типичные ошибки. Рекомендации

- Некоторые проценты в десятичном виде удобнее использовать в виде рациональной дроби.
  Например, для $r\%=25\%$ имеем $k=\frac{1}{4}$, для $r\%=12,5\%$ имеем $k=\frac{1}{8}$, для $r\%=20\%$ имеем $k=\frac{1}{5}$.
- Рекомендуют оформлять изменения, происходящие с суммой долга, с помощью таблицы. Столбцы подписывать так, чтобы было понятно проверяющим. Названия столбцов видны на примере.
- Вводите неизвестные, которые вы собираетесь использовать в таблице, вместе с их единицами измерения. Например, если не дана сумма, взятая в кредит, вводим: "пусть S рублей — сумма, взятая в кредит".
- В задачах не может быть никакого округления значений переменных, если об этом не сказано в условии. Поэтому, если вы, например, получили нецелое число лет n — ищите у себя ошибку либо в самой модели, либо арифметического характера.
- Не ленитесь использовать слова, объясняющие ваши действия при решении: "чтобы найти переплату, нужно из суммы всех платежей вычесть сумму, взятую в кредит"; "здесь мы получили сумму арифметической прогрессии, я буду вычислять ее по такой-то формуле", "платежи составляют арифметическую прогрессию, где первый член такой-то, последний — такой-то, следовательно, их сумму можно находить по формуле суммы арифметической прогресии" и т.д.
- Будет ошибкой: использовать без вывода формулы, не представленные в официальных учебниках, например, формулы для общей суммы выплат, переплаты; не демонстрировать арифметическую или геометрическую прогрессии, если они есть, и т.п.

Банковский вклад

Банковский вклад — это сумма денег, переданная банку на хранение с целью получить доход в виде начисленных процентов. Пусть вы положили в банк на хранение S рублей.
Раз в какой-то промежуток времени (в задачах это, как правило, месяц или год) банк начисляет на текущую сумму некоторое количество r процентов. Следовательно, можно сказать, что после первого начисления процентов сумма на вашем счету увеличивается на $0,01r \cdot S$ рублей, либо же сказать, что сумма на вашем счету увеличивается в $\frac{100+r}{100} = 1 + 0,01r$ раз. То есть после первого начисления процентов на вашем счету будет $(1 + 0,01r) \cdot S$ рублей.
Раз в год после начисления процентов клиент, как правило, имеет право доложить на счет любую сумму денег. Также клиент имеет право снимать со счета любую сумму (естественно, не превышающую имеющуюся). Время, когда он может это сделать, указывается в задаче.

Пример 1

Клиент вложил некоторую сумму под 10% годовых, начисляемых на вклад раз в год. Известно, что в конце первого года (после начисления процентов) он снял со своего счета 10% от имеющейся на тот момент суммы, а в конце второго года (также после начисления процентов) он доложил на счет 10% от имеющейся суммы.
Составьте таблицу, отслеживающую изменения суммы на счету клиента вплоть до конца третьего года (после начисления процентов).
Определите, в конце третьего года (после начисления процентов) увеличилась или уменьшилась сумма на счете после таких манипуляций по сравнению с первоначальным вкладом и на сколько процентов.

- Для начала введем неизвестную в качестве той суммы, которую вложил клиент. Пусть это будет S рублей.
- Составим таблицу, в которой будем отслеживать сумму на счету клиента. Для этого нам понадобятся следующие столбцы:

Номер года	Сумма до начисления %	Сумма после начисления %	Манипуляция	Сумма после манипуляции

- Каждый год после начисления процентов сумма на счету клиента увеличивается в $1,1$ раза, то есть равна $1,1 \cdot$ «сумма до начисления %».
- Первый год. Если клиент вложил S рублей, то на конец первого года (после первого начисления процентов) сумма на счету составит $1,1S$ рублей. Сказано, что после первого начисления процентов клиент снял со своего счета 10% от имеющейся на тот момент суммы, то есть от $1,1S$ рублей. Следовательно, на счету у него осталось 90% от суммы в $1,1S$ рублей, иначе говоря, у него осталось $0,9 \cdot (1,1S)$ рублей.
- Второй год. На счету $0,9 \cdot (1,1S)$ рублей. После второго начисления процентов сумма на счету также увеличится в $1,1$ раза, то есть составит $1,1 \cdot (0,9 \cdot 1,1S)$ рублей. После этого клиент доложил на счет 10% от имеющейся уже там суммы, то есть на счету после этой манипуляции у него станет 110% от $1,1 \cdot (0,9 \cdot 1,1S)$ рублей. Другими словами, на счету клиент будет иметь $1,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$ рублей.
- Третий год. На счету $1,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$ рублей. После третьего начисления процентов сумма на счету также увеличится в $1,1$ раза. Следовательно, в конце третьего года размер вклада составит $1,1 \cdot (1,1 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$ рублей. Конец.

