№15 из ЕГЭ прошлых лет. Вклады

1. В регионе А среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43 740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе Б среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60 000 рублей. В течение трех лет суммарный доход жителей региона Б увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на m% ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в обоих регионах А и Б стал одинаковым. Найдите m.

Ответ

4

Решение

Составим таблицу для региона А:

Год	Среднемесячный доход на душу населения
2014	$43\,740$
2015	$1,25\cdot 43\,740$
2016	$1,25(1,25\cdot 43\,740)=1,25^2\cdot 43\,740$
2017	$1,25^3\cdot 43\,740$

Составим таблицу для региона Б. Пусть x – население региона Б в 2014 году:

Год	Население	Суммарный доход жителей
2014	x	$60\,000\cdot x$
2015	$(1+0,01m)x$	$1,17\cdot 60\,000\cdot x$
2016	$(1+0,01m)^2x$	$1,17^2\cdot 60\,000\cdot x$
2017	$(1+0,01m)^3x$	$1,17^3\cdot 60\,000\cdot x$

Заметим, что если умножить среднемесячный доход на количество жителей, то получим суммарный доход жителей. Следовательно, суммарный доход жителей делить на число жителей — это среднемесячный доход на душу населения. Значит, в 2017 году в регионе Б среднемесячный доход на душу населения составлял

$$\frac{1,17^3\cdot 60\,000\cdot x}{(1+0,01m)^3\cdot x}=\frac{1,17^3\cdot 60\,000}{(1+0,01m)^3}$$

По условию задачи этот доход равен среднемесячному доходу в 2017 году в регионе А:

$$\frac{1,17^3\cdot 60\,000}{(1+0,01m)^3}=1,25^3\cdot 43\,740$$

$$\left(\frac{1,17}{(1+0,01m)\cdot 1,25}\right)^3=\frac{43\,740}{60\,000}$$

Представим дробь в виде

$$\frac{43\,740}{60\,000}=\frac{729}{1000}=\left(\frac{9}{10}\right)^3$$

Тогда окончательно имеем:

$$\frac{1,17}{(1+0,01m)\cdot 1,25}=\frac{9}{10}\quad\Leftrightarrow\quad m=4$$

2. В феврале женщина оформила в банке вклад на 4 года. Каждый год в ноябре банк начисляет на вклад 8%. В декабре первого года пользования услугами данного банка женщина решила купить квартиру и сняла для этой цели со своего счета 8 млн рублей. Ровно через два года она продала эту квартиру и сразу же вернула на счет в банке 8 млн рублей.

Определите, сколько рублей потеряла по истечении срока действия вклада эта женщина из-за подобных действий.

Ответ

1 437 696 рублей

Решение

Пусть размер вклада составил A млн рублей. Составим таблицу, описывающую действия, происходившие со вкладом. Расчеты здесь и далее будем вести в млн рублей.

Номер года	Сумма в феврале	Сумма в ноябре	Манипуляции
1	A	$1{,}08A$	-8
2	$1{,}08A-8$	$1{,}08(1{,}08A-8)$	
3	$1{,}08(1{,}08A-8)$	$1{,}08^2(1{,}08A-8)$	$+8$
4	$1{,}08^2(1{,}08A-8)+8$	$1{,}08(1{,}08^2(1{,}08A-8)+8)$	

Таким образом, спустя четыре года на счете у женщины было

$$1{,}08(1{,}08^2(1{,}08A-8)+8)=1{,}08^4A-8\cdot 1{,}08(1{,}08-1)(1{,}08+1)$$

Если бы она не совершала данные манипуляции, то каждый год ее вклад увеличивался в 1,08 раз и к концу четвертого года составил $1,08^4A$ млн рублей. Следовательно, из-за подобных действий ее вклад уменьшился на

$$8\cdot 1{,}08(1{,}08-1)(1{,}08+1)=8\cdot 1{,}08\cdot 0{,}08\cdot 2{,}08=1{,}437696$$

3. В банке оформили два одинаковых вклада под один и тот же процент годовых на 3 года.

По первому вкладу были проделаны следующие манипуляции: в конце первого года после начисления процентов со счета было снято 20% от имеющейся там суммы, а в конце второго года после начисления процентов было доложено 30% от имеющейся там суммы.

По второму вкладу были проделаны следующие манипуляции: в конце первого года после начисления процентов на счет было доложено 20% от имеющейся там суммы, а в конце второго года после начисления процентов было снято 30% от имеющейся там суммы.

Определите, на каком из двух счетов в конце третьего года после проделанных действий оказалось больше денег. Найдите отношение суммы, находящейся на первом счете, к сумме, находящейся на втором счете.

Ответ

Сумма на первом счету больше. Отношение равно 26 : 21

Решение

Пусть оба вклада были размером A рублей. Пусть после начисления процентов вклад увеличивался в t раз. Расчеты будем вести в рублях. Составим таблицу для первого вклада:

Номер года	Сумма до начисления %	Сумма после начисления %	Манипуляции
1	A	tA	$-0{,}2\cdot(tA)$
2	$0{,}8\cdot(tA)$	$t\cdot(0{,}8\cdot tA)$	$+0{,}3\cdot(t\cdot 0{,}8\cdot tA)$
3	$1{,}3\cdot(t\cdot 0{,}8\cdot tA)$	$t\cdot(1{,}3\cdot t\cdot 0{,}8\cdot tA)$	

Следовательно, в конце третьего года на счете было

$$1{,}3\cdot 0{,}8\cdot t^3A = 1{,}04t^3A$$

Составим таблицу для второго вклада:

Номер года	Сумма до начисления %	Сумма после начисления %	Манипуляции
1	A	tA	$+0{,}2\cdot(tA)$
2	$1{,}2\cdot(tA)$	$t\cdot(1{,}2\cdot tA)$	$-0{,}3\cdot(t\cdot 1{,}2\cdot tA)$
3	$0{,}7\cdot(t\cdot 1{,}2\cdot tA)$	$t\cdot(0{,}7\cdot t\cdot 1{,}2\cdot tA)$	

Следовательно, в конце третьего года на счете было

$$0{,}7\cdot 1{,}2\cdot t^3A = 0{,}84t^3A$$

Заметим, что сумма на первом счету оказалась больше. Тогда искомое отношение сумм на счетах равно

$$1{,}04 : 0{,}84 = 26 : 21$$

4. Банк предоставляет следующие условия по оформлению вкладов:

— два раза в год банк начисляет на вклад некоторый процент;

— в первый год банк начисляет целое кратное десяти число y процентов;

— в каждый следующий год процент становится в два раза больше процента в предыдущем году.

Найдите y, если известно, что спустя 3 года сумма на счете превысила первоначальную на 241,5104%.

Ответ

10

Решение

Пусть для определенности банк начисляет проценты в январе и июле. Пусть было положено A рублей в банк. Составим таблицу:

Год	Сумма в январе	Сумма в июле
1	$(1+0{,}01y)A$	$(1+0{,}01y)^2A$
2	$(1+0{,}01\cdot 2y)(1+0{,}01y)^2A$	$(1+0{,}01\cdot 2y)^2(1+0{,}01y)^2A$
3	$(1+0{,}01\cdot 4y)(1+0{,}01\cdot 2y)^2(1+0{,}01y)^2A$	$(1+0{,}01\cdot 4y)^2(1+0{,}01\cdot 2y)^2(1+0{,}01y)^2A$

Таким образом, спустя 3 года на счете было в рублях

$$(1+0{,}01\cdot 4y)^2(1+0{,}01\cdot 2y)^2(1+0{,}01y)^2A$$

По условию эта сумма превышает первоначальную, то есть A, на 241,5104%. Следовательно, эта сумма составляет 341,5104% от A. Значит,

$$(1+0{,}01\cdot 4y)^2(1+0{,}01\cdot 2y)^2(1+0{,}01y)^2A = 3{,}415104A$$

Обозначим $0{,}01y = x$ и получим следующее уравнение:

$$\Big((1+4x)(1+2x)(1+x)\Big)^2 = 3{,}415104$$

Разложим на множители число

$$3\,415\,104 = 2^6\cdot 3^2\cdot 11^2\cdot 7^2 = \left(2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 7\right)^2$$

Следовательно, $3{,}415104 = 1{,}848^2$. Следовательно, уравнение можно переписать в виде

$$(1+4x)(1+2x)(1+x) = 1{,}848$$

Так как y кратно десяти, то $y = 10;\ 20;\ 30$ и так далее. Следовательно, $x = \frac{1}{10};\ \frac{1}{5};\ \frac{3}{10}$ и так далее.

Подставляя по очереди эти числа, видим, что первое значение $x = \frac{1}{10} = 0,1$ подходит:

$$(1+0{,}4)(1+0{,}2)(1+0{,}1) = 1{,}848 \quad\Leftrightarrow\quad 1{,}848 = 1{,}848$$

Следовательно, $y = 10$.

5. Клиент хочет сделать вклад на три года и выбирает между двумя банками:

— первый банк в конце каждого года планирует увеличивать сумму, имеющуюся на счете в начале года, на 10%

— второй банк планирует увеличивать эту сумму в первый год на 4%, во второй год — на y%, а в третий — на $2y$%.

Найдите наименьшее целое кратное 5 число y, чтобы предложение второго банка в течение трех лет хранения вклада оказалось выгоднее предложения первого банка.

Ответ

10

Решение

Пусть планируется сделать вклад на сумму A рублей. Составим таблицу для первого банка:

Год	Сумма на счете до начисления процентов	Сумма на счете после начисления процентов
1	A	$1{,}1A$
2	$1{,}1A$	$1{,}1^2A$
3	$1{,}1^2A$	$1{,}1^3A$

Таким образом, сумма на счете после трех лет хранения в этом банке будет равна $1{,}1^3A$ рублей.

Составим таблицу для второго банка, используя обозначение $0{,}01y = t$.

Год	Сумма на счете до начисления процентов	Сумма на счете после начисления процентов
1	A	$1{,}04A$
2	$1{,}04A$	$(1+t)\cdot 1{,}04A$
3	$(1+t)\cdot 1,04A$	$(1+2t)(1+t)\cdot 1{,}04A$

Таким образом, сумма на счете во втором банке в конце третьего года будет равна

$$(1+2t)(1+t)\cdot 1{,}04A \text{ рублей.}$$

Так как необходимо, чтобы второй банк стал выгоднее первого, то должно выполнять неравенство

$$(1+2t)(1+t)\cdot 1{,}04A > 1{,}1^3A \quad\Rightarrow\quad 2080t^2 + 3120t - 291 > 0$$

Так как y кратно 5, то возможные варианты для t — это 0,05; 0,1; 0,15; 0,2 и так далее. Подставляя их в полученное неравенство, найдем наименьшее подходящее $t = 0{,}1$.

Действительно, при $t = 0{,}05$ имеем

$$2080\cdot 0{,}05^2 + 3120\cdot 0{,}05 - 291 = -129{,}8 < 0$$

Но при $t = 0{,}1$ имеем

$$2080\cdot 0{,}1^2 + 3120\cdot 0{,}1 - 291 = 41{,}8 > 0$$

Следовательно, $t = 0{,}1$, а значит $y = 10\%$.