Таким образом, мы получаем следующую таблицу (ведем все вычисления в рублях):

Номер года	Сумма до начисления %	Сумма после начисления %	Манипуляция	Сумма после манипуляции
1	S	$1,1S$	$-0,1 \cdot (1,1S)$	$0,9 \cdot (1,1S)$
2	$0,9 \cdot (1,1S)$	$1,1 \cdot (0,9 \cdot 1,1S)$	$+0,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$	$1,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$
3	$1,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$	$1,1 \cdot (1,1 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$	нет	$\boxed{1,1 \cdot (1,1 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S) = S_1}$

Это выражение необходимо сравнить с S

- Следовательно, на счете у клиента (в рублях) стало

$$S_1 = 1,1 \cdot (1,1 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S) = 1,1^4 \cdot 0,9S = 1,31769S$$

S_1 больше первоначального вклада S на $31,769\%$.

Пример 2

В марте 2016 года Мария сделала вклад в банк в размере $100\,000$ рублей на 3 года. Раз в год в ноябре банк начисляет на имеющуюся на счете сумму 5%. Какую максимальную сумму денег может снять Мария в декабре 2017 года, чтобы в марте 2019 года сумма на счете была не менее $105\,000$ рублей?
• Каждый год после начисления процентов сумма на счету клиента увеличивается в $1,05$ раз.
Составим таблицу, делая все вычисления в тыс. рублей и обозначив за x тыс. рублей сумму, которую Мария снимет со счета в декабре 2017 года:

Год	Сумма на счете до начисления % (март)	Сумма на счете после начисления % (ноябрь)	Снятая сумма	Сумма на счете после снятия (декабрь)
2016	100	$1,05\cdot 100$	0	$1,05\cdot 100$
2017	$1,05\cdot 100$	$1,05^2\cdot 100$	x	$1,05^2\cdot 100-x$
2018	$1,05^2\cdot 100-x$	$1,05(1,05^2\cdot 100-x)$	0	$\boxed{1,05(1,05^2\cdot 100-x)}$

Это выражение должно быть не менее 105

• Заметим, что в марте 2019 года на счете у Марии будет столько же денег, сколько и в декабре 2018. Таким образом, необходимо найти такой максимальный x, чтобы

$$1,05(1,05^2\cdot 100-x)\geqslant 105$$

• Решая данное неравенство, получим, что $x\leqslant 10,25$. Таким образом, максимальная сумма, которую можно снять со счета, это $10\,250$ рублей.

Пример 3

Планируется сделать вклад в размере 1 млн рублей под целое число процентов. Раз в год после начисления процентов планируется снимать со счета 100 тыс. рублей.
Какой должен быть наименьший годовой процент в банке, чтобы после трех таких снятий сумма на счете была не менее 1 млн рублей?
• Обозначим годовой процент банка за $r\%$. Тогда после начисления процентов сумма на счете будет увеличиваться в $1+0,01r$ раз. Поэтому обозначим $1+0,01r$ за t и составим таблицу, производя все вычисления в тыс. рублей:

Год	Сумма на счете до начисления %	Сумма на счете после начисления %	Снятая сумма после снятия	Сумма на счете
1	1000	$t\cdot 1000$	100	$t\cdot 1000-100$
2	$t\cdot 1000-100$	$t(t\cdot 1000-100)$	100	$t(t\cdot 1000-100)-100$
3	$t(t\cdot 1000-100)-100$	$t(t(t\cdot 1000-100)-100)$	100	$\boxed{t(t(t\cdot 1000-100)-100)-100}$

Это выражение должно быть не менее 1000

• Таким образом, необходимо, чтобы

$$t(t(t\cdot 1000-100)-100)-100\geqslant 1000\quad\Leftrightarrow\quad 1000t^3-100t^2-100t-100\geqslant 1000\quad\Leftrightarrow\quad 1000(t^3-1)-100(t^2+t+1)\geqslant 0\quad\Leftrightarrow$$
$$1000(t-1)(t^2+t+1)-100(t^2+t+1)\geqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad (t^2+t+1)(1000t-1000-100)\geqslant 0$$

• Так как процент в банке не может быть отрицательным, то есть $r\geqslant 0\Rightarrow t\geqslant 1$, то выражение t^2+t+1 всегда положительно. Следовательно, полученное неравенство равносильно

$$1000t-1000-100\geqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad t\geqslant 1,1\quad\Rightarrow\quad 1+0,01r\geqslant 1,1\quad\Leftrightarrow\quad r\geqslant 10$$

Значит, наименьший годовой процент в банке должен быть 10%.